

# 近似特異な多項式と多項式系

佐々木 建昭

筑波大学 数学系\*

TATEAKI SASAKI

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA

## Abstract

近似特異性の概念を2変数多項式、多変数多項式、および多変数多項式系に導入する。2変数多項式に対して強近似特異点と弱近似特異点を定義し、与えられた近似特異な多項式から、弱近似特異点を持つ多項式を決定する方法を与える。2変数・多変数多項式に対して、微小項・誤差項を摂動として扱いつつ、特異点で根を(分数)べき級数に展開する方法を提示する。多変数多項式系に対して、近似特異性の検出法(グレブナー基底計算用のBuchberger 算法を修正したもの)を提案する。本稿は新しい概念と問題を提起する類の論文であり、多くの例を用いて概念の説明に主眼を置く。

## 1 はじめに

1980年代末より、筆者は近似的代数計算を研究し[Sas88]、共同研究者とともに1変数・多変数多項式の近似共約子(GCD)、近似無平方分解、および近似因数分解の概念を提案し、算法を提示してきた[SN89, ONS91, NS91, SSKS91, SSH92, Sas01]。これに触発され、Corlessらは1変数・多変数多項式の近似分解の概念を提案した[CGJW99]。このような近似演算に基づく代数を近似代数(approximate algebra)と呼ぶ；近似代数の現状については[Sas03]を参照されたい。

近似代数の主たる目的は、[Sch85]に見るような浮動小数係数多項式の扱いではない；勿論、それも重要な目的の一つではある。主たる目的は、望ましい性質を持たない多項式や多項式系が与えられたとき、係数を微小変動させて、望ましい性質を持つ多項式や多項式系を(もし存在すれば)見つけることである。たとえば、可約な多項式は分解できるので、可約性は望ましい性質といえる。故に、既約だが可約に近い多項式に対して、係数を微小変動させて可約な多項式を求めたくなるが、それが近似因数分解である。近似代数の自然な発展として、次には、多項式・多項式系の近似特異性の概念に行き着く。

実は、近似特異の概念は既にいくつか提唱されている。一つは最近多項式(nearest polynomial)で[ZW98, HK98, HKL99, Ste99A]、もう一つは擬多様体(pseudo-variety)である[Mos86, TT94, Tre99, Ste99B, HMZ03, CKW03]。重根を持つ多項式は特異と言われる。しからば、重根を持たず近接根を持つ多項式は近似特異と言える。非特異な多項式が与えられたとき、係数のあるノルムの下で最小に変化させて得られる特異多項式が最近多項式である。最近多項式は制御理論で重要な役割を果たす；たとえば[BK93]を参照。すると、最小許容度の近似無平方分解(理論は未完成)は最近多項式の一般化と言える。最近多項式は係数が正確な多項式に対してのみ定義できるが、近似無平方分解は不正確な係数の多項式にも定義できる。擬多様体とは、与えられた多項式系の代数多様体とその近辺の多項式系の代数多様体の集合である。ここで、近辺の多項式系とは、与多項式系の係数を摂動させて得られる多項式系である。従来の研究は擬多様体の可視化に関するものが多い。そんな中、StetterとThallinger[ST98]は、無限個の解を持つ多変数多項式系

\*sasaki@math.tsukuba.ac.jp

を特異と呼び、特異な系が係数の微小変動でいかに非特異な系に変化するかを調べた。これらの研究では、最初に特異な系が与えられていることが多い。一方、我々が興味を持つのは、非特異だが近似的に特異な系が与えられたとき、特異な系を見つけることである。

2章の例で見ると、多項式の特異性は係数の微小変動で大きく変わることがあり、多項式から決まる代数曲線も複雑に変化することがある。我々はそのような場合に興味がある。この変化を注意深く分析することにより、我々は強および弱の二つの意味での近似特異点の概念に行き着く。2章では、弱近似特異点と対応する摂動を決める一方法を述べる。

3章では、摂動項を持つ2変数・多変数多項式の根のべき級数展開法を考察する。よく知られているように、2変数多項式の根は特異点でピュイズー級数(分数べき級数)に展開できる。3章で例示するように、摂動項がある場合、従来算法で計算されたべき級数は収束半径が非常に小さい“異常な”ものとなることが多い。そこで、微小項・誤差項が摂動として扱われるような展開法を、2変数・多変数多項式に対して提示する。この方法で得られる級数は代数曲線の大域的振舞いをよく再現し、摂動項を0にした多項式のべき級数根に収束するが、特異点では発散するものである。

多変数多項式系から決まる代数多様体は数学でも計算代数でも非常によく研究された。本稿では、微小な摂動で多様体の次元が変化する多変数多項式系を近似特異な系と呼び、そのような多項式系を考察する。近似特異な系が与えられたとき、近似特異性を検出し、特異系を決定する効率的な算法を開発したい。4章では、Buchbergerの算法を修正した一方法を提案するが、いまだ未精練の段階である。

## 2 近似特異な2変数多項式

$F(y, x)$  は  $\mathbb{C}$  上の2変数多項式とする。特異性は代数幾何における最も重要な概念の一つである。次式を満たす点  $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{C}^2$  は  $F(y, x)$  の特異点と言われ、 $F(y, x)$  は  $(\hat{x}, \hat{y})$  で特異であると言われる。

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\partial F}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) = 0. \quad (2.1)$$

後々のため、上記3方程式のどれか一つを満たす点  $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{C}^2$  を半特異点と呼ぶことにする。すなわち、 $V_1, V_2, V_3$  を次式で定めるとき、 $(\hat{x}, \hat{y}) \in V_1 \cup V_2 \cup V_3$  である。

$$\begin{aligned} V_1 &= \text{variety}(\{F=0, \partial F/\partial y=0\}), \\ V_2 &= \text{variety}(\{\partial F/\partial y=0, \partial F/\partial x=0\}), \\ V_3 &= \text{variety}(\{F=0, \partial F/\partial x=0\}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

本稿を通して、ノルム(例題では無限大ノルム)を  $\|\cdot\|$  と表す。

$F(y, x)$  に微小摂動を加えると、特異性がどうなるかを例でみよう。

例1  $F(y, x) = y^2 - x^3 - \delta_2 x^2 - \delta_1 x$ ,  $0 \leq |\delta_1|, |\delta_2| \leq \varepsilon \ll 1$ .

$F_0(y, x) = y^2 - x^3$ ,  $F_1(y, x) = y^2 - x^3 - \delta_1 x$ , および  $F_2(y, x) = y^2 - x^3 - \delta_2 x^2$  とする。 $F_0(y, x)$  は  $(0, 0)$  にただ一つの特異点を持つ。 $F_1(y, x)$  は特異点を持たない。 $F_2(y, x)$  は  $(0, 0)$  にただ一つの特異点を持つ。 $F(y, x)$  は、 $\delta_2^2 - 3\delta_1 = 0$  ならば特異点を持たず、 $\delta_2^2 - 4\delta_1 = 0$  ならば  $(x, y) = (-\delta_2/2, 0)$  に特異点を持つ： $F(y, x) \rightarrow y^2 - x(x + \delta_2/2)^2 \stackrel{\text{def}}{=} F_3(y, x)$ 。 $\delta_1, \delta_2 > 0$  のとき、 $F_3$  は  $F$  から最小摂動  $\Delta = (\delta_1 - \delta_2^2/4)x$  で得られる多項式である： $F_3(y, x) = F(y, x) + \Delta(y, x)$ 。一方、 $F(y, x)$  は原点近傍に多くの半特異点を持つ： $V_2$  は3個、 $V_3$  は2個、 $V_1$  は4個の要素を持つ。□

例1が示すように、 $F(y, x)$  がたとえ微小でも摂動をうけると、特異点は消えたり現れたり、移動したりする。しかしながら、 $F(y, x) = 0$  から決まる曲線の大域的構造は近似的に同じである。そして、大域的に

大体同じ構造の曲線を与える一群の多項式の中で、一つの多項式（上記の例では  $F_0(y, x)$ ）は極端に簡単な構造の曲線を与えることが分る。また、 $F(y, x)$  は原点近傍にいくつかの半特異点を持つが、特異点はただか一つしか持たない。パラメータ  $\delta_1, \delta_2$  を微小変動させた一群の  $F(y, x)$  の中で、 $F_0(y, x)$  は原点以外に半特異点を持たず、簡単な構造の代数曲線を与えるという点で、非常に望ましい多項式と言える。これらのことから、強弱二つの意味で近似特異の概念に到達する。

**定義 1 (弱近似特異)**  $\varepsilon$  は微小正数とし、 $F(y, x)$  と  $\Delta(y, x)$  を次の多項式とする。

$$\begin{cases} F(y, x) = \sum_{i,j} c_{ij} y^i x^j, \\ \Delta(y, x) = \sum_{i,j} \delta_{ij} y^i x^j, \end{cases} \quad \|\Delta\|/\|F\| < \varepsilon \ll 1. \quad (2.3)$$

( $\Delta$  のサポート、 $\text{supp}(\Delta) = \{x^i y^j \mid \delta_{ij} \neq 0\}$  は、 $\text{supp}(\Delta) \subseteq \text{supp}(F)$  または  $\text{supp}(\Delta) \not\subseteq \text{supp}(F)$ ) などと自由に決めてよい)。  $F + \Delta$  が  $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{C}^2$  で特異になるように摂動項  $\Delta(y, x)$  を選べるならば、 $F(y, x)$  は  $(\hat{x}, \hat{y})$  において許容度  $\varepsilon$  で弱近似特異であると言い、 $(\hat{x}, \hat{y})$  を  $F(y, x)$  の弱近似特異点と言う。  $\square$

**定義 2 (強近似特異)**  $F(y, x)$  と  $\Delta(y, x)$  は定義 1 と同じとする。うまく選ばれた  $\Delta(y, x)$  に対して  $(\hat{z})$  が  $\bar{F}(y, x) \stackrel{\text{def}}{=} F(y, x) + \Delta(y, x)$  の特異点になるとし、(??) を満たすあらゆる摂動  $\Delta(y, x)$  に対して次の 2 条件を満たす小領域  $D(\hat{z})$  を選べるとする：1)  $D(\hat{z})$  の中にある特異点は  $(\hat{z})$  の近傍にただか一つのみで、2)  $(\hat{z})$  の近傍のあらゆる半特異点は  $D(\hat{z})$  に含まれる。もしも、 $\bar{F}(y, x)$  が  $D(\hat{z})$  内に持つ特異点が  $(\hat{z})$  のみであり、これ以外に  $D(\hat{z})$  内に半特異点を持たないように、摂動項  $\Delta(y, x)$  を選べるならば、 $F(y, x)$  は  $D(\hat{z})$  において許容度  $\varepsilon$  で強近似特異であると言い、 $(\hat{x}, \hat{y})$  を  $F(y, x)$  の強近似特異点と言う。  $\square$

上記の定義から、直ちに次の問題が生じる。

**問題 1** 弱近似特異性を持つ多項式  $F(y, x)$  が与えられたとき、弱近似特異点  $(\hat{z})$  と対応する多項式  $\bar{F}(y, x)$  を決定せよ。

**問題 2** 強近似特異性を持つ多項式  $F(y, x)$  が与えられたとき、強近似特異点  $(\hat{z})$  と対応する多項式  $\bar{F}(y, x)$  を決定せよ。

**問題 3**  $F(y, x)$  が近似特異性を持つための許容度の最小値  $\varepsilon$  と、対応する摂動  $\Delta(y, x)$  を決定せよ。

問題 1 を解くのは難しくない。ここでは数値的方法を述べる（4 章では代数的方法を記述する）。

**Procedure ApproxSPweak**( $F(y, x), \varepsilon$ ) ==

**Step 1** : 全ての半特異点を数値的に計算する；もしも(??)の  $V_1, V_2, V_3$  が相互に近接した解を持たなければ、 $F(y, x)$  が近似特異である可能性はない；

**Step 2** :  $V_1, V_2, V_3$  がそれぞれ解  $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \in V_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を持ち、 $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) \simeq (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) \simeq (\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)$  であるとする。下式で  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  を計算し、原点を  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  に移動する：

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3)/3, \quad \tilde{y} = (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3)/3;$$

**Step 3** :  $\Delta = d_0 + d_1 y + d_2 x + \dots$  とおき、次式 ( $\Delta$  が高次項を含むならその分だけ高階微分も) を満たすように  $d_0, d_1, d_2, \dots$  を低次から順に決定する：

$$(F + \Delta)(\tilde{y}, \tilde{x}) = 0, \quad \partial(F + \Delta)/\partial y(\tilde{y}, \tilde{x}) = 0, \quad \partial(F + \Delta)/\partial x(\tilde{y}, \tilde{x}) = 0;$$

**Step 4** : 許容度をチェックし、必要なら上記手順を繰り返す。  $\square$

### 3 摂動項を持つ多変数多項式のべき級数根

本稿では、多変数とは3変数以上を意味し、従変数  $x_1, \dots, x_\ell$  を  $x$  と略記する。

まず、前章に述べた(強・弱)近似特異性は多変数多項式にも定義できることを指摘しておく：代数幾何では、 $F(y, x)$  の特異点とは  $F(\hat{y}, \hat{x}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\hat{y}, \hat{x}) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\hat{y}, \hat{x}) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_\ell}(\hat{y}, \hat{x}) = 0$  を満たす点  $(\hat{y}, \hat{x}) \in \mathbb{C}^{\ell+1}$  と定義されており、これら  $\ell+1$  個の連立代数方程式から一つの方程式を除いた連立方程式の根を半特異点と定義すればよい。しかしながら、多変数の場合、特異点が線あるいは面状に連なることもある；たとえば、 $F(z, y, x) = z^3 - (y-x)^2$  の特異点は直線  $(x=y, z=0)$  を構成する。したがって、強近似特異の定義がかなり複雑になる。本稿では、多変数多項式の近似特異性にはこれ以上は立ち入らない。

さて、近似特異な多項式  $F(y, x)$  あるいは  $F(y, x)$  の根の、特異点を展開点とするべき級数根を考察する。特異点でのべき級数根の計算法としてニュートン・ピュイズー法がよく知られているが、それがどのような結果に導くか、例で見よう。

例 2 原点(特異点)を展開点とするべき級数根をニュートン・ピュイズー法で計算する。

$$\begin{aligned} F_0 = y^2 - x^3 & : y_0(x) = \pm\sqrt{x^3}, \\ F_1 = y^2 - x^3 - \delta x & : y_1(x) = \pm\sqrt{\delta}\sqrt{x} \left(1 + \frac{x^2}{2\delta} - \frac{x^4}{8\delta^2} + \dots\right), \\ F_2 = y^2 - x^3 - \delta x^2 & : y_2(x) = \pm\sqrt{\delta}x \left(1 + \frac{x}{2\delta} - \frac{x^2}{8\delta^2} + \dots\right). \end{aligned}$$

上記の  $F_0, F_1, F_2$  の関数形を見ると、 $\delta \rightarrow 0$  のとき  $F_1 \rightarrow F_0, F_2 \rightarrow F_0$  ゆえ、 $F_1, F_2$  のべき級数根は  $F_0$  のそれに近いと予想されるが、計算結果は全く異なっている： $y_0(x)$  の収束半径は  $\infty$  であるが、 $y_1(x), y_2(x)$  の収束半径はそれぞれ  $\sqrt{\delta}, \delta$  で、 $\delta \rightarrow \infty$  で発散する。□

実は、 $y_1(x), y_2(x)$  の収束半径は  $F = \partial F / \partial y = 0$  を満たす半特異点が決めている。もしも微小項  $\delta x, \delta x^2$  が確固たる項であれば、上記の展開も原点近傍の振舞いを見るには有用であるが、微小項が誤差項ならば上記の展開は全く無意味である。たとえ誤差項でなくても、 $\delta$  が相対的に大きな誤差を含めば、上記展開では誤差が大きく拡大されることになる。そこで、次の問題が生じる。

問題 4  $F(y, x)$  および  $F(y, x)$  の  $y$  に関する(分数)べき級数根を、微小項(誤差項)が摂動として扱われ、 $\delta \rightarrow 0$  の極限で収束する形で計算する方法を考案せよ。

この問題に関しては、筆者は確固とした答を与えることができる。一般ヘンゼル構成を特異点での構成に拡張した方法(筆者らはこれを拡張ヘンゼル構成と呼んでいる)が、2変数に対して Kuo [Kou89] により、多変数に対して Sasaki-Kako [SK99] により独立に考案された。Sasaki-Kako は拡張ヘンゼル構成を用いて、2変数および多変数のべき級数根(正確には、多変数の場合には従変数の全次数に関して分数べき級数となり、その係数部に  $x_1, \dots, x_\ell$  の代数関数が現れる)を同時に計算する方法を与えている；詳しくは [SK99] と [SI01] を参照されたい。本稿で提示する方法は Sasaki-Kako の方法を若干修正したものである。拡張ヘンゼル構成ではニュートン多項式という多項式が決定的に重要な役割を演じる。ニュートン多項式は、従変数  $x_1, \dots, x_\ell$  に全次数変数  $t$  を導入して定義される： $(x_1, \dots, x_\ell) \rightarrow (tx_1, \dots, tx_\ell)$ 。あとで必要になるので、ニュートン多項式を定義しておく。ただし、簡単のため展開点は原点とし、 $F(y, x)$  の主係数は原点で0にならないとする。

定義 3 (ニュートン線とニュートン多項式)  $F(y, x)$  の各項  $cy^{e_y}x_1^{e_1}\dots x_\ell^{e_\ell}$  に対し、2次元平面上の点  $(e_y, e_t)$  に  $\cdot$  をプロットする、ここで  $e_t = e_1 + \dots + e_\ell$  である。直線  $\mathcal{L}$  を、点  $(n, 0)$  とそれ以外のプロット点を通り、あらゆるプロット点は  $\mathcal{L}$  より下にはないように選ぶ。 $\mathcal{L}$  をユートン線といい、 $\mathcal{L}$  上にプロットされた全ての項の和をニュートン多項式という。□

問題4の答として本稿で提示する方法は簡潔明快で、次の二つの操作から成る。以下では、 $\delta$ は微小数を表すパラメータとし、微小項(誤差項)はすべて $\delta$ に比例すると仮定する。

- (O1) 微小項(誤差項)がニュートン線の下にプロットされないように、 $\delta$ に適当な重み $w_\delta$ を与える。  
(O2) この重みの下で、拡張ヘンゼル構成によりべき級数根を計算する。

例3  $F(y, x) = y^2 + yx^2 - x^3 - \delta x^2$  ( $\delta$ は微小数を表す)。

微小項 $\delta x^2$ を除いてニュートン多項式を決めると、 $F_{\text{New}} = y^2 - x^3$ となる。 $x$ と $y$ の重みをそれぞれ $w_x=1$ ,  $w_y=3/2$ と選ぶと $F_{\text{New}}$ の各項が同じ重みとなる。 $\delta x^2$ の重みを3より大きくするため $w_\delta=3/2$ とする( $w_\delta=1$ としてもよい)。この重みで $F(y, x)$ のヘンゼル構成を4次まで行くと次式が得られる:

$$\begin{cases} \phi_1^{(4)} = +x^{3/2} - x^2/2 + x^{5/2}/8 - x^{7/2}/128 \\ \quad + \delta x^{1/2}/2 - \delta x^{3/2}/16 - \delta^2 x^{-1/2}/8 + 3\delta^2 x^{1/2}/64 + O(\delta^3), \\ \phi_2^{(4)} = -x^{3/2} - x^2/2 - x^{5/2}/8 + x^{7/2}/128 \\ \quad - \delta x^{1/2}/2 + \delta x^{3/2}/16 + \delta^2 x^{-1/2}/8 - 3\delta^2 x^{1/2}/64 + O(\delta^3). \end{cases}$$

これらは、 $\delta \rightarrow 0$ の極限で $F_0 = y^2 + yx^2 - x^3$ のべき級数根に収束するが、 $x \rightarrow 0$ では発散する。  $\square$

拡張ヘンゼル構成は、ニュートン多項式を $\mathbf{C}[y, x]$ 上で分解し、得られた因子を初期因子として行ってもよく、代数拡大体上で可能な限り分解して得られた因子を初期因子にして行ってもよい。これら二通りの選び方で構成されるヘンゼル因子を比較すると、直ちに次の共役性に気付く(詳しくは[SK99]を参照): ニュートン多項式 $F_{\text{New}}$ が $\mathbf{C}[y, x]$ で既約ならば、 $F(y, x)$ のべき級数根は $\mathbf{C}[y, x]$ 上で互いに共役である。近似代数の観点からこの共役性を見直すと、次の近似非共役性の概念に到達する。

**定義4 (近似非共役性)** ニュートン多項式は $\mathbf{C}[y, x]$ で既約だが、許容度 $\varepsilon$ で近似可約で、 $F_{\text{New}} = G_1^{(0)} \cdots G_r^{(0)} + \Delta^{(0)}$ ,  $\|\Delta^{(0)}\|/\|F_{\text{New}}\| \leq \varepsilon$ と分解できるとする。このとき、因子 $G_i^{(0)}$ に対応する根は $G_j^{(0)}$  ( $\forall j \neq i$ )に対応する根とは近似非共役であるという。  $\square$

例4  $F(y, u, v) = y^3 + 2y^2(u^2 + v^2) - yu^2 + \delta v^3 = (y - \phi_1)(y - \phi_2)(y - \phi_3)$ .

$\delta$ の重みを0とすると、ニュートン多項式とその因数分解は次式となる。

$$F_{\text{New}} = y^3 - yu^2 + \delta v^3 \stackrel{\text{def}}{=} (y - \theta_1)(y - \theta_2)(y - \theta_3).$$

ここで、 $\theta_i$  ( $i=1, 2, 3$ )は $F_{\text{New}}$ を最小多項式とする $u, v$ の代数関数である。上記右辺の3因子を基に拡張ヘンゼル構成を行うと、 $F(y, u, v)$ のべき級数根 $\phi_i(u, v)$  ( $i=1, 2, 3$ )として次式を得る。

$$\phi_i = \theta_i - \frac{2(u^2 + v^2)}{4u^6 - 27\delta^2 v^6} (2u^4 \theta_i^2 + 3\delta u^2 v^3 \theta_i - 9\delta^2 v^6) + \cdots$$

このべき級数根は共役性を明白に示しているのみならず、特異性も示している: $\phi_i$ は $4u^6 - 27\delta^2 v^6 \rightarrow 0$ で発散し、 $4u^6 - 27\delta^2 v^6 = 0$ を満たすあらゆる点がヘンゼル構成の特異点である。 $(4u^6 - 27\delta^2 v^6 = 0$ の場合、べき級数根の計算には別の技法が必要だが、その技法については[SK99]を参照されたい)。

ところで、 $F(y, u, v)$ から微小項 $\delta v^3$ を捨てた多項式を $\tilde{F}(y, u, v)$ とすると、対応するニュートン多項式は $\tilde{F}_{\text{New}} = y^3 - yu^2 = y(y-u)(y+u)$ と分解できるので、根 $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ は互いに近似非共役である。実際、次に示すように、 $\tilde{F}(y, u, v)$ の3根 $\tilde{\phi}_i$  ( $i=1, 2, 3$ )は $\mathbf{C}[u, v]$ 上で代数的でない。

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_1 = 0, \\ \tilde{\phi}_2 = u - (u^2 + v^2) + (u^2 + v^2)^2/2u + (u^2 + v^2)^4/8u^3 + \cdots, \\ \tilde{\phi}_3 = -u - (u^2 + v^2) - (u^2 + v^2)^2/2u - (u^2 + v^2)^4/8u^3 + \cdots, \end{cases} \quad \square$$

## 4 近似特異な多項式系

本章では、次に示す多項式系  $S$  を考察する：

$$S = \{F_1(x_1, \dots, x_\ell) = 0, \dots, F_m(x_1, \dots, x_\ell) = 0\}, \quad (4.1)$$

$$F_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_\ell], \quad \|F_i\| = 1 \quad (i = 1, \dots, m).$$

この系の解全体は代数多様体  $V$  を構成する。多項式系では、個々の多項式の特異性よりも  $V$  の構造の方が重要である。個々の多項式  $F_i$  が摂動  $\Delta_i$  を受けて  $\tilde{F}_i$  になるとする：

$$\tilde{F}_i = F_i + \Delta_i, \quad \|\Delta_i\|/\|F_i\| \leq \varepsilon \ll 1 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (4.2)$$

系  $\{\tilde{F}_1 = 0, \dots, \tilde{F}_m = 0\}$  の解全体は代数多様体  $\tilde{V}$  を構成する。 $F_1, \dots, F_m$  の間に代数的関係がなければ（ゆえに  $\ell \geq m$  である）、 $V$  の次元は通常  $\ell - m$  である： $\dim(V) = \ell - m$ 。系  $S$  は  $\dim(V) > \ell - m$  のとき特異であると言われる。我々が興味を持つのは、 $F_1, \dots, F_m$  に対する微小摂動  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$  で  $V$  の次元が変化する場合である。そこで、近似特異な多項式系を以下のように定義する。

**定義 5 (近似特異な多項式系)**  $\varepsilon$  は微小正数とし、 $S$  と  $\tilde{S}$  は上記のように定義されたとする。摂動  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$  を、 $\|\Delta_i\|/\|F_i\| \leq \varepsilon \ll 1$  ( $i = 1, \dots, m$ ) および  $\dim(V) < \dim(\tilde{V})$  を満たすように選ぶことができるなら、系  $S$  は許容度  $\varepsilon$  で近似特異であると言う。  $\square$

上記の定義から直ちに次の問題が生じる。

**問題 5** 多項式系  $S$  と微小正数  $\varepsilon$  が与えられたとき、 $S$  が許容度  $\varepsilon$  で近似特異かどうかを決定せよ。

**問題 6**  $S$  が近似特異なとき、 $\dim(\text{variety}(S)) < \dim(\text{variety}(\tilde{S}))$  となる近辺の系  $\tilde{S}$  を決定せよ。

**問題 7**  $S$  が近似特異となるための許容度  $\varepsilon$  の最小値と対応する摂動を決定せよ。

簡単な近似特異系の一つは次に示すものである。

$$F_i = GC_i + \Delta_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad \text{resultant}(C_1, \dots, C_m) = 1. \quad (4.3)$$

$S$  は有限個の解を持つとしよう： $\dim(\text{variety}(S)) = 0$ 。 $\tilde{S} = \{GC_1 = 0, \dots, GC_m = 0\}$  の解は  $G = 0$  を満たす点なので、 $\dim(\text{variety}(\tilde{S})) = \bar{\ell} - 1$  となる、ただし、 $\bar{\ell}$  は  $G$  に含まれる変数の個数である。この系は Ochi-Noda-Sasaki [ONS91] により、数値解法の観点から考察された。 $G = 0$  から決まる超曲面に近い任意の点  $(x'_1, \dots, x'_\ell)$  は  $F_i(x'_1, \dots, x'_\ell) \approx 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) を満たすので、元の系  $S$  は数値的に悪条件である。一方、 $G$  は許容度  $\varepsilon$  の近似 GCD として決定できる。一旦  $G$  が決まれば、系  $S$  を次のような良条件の系  $S'$  に変換できる（正確に言えば、 $S'$  は  $S$  に等価ではなく、 $\text{variety}(S) \subseteq \text{variety}(S')$  となる）：

$$S' = \{F_1 = 0, F_1C_2 - F_2C_1 = 0, \dots, F_1C_m - F_mC_1 = 0\}$$

$$= \{F_1 = 0, \Delta_1C_2 - \Delta_2C_1 = 0, \dots, \Delta_1C_m - \Delta_mC_1 = 0\}.$$

問題 5 を一般の場合について考える。代数多様体の次元はグレブナー基底の要素多項式の頭項を観察すれば分る；[Buch85] を参照。さらに、系  $S$  が近似特異なら、 $F_1, \dots, F_m$  の間に代数関係がなければならず、したがって次に定義する近似シジジーが存在するはずである；シジジーについては [BW93] を参照。

**定義 6 (近似シジジー)** 多項式  $F_1, \dots, F_m$  は  $\|F_i\| = 1$  ( $i = 1, \dots, m$ ) と規格化されているとする。微小正数  $\varepsilon$  に対し、次式を満たす多項式  $C_1, \dots, C_m$  が存在するとする。

$$\|C_1F_1 + \dots + C_mF_m\| < \varepsilon, \quad \max\{\|C_1\|, \dots, \|C_m\|\} = 1, \quad (4.4)$$

このとき、 $m$  組  $(C_1, \dots, C_m)$  を  $(F_1, \dots, F_m)$  の許容度  $\varepsilon$  での近似シジジーと言う。  $\square$

近似シジジーの基底を得るため、Buchberger 算法を下記のように修正する。

**Procedure ModifiedBuchberger** ( $\{F_1, \dots, F_m\}, \varepsilon$ ) ==

% 各  $F_i$  は  $\|F_i\| = 1$  ( $i = 1, \dots, m$ ) と規格化されている。

**Step 1** :  $\Gamma := \{F_1, \dots, F_m\}$  とおく ;

**Step 2** :  $\Gamma$  の要素対の全てがチェックされるまで、**2.1**, **2.2**, **2.3** を実行する :

**2.1**  $\Gamma$  から二つの要素  $F'_i, F'_j$  ( $i \neq j$ ) を選び出す :

**2.2**  $\text{Spol}(F'_i, F'_j) \xrightarrow{F} F'$  を計算し、 $F'$  を  $F_1, \dots, F_m$  で表し、次のように規格化する ;

$$\begin{cases} F' = C'_1 F_1 + \dots + C'_m F_m, \\ \max\{\|C'_1\|, \dots, \|C'_m\|\} = 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

**2.3**  $\|F'\| \geq \varepsilon$  ならば  $\Gamma := \Gamma \cup \{F'\}$  とする。 □

**命題 1 (証明略)** プロシジャ ModifiedBuchberger を  $\{F_1, \dots, F_m\}$  に適用して得られる基底を  $\Gamma = \{G_1, \dots, G_s\}$  とする。したがって、あらゆる対  $i \neq j$  に対して、 $\text{Spol}(G_i, G_j) \xrightarrow{F} \Delta_{ij}$ ,  $\|\Delta_{ij}\| < \varepsilon$  である。 $(F_1, \dots, F_m)$  の許容度  $\varepsilon$  での任意の近似シジジーを  $(C_1, \dots, C_m)$  とすれば、それは次のように表される :

$$\begin{aligned} C_1 F_1 + \dots + C_m F_m &= \Delta + \sum_{i < j} c_{ij} \Delta_{ij}, \\ \|c_{ij} \Delta_{ij}\| < \varepsilon', \quad \|\Delta\| < \max\{\|c_{ij} \Delta_{ij}\| \mid 1 \leq i < j \leq s\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで、通常  $\varepsilon' > O(\varepsilon)$  であり、微小頭項を持つ多項式が現れなければ  $\varepsilon' = O(\varepsilon)$  となる。 □

プロシジャ ModifiedBuchberger で許容度  $O(\varepsilon)$  の近似シジジーが計算できそうだが、命題??が主張するように、微小頭項の多項式が関与する場合には計算できないこともある。グレブナー基底計算においては、微小頭項問題は非常に厄介で、多くの研究者の努力にも拘らず、いまだ決定的な解決法がない状況である ; [SS96], [Tra02] を参照。ただ、非常に小さい頭項が現れた場合には、その頭項を捨てて計算すべき、ということと言える ; [Ste97] 参照。そこで我々は、次の三つのアイデアに基づく方法を提案する。

**(I1)** 初期多項式が大きさ  $O(\varepsilon')$ ,  $\varepsilon \leq \varepsilon' \ll 1$ , の微小項を含むとき、それらを除き、ModifiedBuchberger で大きな項の間に成立する近似シジジーを計算する ;

**(I2)** さらに、計算中、 $\|\text{ht}(G)\|/\|G\| < \varepsilon'$  となる多項式  $G$  が現れたら、 $G$  の頭項を捨てる ;

**(I3)** 得られた Gröbner もどき基底により、大きな係数の項から順に簡約して、 $F_i \rightarrow F'_i + \Delta_i$  と分解する。

**例 5** 次の例 ( $\dim(V) = 0$ ) で許容度 0.001 での近似シジジーと近似特異系を計算 (全次数順序)。

$$\{F_1 = x^2/100 + yz + z^2, F_2 = xz - y^2/100, F_3 = x^2/99 + xz - y^2/99 + yz + z^2\}.$$

$\varepsilon' = 0.01$  として  $O(\varepsilon')$  の微小項を捨てると、 $\tilde{F}_1 := yz + z^2$ ,  $\tilde{F}_2 := xz$ ,  $\tilde{F}_3 := xz + yz + z^2$  を得る。 $(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3)$  のグレブナー基底は  $\{yz + z^2, xz\}$  であり、 $(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3)$  のシジジーとして次の二つを得る。

$$\begin{aligned} \tilde{F}_3 \xrightarrow{\tilde{F}_2} \tilde{F}_1 &\rightarrow 0 &\Rightarrow & (-1, -1, 1), \\ \text{Spol}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) &= 0 &\Rightarrow & (x, -y-z, 0). \end{aligned}$$

これらの近似シジジーにおいて  $\tilde{F}_i \rightarrow F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) と置き換えると、次の多項式が得られる。

$$\begin{aligned} (-1, -1, 1) &\Rightarrow -F_1 - F_2 + F_3 = (x^2 - y^2)/9900, \\ (x, -y-z, 0) &\Rightarrow xF_1 - (y+z)F_2 = (x^3 + y^3 + y^2z)/100. \end{aligned}$$

$F_3$  は第一の近似シジジ-により  $(x^2 - y^2)/9900$  に簡約されるので、許容度 0.001 では  $F_3$  を棄却してよい。そこで、系  $\{F_1, F_2\}$  に  $\varepsilon = 0.001$  として ModifiedBuchberger を適用する (ただし微小主項を棄却する) と、次の系が得られる。

$$\{G_1 = F_1, G_2 = F_2, G_3 = yz^2 + z^3, G_4 = y^3z + z^4\}.$$

$F_1$  と  $F_2$  はこれらの系で 0 に簡約されるので、上記シジジ-と合わせると、近似特異系として次を得る。

$$\{F'_1 = F_1, F'_2 = F_2, F'_3 = F_1 + F_2\}, \quad \Delta_3 = (x^2 - y^2)/9900. \quad \square$$

## 参考文献

- [BK93] B.R.Barmish and H.I.Kang: *A survey of extreme point* ... Automatica **29** (1993), pp. 13-35.
- [Buch85] B.Buchberger: Sec. 6, in *Multidimensional Systems Theory*. Reidel Publ., 1985.
- [BW93] T.Becker and V.Weispfenning: *Gröbner Bases - A Computational* ... Springer-Verlag, 1993.
- [CGJW99] R.M.Corless, M.W.Giesbrecht, D.J.Jeffrey and S.M.Watt: *Proc. ISSAC'99*, pp. 213-219.
- [CKW03] R.M.Corless, H.Kai and S.M.Watt: ISSAC'2003 poster. (SIGSAM Bulletin **37**, pp. 67-71.)
- [HK98] M.A.Hitz and E.Kaltofen: *Efficient algorithms for comput* ... *Proc. ISSAC'98*, pp. 236-243.
- [HKL99] M.A.Hitz, E.Kaltofen and Y.N.Laksman: *Efficient algori* ... *Proc. ISSAC'99*, pp. 205-212.
- [HMZ03] J.W.Hoffman, J.J.Madden and H.Zhang: *Pseudo* ... *Math. Comp.* **72** (2003), pp. 975-1002.
- [Kuo89] T.C.Kuo: *Generalized Newton-Puiseux* ... *Canad. J. Math.*, Vol. XLI (1989), pp. 1101-1116.
- [Mos86] R.G.Mosier: *Root neighborhoods of a polynomial*. *Math. Comp.* **47** (1986), pp. 265-273.
- [NS91] M-T.Noda and T.Sasaki: *Approximate* ... *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 38 (1991), pp. 335-351.
- [ONS91] M.Ochi, M-T.Noda and T.Sasaki: *Approximate* ... *J. Inf. Proces.* **14** (1991), pp. 292-300.
- [Sas88] 佐々木建昭: “近似的代数計算法”. 数理研講究録 第 676 号 (1988), pp. 307-319.
- [Sas01] T.Sasaki: *Approximate multivariate polynomial factori* ... *Proc. ISSAC 2001*, pp. 284-291.
- [Sas03] 佐々木建昭: “近似代数の現状と展望”. 応用数学会講演予稿集 (2003), pp. 170-173.
- [Sch85] A.Schönhage: *Quasi-GCD computation*. *J. Complexity* **1** (1985), 118-137.
- [SI00] T.Sasaki and D.Inaba: *Hensel construction of* ... *SIGSAM Bulletin* **34** (2000), pp. 9-17.
- [SK99] T.Sasaki and F.Kako: *Solving multi* ... *Japan J. Indust. Appl. Math.* **16** (1999), pp. 257-285.
- [SN89] T.Sasaki and M-T.Noda: *Approximate square-free* ... *J. Inf. Proces.* **12** (1989), pp. 159-168.
- [SS96] K.Shirayanagi and M.Sweedler: *Floating-point* ... *Math. Comp. Simul.* **42** (1996), pp. 509-528.
- [SSH92] T.Sasaki, T.Saito and T.Hilano: *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **9** (1992), pp. 351-368.
- [SSKS91] T.Sasaki, M.Suzuki, M.Kolář, M.Sasaki: *Japan J. Indust. Appl. Math.* **8** (1991), pp. 357-375.
- [ST98] H.J.Stetter and G.H.Thallinger: *Singular systems of polynomials*. *Proc. ISSAC'98*, pp. 9-16.
- [Ste97] H.J.Stetter: *Stabilization of polynomial systems solving with* ... *Proc. ISSAC'97*, pp. 117-124.
- [Ste99A] H.J.Stetter: *The nearest polynomial with a given* ... *SIGSAM Bulletin* **33** (1999), pp. 2-4.
- [Ste99B] H.J.Stetter: in *Computer Algebra in Scientific Computing*. Springer (1999), pp. 409-430.
- [Tra02] C.Traverso: *Syzygies, and stabili* ... *Proc. LMCS 2002*, RISC-Linz (Austria), pp. 244-255.
- [Tre99] L.N.Trefethen: *Computation of pseudospectra*. *Acta Numerica* **8** (1999), pp. 247-295.
- [TT94] K-C.Toh and L.N.Trefethen: *Pseudozeros of* ... *Numer. Math.* **68** (1994), pp. 403-425.
- [ZW98] L.Zhi and W.Wu: *Nearest singular polynomials*. *J. Symb. Comp.* **26** (1998), pp. 667-676.