数理解析研究所講究録 1395 巻 2004 年 97-103

再帰的な部分終結式と 1 変数代数方程式の実根の個数の計算

照井 章 *

Akira Terui

筑波大学 数学系

Institute of Mathematics, University of Tsukuba

1 はじめに

本稿では, 1 変数多項式の部分終結式の拡張の一つである “再帰的な部分終結式” を構成し, 再帰的な部分終結式の応用として, 1 変数代数方程式の実根の個数を重複度も含めて計算することを考える.

多項式剰余列 (PRS) は数式処理における基本的な道具の一つである. 多項式剰余列の算法として知られている Euclid の互除法 [9] は単純であるが, 係数膨張が計算効率上の問題となる. この問題の解決策として, 係数膨張の仕組みが詳しく調べられ, 部分終結式の理論が発展してきた (Brown and Traub [3], Collins [4], Loos [10] 等を参照). 部分終結式の理論を用いることにより, 多項式剰余列の要素に現われる余分な因子を系統的に取り除き, 係数膨張を抑制することが可能になる.

本稿では, 部分終結式の 1 つの拡張を考える. 与えられた 2 つの多項式が自明でない GCD をもつ場合にそれらの多項式剰余列を計算すると, 剰余列の最後の要素にその GCD が現われ, 通常はそこで計算を終了する. ところが, GCD とその 1 階微分から計算される新たな多項式剰余列が有用な場合がある. たとえば, 1 変数代数方程式の実根の個数を多重度も含めて計算する場合には, このようにして計算される多項式剰余列が必要になる. 本稿では, このような多項式剰余列を “再帰的な多項式剰余列” と呼ぶ.

部分終結式についてはこれまでに多くの研究がなされているが, 再帰的な多項式剰余列に対する同様の理論は, 筆者の知る限り見当たらない. 本稿では主にこの点について議論する. 本稿では “再帰的な部分終結式” を構成することにより, 再帰的な多項式剰余列の要素多項式の係数を与多項式の係数を要素とする行列式で表す.

本稿では, 再帰的な多項式剰余列の応用として, 浮動小数係数の 1 変数代数方程式の実根の個数を多重度も含めて計算することを考える. Sturm の定理 [17] は 1 変数代数方程式の実根の個数の計算に用いられるが, 再帰的な多項式剰余列と同様に計算される Sturm 列を “再帰的な Sturm 列” と呼び, これを用いて実根の個数を多重度も含めて計算することが考えられる. しかし, 与多項式が重根や近接根をもつ場合には, 多項式剰余列 (Sturm 列) の要素多項式の係数に大きな誤差が生ずる. そこで, 再帰的な Sturm 列の要素の零判定を, 再帰的な部分終結式を表す行列の特異性を数値算法を用いて判定することにより行う.

本稿では以下の内容を述べる. 第 2 章では再帰的な多項式剰余列を導入する. 第 3 章では再帰的な部分終結式を定義し, 再帰的な多項式剰余列との関係について述べる. 第 4 章では再帰的な Sturm 列を用いることにより, 浮動小数係数の 1 変数代数方程式の実根の個数を多重度も含めて計算する算法について考察する.

*terui@math.tsukuba.ac.jp

2 再帰的な多項式剰余列

以下では R を整域とし, F と G を $R[x]$ の 1 変数多項式とする. 多項式剰余列は以下のように定義される.

定義 1 (多項式剰余列 (PRS))
F と G を $R[x]$ の 1 変数多項式とし, 次数をそれぞれ m, n (ただし $m > n$) とする. このとき,

$$\begin{gathered} P_1 = F, \quad P_2 = G, \quad \alpha_i P_{i-2} = q_{i-1}P_{i-1} + \beta_i P_i \quad (i = 3, \ldots, l), \\ \alpha_i, \beta_i \in R, \quad \deg(P_{i-1}) > \deg(P_i) \end{gathered} \tag{1}$$

によって与えられる多項式の列 $(P_1, \ldots, P_l)$ を F と G の**多項式剰余列** *(PRS)* といい, $\mathrm{prs}(F,G)$ で表す. このとき, 列 $((\alpha_3, \beta_3), \ldots, (\alpha_l, \beta_l))$ を $\mathrm{prs}(F,G)$ の *division rule* という (von zur Gathen and Lücking [16] を参照). P_l が定数のとき, $\mathrm{prs}(F,G)$ は**完全** *(complete)* であるという (Knuth [9] を参照). ∎

F と G が互いに素ならば, 完全な多項式剰余列の最後の要素は定数になり, そうでない場合は F と G の最大公約式 (GCD) の定数倍に等しい, すなわち, ある $\gamma \in R$ に対し $P_l = \gamma \cdot \gcd(F, G)$ をみたす. このとき, P_l と $\frac{d}{dx}P_l$ から新しい完全な多項式剰余列を生成することを考える. そして, この完全な多項式剰余列 $\mathrm{prs}(P_l, \frac{d}{dx}P_l)$ が定数でない多項式を最後の要素にもつ場合は, 最後の要素とその 1 階微分から, 前と同様にさらなる新しい剰余列を生成することができる. このような計算を繰り返すことにより, 完全な多項式剰余列を次々と "再帰的に" 生成し, 最後の要素が定数になるまで繰り返し剰余列を計算することが考えられる. そこで, このようにして計算される "再帰的な多項式剰余列" を以下のように定義する.

定義 2 (再帰的な多項式剰余列)
F と G を定義 1 で定義される多項式とする. このとき,

$$\begin{aligned} & P_1^{(1)} = F, \quad P_2^{(1)} = G, \quad P_{l_1}^{(1)} = \gamma_1 \cdot \gcd(P_1^{(1)}, P_2^{(1)}), \quad \gamma_1 \in R, \\ & (P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \ldots, P_{l_1}^{(1)}) = \mathrm{prs}(P_1^{(1)}, P_2^{(1)}), \\ & P_1^{(k)} = P_{l_{k-1}}^{(k-1)}, \quad P_2^{(k)} = \frac{d}{dx}P_{l_{k-1}}^{(k-1)}, \quad P_{l_k}^{(k)} = \gamma_k \cdot \gcd(P_1^{(k)}, P_2^{(k)}), \quad \gamma_k \in R, \\ & (P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, \ldots, P_{l_k}^{(k)}) = \mathrm{prs}(P_1^{(k)}, P_2^{(k)}), \quad k = 2, \ldots, t \end{aligned} \tag{2}$$

によって与えられる多項式の列 $(P_1^{(1)}, \ldots, P_{l_1}^{(1)}, P_1^{(2)}, \ldots, P_{l_2}^{(2)}, \ldots, P_1^{(t)}, \ldots, P_{l_t}^{(t)})$ を F と G の**再帰的な多項式剰余列** *(recursive PRS)* といい, $\mathrm{rprs}(F,G)$ で表す. このとき, 列 $((\alpha_3^{(1)}, \beta_3^{(1)}), \ldots, (\alpha_{l_t}^{(t)}, \beta_{l_t}^{(t)}))$ を $\mathrm{rprs}(F,G)$ の *division rule* という. $P_{l_t}^{(t)}$ が定数のとき, $\mathrm{rprs}(F,G)$ は完全 *(complete)* であるという. ∎

3 再帰的な多項式剰余列の部分終結式

F と G をそれぞれ次式で与えられる $R[x]$ の多項式とする.

$$F(x) = f_m x^m + \cdots + f_0 x^0, \quad G(x) = g_n x^n + \cdots + g_0 x^0, \quad m \geq n > 0. \tag{3}$$

本章では, 再帰的な多項式剰余列に対して部分終結式を定義し, その性質 (部分終結式の基本定理に相当するもの) を述べる (通常の多項式剰余列に対する部分終結式の理論については von zur Gathen and Lücking [16] 等を参照).

定義 3 (再帰的な部分終結式行列)
F と G を式 (3) で定義される多項式とし, $(P_1^{(1)}, \ldots, P_{l_1}^{(1)}, \ldots, P_1^{(t)}, \ldots, P_{l_t}^{(t)})$ を F と G の完全な再帰的多項式剰余列 (cf. 定義 2) とする. $k = 1, \ldots, t$ および $i = 1, \ldots, l_k$ に対し, $n_i^{(k)} = \deg(P_i^{(k)})$, $j_0 = m$, $j_k = n_l^{(k)}$

とおく．このとき，数の組 (k,j) （ただし $k=1,\ldots,t$, $j=j_{k-1}-2,\ldots,0$） に対し，行列 $M^{(k,j)}(F,G)$ を以下のように再帰的に定義する．

1. $k=1$ に対し，$M^{(1,j)}(F,G)=N^{(j)}(F,G)$ とおく．ここに，$N^{(j)}(F,G)$ は F と G の Sylvester 行列

$$\mathrm{Syl}(F,G)=\begin{array}{c}\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{n\text{ 列}}\;\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{m\text{ 列}}\\ \begin{pmatrix} f_m & & & g_n & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ f_0 & & f_m & g_0 & & g_n \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & f_0 & & & g_0 \end{pmatrix}\end{array} \tag{4}$$

から，F の係数からなる第 1 列,…, 第 $n-j$ 列および G の係数からなる第 $n+1$ 列,…, 第 $m+n-j$ 列を取り出した小行列である．

2. $k>1$ に対し，$M^{(k,j)}(F,G)$ を以下の上ブロックと下ブロックからなる行列として定義する．
   (a) $M^{(k-1,j_{k-1})}(F,G)$ の下 $j_{k-1}+1$ を取り除いた小行列を $M_U^{(k-1,j_{k-1})}$ とおく．このとき，$M_U^{(k-1,j_{k-1})}$ を左上部から対角線状に $(j_{k-1}-j_k-1)$ 個並べたブロックを上ブロックとする．
   (b) $M^{(k-1,j_{k-1})}(F,G)$ の下 $j_{k-1}+1$ の小行列を $M_L^{(k-1,j_{k-1})}$ とおき，$M_L^{(k-1,j_{k-1})}$ の第 $j_{k-1}+1-\tau$ 行 $(\tau=j_{k-1},\ldots,1)$ を τ 倍し，最下行を除いた小行列を $M_L^{\prime(k-1,j_{k-1})}$ とおく．このとき，$j_{k-1}-j-1$ 個の $M_L^{(k-1,j_{k-1})}$ を最左部のブロックから 1 行ずつ右下がりになるように並べ，ついで $j_{k-1}-j$ 個の $M_L^{\prime(k-1,j_{k-1})}$ を，最左部のブロックの第 1 行を $M_L^{(k-1,j_{k-1})}$ の最左部のブロックの第 1 行に合わせ，以下 1 行ずつ右下がりになるように並べたものを下ブロックとする．

このとき，$M^{(k,j)}(F,G)$ を F と G の (k,j) 次の再帰的な部分終結式行列と呼ぶ．∎

定義 4 (再帰的な部分終結式)
F と G を式 (3) で定める．$(P_1^{(1)},\ldots,P_{l_1}^{(1)},\ldots,P_1^{(t)},\ldots,P_{l_t}^{(t)})$ を F と G の完全な再帰的多項式剰余列とし．$j_0=m$, $j_k=n_l^{(k)}$ $(k=1,\ldots,t)$ とおく．$j=j_{k-1}-2,\ldots,0$ および $\tau=j,\ldots,0$ に対し，$M^{(k,j)}(F,G)$ の上部 $(m+n-2j_1)\{\prod_{l=2}^{k-1}(2j_{l-1}-2j_l-1)\}(2j_{k-1}-2j-1)-1$ 行と第 $(m+n-2j_1)\{\prod_{l=2}^{k-1}(2j_{l-1}-2j_l-1)\}(2j_{k-1}-2j-1)+j-\tau$ 行からなる小行列を $M_\tau^{(k,j)}=M_\tau^{(k,j)}(F,G)$ とおく（$M_\tau^{(k,j)}$ は正方行列であることに注意）．このとき，多項式

$$\bar{\mathrm{S}}_{k,j}(F,G)=\det(M_j^{(k,j)})x^j+\cdots+\det(M_0^{(k,j)})x^0 \tag{5}$$

を F と G の (k,j) 次の再帰的な部分終結式と呼ぶ．∎

再帰的な多項式剰余列は再帰的な部分終結式に定数倍を除いて等しいことが，次の定理により示される（証明は Terui [14] を参照）．

定理 5
定義 4 と同様の完全な再帰的多項式剰余列を考える．$k=1,\ldots,t$ および $i=1,\ldots,l_k$ に対し，$c_i^{(k)}=\mathrm{lc}(P_i^{(k)})$ とおき，$k=1,\ldots,t$ および $i=1,\ldots,l_k-1$ に対し，$d_i^{(k)}=n_i^{(k)}-n_{i+1}^{(k)}$ とおく．さらに，$k=1,\ldots,t-1$ お

および $j = j_{k-1} - 2, \ldots, 0$ に対し,

$$u_{k,j} = (m+n-2j_1)\left\{\prod_{l=2}^{k-1}(2j_{l-1}-2j_l-1)\right\}(2j_{k-1}-2j-1), \quad u_k = u_{k,j_k},$$
$$B_k = (c_{l_k}^{(k)})^{d_{l_k-1}^{(k)}-1}\prod_{l=3}^{l_k}\left\{\left(\frac{\beta_l^{(k)}}{\alpha_l^{(k)}}\right)^{n_{l-1}^{(k)}-n_{l_k}^{(k)}}(c_{l-1}^{(k)})^{(d_{l-2}^{(k)}+d_{l-1}^{(k)})}(-1)^{(n_{l-2}^{(k)}-n_{l_k}^{(k)})(n_{l-1}^{(k)}-n_{l_k}^{(k)})}\right\} \tag{6}$$

とおき, $k = 2, \ldots, t$ および $j = j_{k-1} - 2, \ldots, 0$ に対し,

$$b_{k,j} = 2j_{k-1} - 2j - 1, \quad b_k = b_{k,j_k}, \quad r_{k,j} = (-1)^{(u_{k-1}-1)(1+2+\cdots+(b_{k,j}-1))}, \quad r_k = r_{k,j_k} \tag{7}$$

とおく.

$$R_{1,j} = 1, \quad R_{k,j} = ((\cdots((B_1^{b_2}\cdot r_2B_2)^{b_3}\cdot r_3B_3)^{b_4}\cdots)^{b_{k-1}}\cdot r_{k-1}B_{k-1})^{b_{k,j}}\cdot r_{k,j} \quad (k>1) \tag{8}$$

とする. このとき,

$$\bar{\mathrm{S}}_{k,j}(F,G) = 0 \quad \mathit{for}\ 0 \le j < n_{l_k}^{(k)}, \tag{9}$$

$$\bar{\mathrm{S}}_{k,n_i^{(k)}}(F,G) = P_i^{(k)}(c_i^{(k)})^{d_{i-1}^{(k)}-1}R_{k,n_i^{(k)}} \times\prod_{l=3}^{i}\left\{\left(\frac{\beta_l^{(k)}}{\alpha_l^{(k)}}\right)^{n_{l-1}^{(k)}-n_i^{(k)}}(c_{l-1}^{(k)})^{(d_{l-2}^{(k)}+d_{l-1}^{(k)})}(-1)^{(n_{l-2}^{(k)}-n_i^{(k)})(n_{l-1}^{(k)}-n_i^{(k)})}\right\}, \tag{10}$$

$$\bar{\mathrm{S}}_{k,j}(F,G) = 0 \quad \mathit{for}\ n_i^{(k)} < j < n_{i-1}^{(k)} - 1, \tag{11}$$

$$\bar{\mathrm{S}}_{k,n_{i-1}^{(k)}-1}(F,G) = P_i^{(k)}(c_{i-1}^{(k)})^{1-d_{i-1}^{(k)}}R_{k,n_{i-1}^{(k)}-1} \times\prod_{l=3}^{i}\left\{\left(\frac{\beta_l^{(k)}}{\alpha_l^{(k)}}\right)^{n_{l-1}^{(k)}-n_{i-1}^{(k)}+1}(c_{l-1}^{(k)})^{(d_{l-2}^{(k)}+d_{l-1}^{(k)})}(-1)^{(n_{l-2}^{(k)}-n_{i-1}^{(k)}+1)(n_{l-1}^{(k)}-n_{i-1}^{(k)}+1)}\right\}. \tag{12}$$

が成り立つ. ∎

4 浮動小数係数をもつ1変数代数方程式の実根の個数の計算

本章では, 与えられた実係数1変数多項式

$$F(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0x^0 \tag{13}$$

の係数 $a_n, \ldots, a_0$ が浮動小数で与えられたときに, 方程式 $F(x) = 0$ の実根の個数を多重度も含めて計算することを考える.

4.1 再帰的な Sturm 列の零判定問題

1変数代数方程式の実根の個数の計算としては, Sturm の定理 [17] による方法がよく知られている. この方法では, 多項式剰余列の一つである Sturm 列を用いる.

本稿では, 多重度も含めた実根の個数を計算する. そこで, Sturm 列の計算と同様に, division rule を $(\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}) = (1, -1)$ として, $F(x)$ と $\frac{d}{dx}F(x)$ の完全な再帰的多項式剰余列を計算する. 以下ではこれを

“$F(x)$ の再帰的な Sturm 列” と呼ぶ. $F(x)=F_1(x)^1F_2(x)^2\cdots F_t(x)^t$ (ただし, 異なる i と j に対し, $F_i(x)$ と $F_j(x)$ は互いに素) と表されるとき, $F(x)$ の再帰的な Sturm 列が次式のように表されるとする.

$$
\begin{aligned}
L_1 &= (P_1^{(1)}=F, P_2^{(1)}=\frac{d}{dx}F,\ldots,P_{l_1}^{(1)}=\gcd(P_1^{(1)},P_2^{(1)})),\\
L_2 &= (P_1^{(2)}=P_{l_1}^{(1)}, P_2^{(2)}=\frac{d}{dx}P_{l_1}^{(1)},\ldots,P_{l_2}^{(2)}=\gcd(P_1^{(2)},P_2^{(2)})),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
L_t &= (P_1^{(t)}=P_{l_{t-1}}^{(t-1)}, P_2^{(t)}=\frac{d}{dx}P_{l_{t-1}}^{(t-1)},\ldots,P_{l_t}^{(t)}=(\text{const.})).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

このとき, 各剰余列 L_j $(j=1,\ldots,t)$ に Sturm の定理を適用させることにより, $F(x)$ の因子 $F_j\cdots F_t$ の実根の個数が計算される. そして, これらの実根の個数の和をとることにより, $F(x)$ の実根の個数が多重度も含めて求まる [2].

ここで, 1 変数多項式に対して適当なノルム $\|.\|$ を導入する. $F(x)$ の係数が整数や有理数で与えられ, 係数演算を厳密に行う状況の下では, $F(x)$ の実根の個数は単純に再帰的な Sturm 列から計算される. しかし, 浮動小数で与えられた係数に対して浮動小数演算で再帰的な Sturm 列を計算しようとすると, $F(x)$ の再帰的な Sturm 列の要素を $P_i^{(k)}$ に対し, 浮動小数演算によって生ずる係数の誤差により, 次の零判定問題が生じることがある.

1. **要素の零判定:** $\|P_i^{(k)}\|\ll 1$ のとき, $P_i^{(k)}$ は 0 か?
2. **微小主係数の零判定:** $|\mathrm{lc}(P_i^{(k)})|\ll 1$ のとき, $|\mathrm{lc}(P_i^{(k)})|$ は 0 か?

本稿では問題 1. を考察する (問題 2. は Terui and Sasaki [15] を参照). $F(x)$ が重根や近接根をもつ場合には多項式剰余列の係数の精度低下が著しく [13], 再帰的な Sturm 列を計算する上で大きな問題になる.

再帰的な Sturm 列の計算において $\|P_i^{(k)}\|\ll 1$ が生ずるのは $P_i^{(k)}$ が $\gcd(P_1^{(k)},P_2^{(k)})$ に近い場合であると考えられる. そこで $P_i^{(k)}$ の零判定の方法の一つとして, 1 変数多項式の近似 GCD (Corless et al. [5], Emiris et al. [6], Sasaki and Noda [12] 等) を用いた方法が考えられる. 一方, $P_i^{(k)}=\gcd(P_1^{(k)},P_2^{(k)})$, $j=\deg(P_i^{(k)})$ のときは, $F(x)$ と $\frac{dF}{dx}$ の $(k,j-1)$ 次の再帰的な部分終結式が 0 になり, $(k,j-1)$ 次の再帰的な部分終結式行列のランクが落ちるので, 本稿では, 数値計算を用いて再帰的な部分終結式行列のランク落ちを判定することにより, $P_i^{(k)}$ の零判定を行うことを考える.

再帰的な部分終結式行列のランク落ちの判定には部分終結式行列の特異値 (Golub and Van Loan [7] 等を参照) を用いる. $P_i^{(k)}$ に対応する再帰的な部分終結式行列 $M_j^{(k)}(F,\frac{d}{dx}F)$ を特異値分解して特異値を計算し, 最小特異値が 0 に等しければ $P_i^{(k)}=0$ と判定できる. (1 変数近似 GCD の次数判定おいて, 上記と同様に部分終結式行列等の特異値を用いる方法については Corless et al. [5], Emiris et al. [6], Rupprecht [11] 等を参照.)

4.2 計算例

本稿では, $F(x)$ と $\frac{d}{dx}F(x)$ の再帰的な部分終結式行列の特異値を下記の各次数において計算機上で計算し, ランク落ちの見積もりを行った. 計算には CPU に Pentium III 1GHz, OS に Linux 2.4.18 を用いた. 実装には C++ (GCC 2.95.3) を用いた. 特異値分解には LAPACK (CLAPACK) 3.0 [1] を用いた. 演算は倍精度浮動小数演算で行った.

再帰的な部分終結式の零判定の例として

$$F(x)=\{(x-0.3)(x+0.4)\}\{(x-0.5)(x+0.6)\}^2\{(x-0.7)(x+0.8)\}^3\{(x-0.9)(x+1)\}^4 \tag{15}$$

次数 (k,j)	最小特異値
$(1,12)$	5.94437×10^{-6}
$(1,11)$	1.98301×10^{-15}
$(2,6)$	1.43746×10^{-10}
$(2,5)$	2.00921×10^{-15}
$(3,2)$	8.21743×10^{-14}
$(3,1)$	1.63332×10^{-15}
$(4,0)$	2.26162×10^{-15}

表 1: $F(x)$ と $\frac{d}{dx}F(x)$ の再帰的な部分終結式行列 $M_j^{(k)}(F, \frac{d}{dx}F)$ の最小特異値.

階数と次数 (k,j)	最小特異値
$(1,12)$	5.94437×10^{-6}
$(1,11)$	1.98301×10^{-15}
$(2,6)$	1.43746×10^{-10}
$(2,5)$	2.00921×10^{-15}
$(3,2)$	8.21743×10^{-14}
$(3,1)$	1.63332×10^{-15}
$(4,0)$	2.26162×10^{-15}

表 2: $F(x)$ と $F^{(k)}(x)$ の部分終結式行列 $N^{(j)}(F, F^{(k)})$ の最小特異値.

で定義される多項式 $F(x)$ を用いた. $F(x)$ と $\frac{d}{dx}F(x)$ の再帰的な部分終結式はそれぞれ $(1,11)$ 次, $(2,5)$ 次, $(3,1)$ 次において 0 になるので, 各次数において再帰的な部分終結式行列のランクも落ちると考えられる.

本稿では, $F(x)$ と $\frac{d}{dx}F(x)$ の再帰的な部分終結式行列の特異値を上の各次数において計算し, ランク落ちの見積もりを行った. 計算結果を表 1 に示す. 再帰的な部分終結式行列の次数がそれぞれ $(1,11)$ 次, $(2,5)$ 次, $(3,1)$ 次において, 最小特異値が計算機イプシロンに近い値になっており, 再帰的な部分終結式行列のランクが落ちていることがうかがえる. 一方, 再帰的な部分終結式行列の次数がそれぞれ $(1,12)$ 次, $(2,6)$ 次, $(3,2)$ 次, $(4,0)$ 次においては, 再帰的な部分終結式は 0 にならないため, 最小特異値も 0 にならないと予想されたが, 計算結果を見ると, $(2,6)$ 次, $(3,2)$ 次, $(4,0)$ 次の最小特異値は微小になっており, 特に $(3,2)$ 次, $(4,0)$ 次では $(3,1)$ 次の結果と区別するのが困難である.

本計算の比較として, $F(x)$ とその k 階微分 $F^{(k)}(x)$ の (通常の) 部分終結式行列の最小特異値も求めた. 計算結果を表 2 に示す. (部分終結式行列 $N^{(j)}(F, F^{(k)})$ の特異性はほぼ $M_j^{(k)}(F, \frac{d}{dx}F)$ の特異性に対応しているが, $F(x)$ の零点の分布によっては, $F(x)$ が無平方であるにもかかわらず, ある $k > 1$ に対して $N^{(j)}(F, F^{(k)})$ が特異になる場合があるので注意が必要である [8, Example 3].) この場合も, 階数 k が大きくなるほど, 非特異な部分終結式行列 (表 2 の $(1,12)$, $(2,6)$, $(3,2)$, $(4,0)$ の場合) の最小特異値の大きさが特異な部分終結式行列 (表 2 の $(1,11)$, $(2,5)$, $(3,1)$ の場合) の最小特異値とほぼ等しくなり, 最小特異値から行列のランク落ちを判定するのは容易ではないと思われる.

計算時間は, 表 1 の計算に要した時間が約 8144 秒, 表 2 の計算に要した時間が約 0.02 秒であった. 表 1 で最後に最小特異値を計算した $M_0^{(4)}(F, \frac{d}{dx}F)$ の次数は 3465 次であるのに対し, 表 2 で最後に最小特異値を計算した $N^{(0)}(F, F^{(4)})$ の次数が 36 次である. 特異値分解の計算量は一般に行列の次数 n に対して $O(n^3)$ で与えられる [7] が, 今回の計算時間は理論的見積もりに近いものであると考えられる.

5 まとめ

本稿では, 1 変数多項式の再帰的な多項式剰余列に対して再帰的な部分終結式を定義し, 再帰的な多項式剰余列の要素の係数が, 与多項式の係数を要素とする適当な行列式の定数倍で表されることを示した.

次に, 再帰的な部分終結式の応用として, 浮動小数係数をもつ 1 変数代数方程式の実根の個数の計算を取り上げた. 本稿では, 再帰的な Sturm 列の要素の零判定として, 再帰的な部分終結式行列のランク落ちを特異値分解を用いて判定する方法を提案した. 計算例より, 再帰的な多項式剰余列の段数 k が大きくなる場合は, 演算精度を倍精度より大きくとることが必要であると考えられる. また, k が大きくなると, 再帰的な部分終結式行列を単純に特異値分解するのは効率的でなく, 計算に何らかの工夫が必要であると考えられる.

参 考 文 献

[1] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen. *LAPACK Users' Guide.* SIAM, Philadelphia, Third edition, 1999.

[2] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy. *Real algebraic geometry*, Vol. 36 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the 1987 French original, Revised by the authors.

[3] W. S. Brown and J. F. Traub. On Euclid's Algorithm and the Theory of Subresultants. *J. ACM*, Vol. 18, No. 4, pp. 505–514, 1971.

[4] G. E. Collins. Subresultants and Reduced Polynomial Remainder Sequences. *J. ACM*, Vol. 14, No. 1, pp. 128–142, 1967.

[5] R. M. Corless, P. M. Gianni, B. M. Trager, and S. M. Watt. The singular value decomposition for polynomial systems. In *Proc. ISSAC 1995*, pp. 195–207. ACM, 1995.

[6] I. Z. Emiris, A. Galligo, and H. Lombardi. Certified approximate univariate GCDs. *J. Pure Appl. Algebra*, Vol. 117/118, pp. 229–251, 1997. Algorithms for algebra (Eindhoven, 1996).

[7] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations.* The Johns Hopkins University Press, Third edition, 1996.

[8] N. Karcanias and M. Mitrouli. Normal factorisation of polynomials and computational issues. *Comput. Math. Appl.*, Vol. 45, pp. 229–245, 2003.

[9] D. Knuth. *The Art of Computer Programming*, Vol. 2: Seminumerical Algorithms. Addison-Wesley, Third edition, 1998.

[10] R. Loos. Generalized polynomial remainder sequences. In B. Buchberger, G. E. Collins, and R. Loos, editors, *Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation*, pp. 115–137. Springer-Verlag, Second edition, 1983.

[11] D. Rupprecht. An algorithm for computing certified approximate GCD of n univariate polynomials. *J. Pure and Applied Algebra*, Vol. 139, pp. 255–284, 1999.

[12] T. Sasaki and M-T. Noda. Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations. *J. Inform. Process.*, Vol. 12, No. 2, pp. 159–168, 1989.

[13] T. Sasaki and M. Sasaki. Analysis of accuracy decreasing in polynomial remainder sequence with floating-point number coefficients. *J. Inform. Process.*, Vol. 12, No. 4, pp. 394–403 (1990), 1989.

[14] A. Terui. Subresultants in recursive polynomial remainder sequence. In V.G. Ganzha, E.W. Mayr, and E.V. Vorozhtsov, editors, *Proc. Computer Algebra in Scientific Computing: CASC 2003*, pp. 363–375, München, 2003. Institute für Informatik, Technische Universität München.

[15] A. Terui and T. Sasaki. "Approximate zero-points" of real univariate polynomial with large error terms. 情報処理学会論文誌, Vol. 41, No. 4, pp. 974–989, April 2000.

[16] J. von zur Gathen and T. Lücking. Subresultants revisited. *Theoret. Comput. Sci.*, Vol. 297, No. 1-3, pp. 199–239, 2003. Latin American theoretical informatics (Punta del Este, 2000).

[17] 高木貞治. 代数学講義（改訂新版）. 共立出版, 東京, 1965.