数理解析研究所講究録 1395 巻 2004 年 178-184

ハミルトン系の標準化逆問題と数式処理

上野 嘉夫
UWANO, YOSHIO *
京都大学大学院情報学研究科
GRADUATE SCHOOL OF INFORMATICS †

1 はじめに

本稿では，ハミルトン力学系の Birkhoff-Gustavson 標準化逆問題に対する数式処理の応用について報告する．本稿でとりあげる問題は，数式処理およびその周辺の研究に携わる方々にとっては単なる応用問題に過ぎないかもしれないし，結果の最終的な証明は数式処理には依っていない．しかし，本稿で述べる諸結果は数式処理なしでは気が付かない種類のものという点から，数式処理のパワーユーザーでもない筆者が敢えて報告する次第である[1)]．数式処理の素朴なアプリケーションであっても，それ無しでは見通しを得ることが極めて難しい問題の一例としてお読みいただければ幸いである．

まず，Birkhoff-Gustavson (BG) 標準化を超特急で概観しよう．本稿では，最も単純な枠組みを提示するに留めたいと思う．$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ を相空間とする非線形ハミルトン系で，原点を半単純安定平衡点に持つものを考える．平衡点 (原点) における線形化方程式の角周波数は 1:1 共鳴であると仮定する．このとき，系の時間発展を規定する方程式は，$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ の適当な正準共役なデカルト座標 (q,p) と，原点近傍において

$$K(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(p_j^2 + q_j^2) + \sum_{k=3}^{\infty} K_k(q,p) \tag{1}$$

なる級数展開をもつ C^∞ 級関数 $K(q,p)$ [2)]によって与えられる 1 階 ODE,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p} \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q}, \tag{2}$$

の形をとる．(2) はハミルトン方程式[3)]，$H(q,p)$ はハミルトニアンと呼ばれる．

注意 1 ここで提示している枠組みはあくまでハミルトン系の局所的な記述であって，大域的には symplectic 幾何の枠組みが必要である．BG 標準化は局所理論であるから上記の局所的な枠組みで十分である．本稿前半では級数への言及がしばしば現れるが，その収束性は必ずしも保証されない [1]．応用上は級数を有限次数で打ち切ることがほとんどなので，収束性が深刻に影響する事例は少ない．

$K(q,p)$ をハミルトニアンとするハミルトン系の原点（1:1 共鳴半単純安定平衡点）まわりでの Birkhoff-Gustavson(BG) 標準化とは，原点を固定するような (局所) 正準変換によって $K(q,p)$ を次の (i), (ii) を満たす級数に移す操作をいう：

---

*科研費基盤 C(2) No. 13660065 「保存力学系における標準形近似理論の逆問題とその応用」(代表者: 上野嘉夫).
†uwano@amp.i.kyoto-u.ac.jp
1)発表機会を与えていただいた代表者の野呂正行先生（神戸大学）に感謝します.
2)斉 2 次項の形は，原点が半単純安定平衡点で線形化角周波数が 1:1 共鳴という仮定に依る.
3)(2) の形式のハミルトン方程式を正準方程式という.

(i) 変換後の級数は2次から始まり，斉2次項は$K(q,p)$（級数形(1)）の斉2次項に新変数を形式的に代入したものに等しい.

(ii) 変換後の級数の斉s次項は$(3 <\leq \exists\rho)$，(i)で言及した斉2次項とPoisson可換である.

(i)，(ii)を満たす級数は，「ρ次までBirkhoff-Gustavson(BG)標準形である」と言われる.

BG標準化がどのように利用されるかを概説しよう. $K(q,p)$に対するBG標準形級数を有限次で打ち切った多項式をハミルトニアンに持つハミルトン系を考え，「打ち切りハミルトン系」[4]と呼ぼう．もとの系の原点（平衡点）近傍では条件周期的運動が支配的であり，それらの軌道(族)のなすトーラスの入れ子構造が顕著である．この入れ子構造は「打ち切りハミルトン系」の原点（平衡点）近傍の入れ子構造に非常に似ることが知られている.「打ち切りハミルトン系」は，(i)-(ii)[5]により可積分なので，「打ち切り系」という可積分系によってもとの系の正則領域を近似できるといえる．例えば，もとの系の原点近傍で周期軌道分岐が生じる場合，「打ち切りハミルトン系」はその分岐をよく再現することが知られている[6]

このように，もとの非線形ハミルトン系とそのBG標準化から得られる「打ち切りハミルトン系」とが，ある意味で「よく似ている」のであるから，「打ち切りハミルトン系」自身が面白い特徴を持つならば，もとの系の正則領域にも同様の特徴を期待するのは自然であろう．したがって，指定されたBG標準形に標準化されるハミルトニアンの族の同定は重要な問題と考えられる．筆者は，今述べた同定問題を「BG標準化の逆問題」として提案・定式化を行い，その解法を与え，さらに数式処理プログラム上に実装し具体的な問題を解いた[3,4,5]. 逆問題を思い付いた動機は，4次BG標準形ハミルトニアンを持つ系における周期軌道分岐に関する古典量子対応について筆者が得てきた一連の結果[6]の応用である.

以下ではBG標準化の逆問題の対象として斉3次多項式ポテンシャルを印加した2次元摂動調和振動子(3-PHO)を取りあげて[7]，数式処理の応用と，そこから得られる[8]諸結果について報告する.

2 Birkhoff-Gustavson標準化の順問題と逆問題

2.1 BG標準化(順問題)

斉3次多項式ポテンシャルを印加した摂動調和振動子(3-PHO)に対する<u>4次までの</u>BG標準化(順問題)を説明する．より一般的な枠組みでのBG標準化については[1]が，逆問題も含めて[5,7]が参考になると思う.

BG標準化したいハミルトニアン$K(q,p)$として3-PHOハミルトニアンをとる．すなわち，

$$K(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(p_j^2 + q_j^2) + (f_1 q_1^3 + f_2 q_1^2 q_2 + f_3 q_1 q_2^2 + f_4 q_2^3) \tag{1'}$$

ととる．ただし，$f_h (h = 1, \cdots, 4)$は実数値パラメータである．2型母関数[9]

$$W(q,\eta) = \sum_{j=1}^{2} q_j \eta_j + \sum_{k=3}^{4} W_k(q,\eta) \tag{3}$$

で生成される原点近傍での（局所）正準変換

$$(q,p) \to (\xi,\eta) \quad \text{with} \quad p = \frac{\partial W}{\partial q},\ \xi = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \tag{4}$$

[4]The 'truncate' Hamiltonian system と呼ばれる[2].
[5]ρ次以下で打ち切るとき.
[6]この辺りの精密な結果の例として，[2]が挙げられる.
[7]非線形ハミルトン系の典型例として頻繁に取り上げられるHénon-Heiles系はこのクラスに属する.
[8]「発見された」という方が相応しい気もする.
[9]旧位置変数(q)の新運動量変数(η)の関数形をとる.

を考え，変換 (4) によって $K(q,p)$ から

$$G(\frac{\partial W}{\partial \eta}, \eta) = K(q, \frac{\partial W}{\partial q}) \qquad \underline{\text{(up to degree-4)}} \tag{5}$$

で定まる (ξ,η) の 4 次多項式

$$G(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(\eta_j^2 + \xi_j^2) + \sum_{k=3}^{4} G_k(\xi,\eta) \tag{6}$$

を考えよう[10]．ただし，$W_k(q,\eta)$ や $G_k(\xi,\eta)$ は，$W(q,\eta)$ や $G(\xi,\eta)$ の斉 k 次部分 $(k=3,4)$ を表す．

定義 2.1 $K(q,p)$ から (5) より定まる 4 次多項式 $G(\xi,\eta)$ が 4 次まで BG 標準形であるとは，Poisson 交換関係式

$$\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(\eta_j^2 + \xi_j^2), G_k\right\}_{\xi,\eta} = 0 \qquad (k=3,4) \tag{7}$$

が成立するときをいう．ただし，$\{\cdot,\cdot\}_{\xi,\eta}$ は正準変数 (ξ,η) に関する標準 Poisson 括弧式である．■

定義 2.2 (4 次までの BG 標準化) (1') で与えられる 3-PHO ハミルトニアン $K(q,p)$ を，(5) と (7) を満たす BG 標準形 4 次多項式 $G(\xi,\eta)$((6) 参照) に変換せよ．ただし，(3) で与えられる 2 型母関数 $W(q,\eta)$ は

$$W_k(q,\eta) \in \mathrm{image}\, D_{q,\eta} \quad (k=3,4), \qquad D_{q,\eta} = \sum_{j=1}^{2}\left(q_j\frac{\partial}{\partial \eta_j} - \eta_j\frac{\partial}{\partial q_j}\right). \tag{8}$$

を満たすようにとる[11]．■

注意 2 一般の枠組みでは，(1) で与えられる $K(q,p)$ に対して，$W(q,\eta)$ や $G(\xi,\eta)$ も級数形とし，ρ 次まで BG 標準化したい場合には (5) の等号を 'up to degree-ρ' で，(7) と (8) を $k=3,\cdots,\rho$ まで考える．なお，ρ を formal に ∞ まで持っていくことも可能である (注意 1 参照)．

2.2 BG 標準化逆問題

BG 標準化逆問題では，指定された BG 標準形級数 (ないしは多項式)$G(\xi,\eta)$ に BG 標準化される (1) の形の級数 (ないしは多項式) を全て求める．定式化の手始めとして，$G(\xi,\eta)$ が 3-PHO ハミルトニアン $K(q,p)$ ((1')) の BG 標準形である場合に，$G(\xi,\eta)$ から $K(q,p)$ の再生を考えよう．再生は，正準変換 (3) と (4) の逆変換が，$-W(q,\eta)$ を 3 型母関数[12]とする正準変換，$(\xi,\eta)\to(q,p)$ $(p=-\partial(-W)/\partial q, \xi = -\partial(-W)/\partial\eta)$，を用いて $K(q,-\partial(-W)/\partial q) = G(-\partial(-W)/\partial\eta, \eta)$ より実現される．これを踏まえて，4 次までの BG 標準化逆問題を以下のように定義する．

定義 2.3 (4 次までの BG 標準化逆問題) BG 標準形 4 次多項式 $G(\xi,\eta)$((6) 参照) に対し，

$$H(q, -\frac{\partial S}{\partial q}) = G(-\frac{\partial S}{\partial \eta}, \eta) \qquad \underline{\text{(up to degree-4)}} \tag{9}$$

を満たす 4 次多項式

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(p_j^2 + q_j^2) + \sum_{k=3}^{4} H_k(q,p) \tag{10}$$

[10] (3)-(4) より，1 次以下の項はなく，2 次の形も (6) のように決まる．

[11] 条件 (8) が $K(q,p)$ に対する BG 標準形 $G(\xi,\eta)$ の一意性を保証する [7]．

[12] 旧運動量変数 (η) と新位置変数 (q) の関数形．

をすべて求めよ．ただし，$S(q,\eta)$ は

$$S(q,\eta) = -\sum_{j=1}^{2} q_j\eta_j - \sum_{k=3}^{4} S_k(q,\eta) \tag{11}$$

で表される 3 型母関数 ($S_k(q,\eta)$: (q,η) の斉 k 次多項式 $(k=3,4)$) で，

$$S_k(q,\eta) \in \mathrm{image}\, D_{q,\eta} \quad (k=3,4) \tag{12}$$

を満たす．■

ρ 次までの逆問題では，注意 2 で述べた順問題の場合と同様の考え方をすればよい．

3 3-PHO の BG 標準化と逆問題の解

3.1 解法と数式処理

§2.2 において定式化した BG 標準化逆問題を解こう[13]．(9) の両辺の斉 3 次部分を比較して得られる[14]

$$H_3(q,\eta) = (D_{q,\eta}S_3)(q,\eta) \tag{13}$$

より，

$$H_3(q,\eta)：\text{任意斉 3 次式} \in \mathrm{image} D_{q,p}, \qquad S_3(q,\eta) = \left((\tilde{D}_{q,\eta})^{-1} H_3(q,\eta)\right) \tag{14}$$

を得る[15]．ただし，$\tilde{D}_{q,\eta}$ は $D_{q,\eta}$ の image $D_{q,\eta}$ への制限を表わす．(14) の下で，(9) の両辺の斉 4 次部分を比較して得られる [14]

$$H_4(q,\eta) = G_4(q,\eta) + (D_{q,\eta}S_4)(q,\eta) - \Psi_4(q,\eta), \tag{15}$$

$$\Psi_4(q,\eta) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\left(\frac{\partial S_3}{\partial q_j}\right)^2 + \left.\frac{\partial H_3}{\partial p_j}\right|_{(q,\eta)}\frac{\partial S_3}{\partial q_j} - \left(\frac{\partial S_3}{\partial \eta_j}\right)^2 - \left.\frac{\partial G_3}{\partial \xi_j}\right|_{(q,\eta)}\frac{\partial S_3}{\partial \eta_j}\right) \tag{16}$$

より，

$$H_4^{\mathrm{img}}(q,\eta)：\text{任意斉 4 次式} \in \mathrm{image} D_{q,p}, \qquad H_4^{\mathrm{ker}}(q,\eta) = G_4(q,\eta) - \Psi_4^{\mathrm{ker}}(q,\eta), \tag{17}$$

$$S_4(q,\eta) = \left((\tilde{D}_{q,\eta})^{-1}\left(H_4^{\mathrm{img}}(q,\eta) + \Psi_4^{\mathrm{img}}(q,\eta)\right)\right) \tag{18}$$

を得る．ただし，多項式に付けた $^{\mathrm{img}}$ と $^{\mathrm{ker}}$ は $D_{q,\eta}$ の像と核への直和分解の成分を表す．(14) や (17) における多項式の選択任意性に，逆問題としての特徴が現れている．

以上のように解の構成は理論上は難しくはないが，$G(\xi,\eta)$ が具体的に指定されたときに $H(q,p)$ の陽な形を求めよという問題は以下でみるように著しく面倒である．(13)-(18) からは，必要な計算のほとんどが多項式の 4 則演算，微分，その逆演算としての積分からなることがわかるので，逆問題は数式処理と相性がよい．(13)-(18) を実行する数式処理プログラムとして筆者は ANFER(Algorithm for Normal Form Expansion and Restoration) を作成している [5,7] [16]．また，数式処理による BG 標準化や量子化を研究するグループとの共同研究で GITA^{-1}，GITAN，LINA などを開発中してきた [3,4,8,9]．これらは，解を構成するコンセプト違い[17]により一長一短があり性能評価にも着手している [10]．

[13] 一般次数までの BG 標準化やその逆問題の解法は [5] にある．

[14] BG 標準形に関する条件 (7) より従う $G_3(\xi,\eta)=0$ を用いている．これに対して，$G_4(\xi,\eta)\neq 0$ である．

[15] 奇数次斉次多項式のなす部分空間において，$D_{q,\eta}$ の核は自明．

[16] BG 標準形の計算もできる．試作レベルではあるが，web page http://yang.amp.i.kyoto-u.ac.jp/ uwano/ に置いてある．

[17] 例えば GITA^{-1} は，最も一般的な $K(q,p)$ の BG 標準形と指定された $G(\xi,\eta)$ の係数比較に基づく．

3.2 計算結果

3-PHO ハミルトニアン $K(q,p)$ の BG 標準形とその逆問題の解 (いずれも 4 次まで) を示す．計算は ANFER による [7]．まず，(1') で与えた 3-PHO ハミルトニアン $K(q,p)$ の 4 次までの BG 標準形 $G(\xi,\eta)$ は，

$$\begin{aligned} G(\xi,\eta) = {} & \frac{1}{2}\left(\zeta_1\overline{\zeta}_1+\zeta_2\overline{\zeta}_2\right)-\frac{15}{16}(f_1^2\zeta_1^2\overline{\zeta}_1^2+f_4^2\zeta_2^2\overline{\zeta}_2^2)-\frac{3}{4}(f_1f_3\zeta_1\zeta_2\overline{\zeta}_1\overline{\zeta}_2+f_2f_4\zeta_1\zeta_2\overline{\zeta}_1\overline{\zeta}_2) \\ & -\frac{5}{8}(f_1f_2\zeta_1^2\overline{\zeta}_1\overline{\zeta}_2+f_1f_2\zeta_1\zeta_2\overline{\zeta}_1^2+f_3f_4\zeta_1\zeta_2\overline{\zeta}_2^2+f_3f_4\zeta_2^2\overline{\zeta}_1\overline{\zeta}_2) \\ & -\frac{5}{24}(f_2f_3\zeta_1^2\overline{\zeta}_1\overline{\zeta}_2+f_2f_3\zeta_1\zeta_2\overline{\zeta}_1^2+f_2f_3\zeta_1\zeta_2\overline{\zeta}_2^2+f_2f_3\zeta_2^2\overline{\zeta}_1\overline{\zeta}_2) \\ & -\frac{1}{6}(f_2^2\zeta_1\zeta_2\overline{\zeta}_1\overline{\zeta}_2+f_3^2\zeta_1\zeta_2\overline{\zeta}_1\overline{\zeta}_2)-\frac{5}{48}(f_2^2\zeta_1^2\overline{\zeta}_1^2+f_3^2\zeta_2^2\overline{\zeta}_2^2) \\ & -\frac{1}{8}(f_2^2\zeta_1^2\overline{\zeta}_2^2+f_2^2\zeta_2^2\overline{\zeta}_1^2+f_3^2\zeta_1^2\overline{\zeta}_2^2+f_3^2\zeta_2^2\overline{\zeta}_1^2) \\ & +\frac{1}{16}(f_1f_3\zeta_1^2\overline{\zeta}_2^2+f_1f_3\zeta_2^2\overline{\zeta}_1^2+f_2f_4\zeta_1^2\overline{\zeta}_2^2+f_2f_4\zeta_2^2\overline{\zeta}_1^2). \end{aligned} \tag{19}$$

である．ただし，$\zeta_j=\xi_j+i\eta_j$ $(j=1,2)$ である．この $G(\xi,\eta)$ に対する逆問題の解 $H(q,p)$ は (10) の下で

$$\begin{aligned} H_3(q,p) = {} & a_1z_1^3+a_2z_1^2z_2+a_3z_1z_2^2+a_4z_2^3+a_5z_1^2\overline{z}_1+a_6z_1^2\overline{z}_2 \\ & +a_7z_1z_2\overline{z}_1+a_8z_1z_2\overline{z}_2+a_9z_2^2\overline{z}_1+a_{10}z_2^2\overline{z}_2 \\ & +\overline{a}_1\overline{z}_1^3+\overline{a}_2\overline{z}_1^2\overline{z}_2+\overline{a}_3\overline{z}_1\overline{z}_2^2+\overline{a}_4\overline{z}_2^3+\overline{a}_5z_1\overline{z}_1^2+\overline{a}_6z_2\overline{z}_1^2 \\ & +\overline{a}_7z_1\overline{z}_1\overline{z}_2+\overline{a}_8z_2\overline{z}_1\overline{z}_2+\overline{a}_9z_1\overline{z}_2^2+\overline{a}_{10}z_2\overline{z}_2^2 \end{aligned} \tag{20}$$

なる斉 3 次部分と

$$\begin{aligned} H_4(q,p) = {} & c_1z_1^4+c_2z_1^3z_2+c_3z_1^2z_2^2+c_4z_1z_2^3+c_5z_2^4+c_6z_1^3\overline{z}_1+c_7z_1^3\overline{z}_2+c_8z_1^2z_2\overline{z}_1 \\ & +c_9z_1^2z_2\overline{z}_2+c_{10}z_1z_2^2\overline{z}_1+c_{11}z_1z_2^2\overline{z}_2+c_{12}z_2^3\overline{z}_1+c_{13}z_2^3\overline{z}_2 \\ & +\overline{c}_1\overline{z}_1^4+\overline{c}_2\overline{z}_1^3\overline{z}_2+\overline{c}_3\overline{z}_1^2\overline{z}_2^2+\overline{c}_4\overline{z}_1\overline{z}_2^3+\overline{c}_5\overline{z}_2^4+\overline{c}_6z_1\overline{z}_1^3+\overline{c}_7z_2\overline{z}_1^3+\overline{c}_8z_1\overline{z}_1^2\overline{z}_2 \\ & +\overline{c}_9z_2\overline{z}_1^2\overline{z}_2+\overline{c}_{10}z_1\overline{z}_1\overline{z}_2^2+\overline{c}_{11}z_2\overline{z}_1\overline{z}_2^2+\overline{c}_{12}z_1\overline{z}_2^3+\overline{c}_{13}z_2\overline{z}_2^3 \\ & +8(a_6\overline{a}_6z_1z_2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_9\overline{a}_9z_1z_2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_5\overline{a}_6z_1z_2\overline{z}_1^2 \\ & \qquad +a_6\overline{a}_5z_1^2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_9\overline{a}_{10}z_2^2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_{10}\overline{a}_9z_1z_2\overline{z}_2^2) \\ & +6(a_1\overline{a}_1z_1^2\overline{z}_1^2+a_4\overline{a}_4z_2^2\overline{z}_2^2+a_5\overline{a}_5z_1^2\overline{z}_1^2+a_{10}\overline{a}_{10}z_2^2\overline{z}_2^2) \\ & +4(a_1\overline{a}_2z_1^2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_8\overline{a}_9z_1^2\overline{z}_2^2+a_3\overline{a}_4z_1z_2\overline{z}_2^2+a_5\overline{a}_8z_1z_2\overline{z}_1\overline{z}_2 \\ & \qquad +a_6\overline{a}_7z_1^2\overline{z}_2^2+a_6\overline{a}_8z_1z_2\overline{z}_2^2+a_7\overline{a}_9z_1^2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_7\overline{a}_{10}z_1z_2\overline{z}_1\overline{z}_2) \\ & +4(a_2\overline{a}_1z_1z_2\overline{z}_1^2+a_4\overline{a}_3z_2^2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_8\overline{a}_5z_1z_2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_7\overline{a}_6z_2^2\overline{z}_1^2 \\ & \qquad +a_8\overline{a}_6z_2^2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_9\overline{a}_7z_1z_2\overline{z}_1^2+a_{10}\overline{a}_7z_1z_2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_9\overline{a}_8z_2^2\overline{z}_1^2) \\ & +\frac{8}{3}(a_2\overline{a}_2z_1z_2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_3\overline{a}_3z_1z_2\overline{z}_1\overline{z}_2)+\frac{2}{3}(a_2\overline{a}_2z_1^2\overline{z}_1^2+a_3\overline{a}_3z_2^2\overline{z}_2^2) \\ & +2(-a_6\overline{a}_6z_1^2\overline{z}_1^2+a_7\overline{a}_7z_1^2\overline{z}_1^2+a_8\overline{a}_8z_2^2\overline{z}_2^2-a_9\overline{a}_9z_2^2\overline{z}_2^2) \\ & +2(a_1\overline{a}_3z_1^2\overline{z}_2^2+a_2\overline{a}_4z_1^2\overline{z}_2^2+a_5\overline{a}_7z_1^2\overline{z}_1\overline{z}_2-a_5\overline{a}_9z_1^2\overline{z}_2^2-a_6\overline{a}_8z_1^2\overline{z}_1\overline{z}_2 \\ & \qquad -a_6\overline{a}_{10}z_1^2\overline{z}_2^2+a_7\overline{a}_8z_1z_2\overline{z}_1^2+a_7\overline{a}_8z_2^2\overline{z}_1\overline{z}_2-a_7\overline{a}_9z_1z_2\overline{z}_2^2+a_8\overline{a}_{10}z_1z_2\overline{z}_2^2) \\ & +2(a_3\overline{a}_1z_2^2\overline{z}_1^2+a_4\overline{a}_2z_2^2\overline{z}_1^2+a_7\overline{a}_5z_1z_2\overline{z}_1^2-a_9\overline{a}_5z_2^2\overline{z}_1^2-a_8\overline{a}_6z_1z_2\overline{z}_1^2 \\ & \qquad -a_{10}\overline{a}_6z_2^2\overline{z}_1^2+a_8\overline{a}_7z_1^2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_8\overline{a}_7z_1z_2\overline{z}_2^2-a_9\overline{a}_7z_2^2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_{10}\overline{a}_8z_2^2\overline{z}_1\overline{z}_2) \\ & +\frac{4}{3}(a_2\overline{a}_3z_1^2\overline{z}_1\overline{z}_2+a_2\overline{a}_3z_1z_2\overline{z}_2^2+a_3\overline{a}_2z_1z_2\overline{z}_1^2+a_3\overline{a}_2z_2^2\overline{z}_1\overline{z}_2) \qquad \text{(continued)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{15}{16}(f_1^2 z_1^2 \overline{z}_1^2 + f_4^2 z_2^2 \overline{z}_2^2) - \frac{3}{4}(f_1 f_3 z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + f_2 f_4 z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2) \\
&-\frac{5}{8}(f_1 f_2 z_1^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + f_1 f_2 z_1 z_2 \overline{z}_1^2 + f_3 f_4 z_1 z_2 \overline{z}_2^2 + f_3 f_4 z_2^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2) \\
&-\frac{5 f_2 f_3}{24}(z_1^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + z_1 z_2 \overline{z}_1^2 + z_1 z_2 \overline{z}_2^2 + z_2^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2) - \frac{1}{6}(f_2^2 z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + f_3^2 z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2) \\
&-\frac{1}{8}(f_2^2 z_1^2 \overline{z}_2^2 + f_2^2 z_2^2 \overline{z}_1^2 + f_3^2 z_1^2 \overline{z}_2^2 + f_3^2 z_2^2 \overline{z}_1^2) - \frac{5}{48}(f_2^2 z_1^2 \overline{z}_1^2 + f_3^2 z_2^2 \overline{z}_2^2) \\
&+\frac{1}{16}(f_1 f_3 z_2^2 \overline{z}_1^2 + f_1 f_3 z_1^2 \overline{z}_2^2 + f_2 f_4 z_1^2 \overline{z}_2^2 + f_2 f_4 z_2^2 \overline{z}_1^2)
\end{aligned} \tag{21}
$$

なる斉4次部分をもつことがわかる．ただし，$z_j = q_j + ip_j$ $(j = 1, 2)$．a_ℓ $(\ell = 1, \cdots, 10)$ と c_m $(m = 1, \cdots, 13)$ は複素数値パラメータで任意に値を選べる．この2種類のパラメータは，それぞれ $H_3(q,p)$ と $H_4^{\mathrm{img}}(q,p)$ の選択任意性を表現している ((14), (17) 参照)．このように，最も低次[14,15]の標準化逆問題においてすら，その解には(実)46自由度の不定性が存在し，それは標準化したい次数の上昇に関して組み合わせ論的に増大する．より効率的に標準化とその逆問題を解く数式処理プログラムが望まれる．

4 諸結果

4.1 3-PHO と 4-PHO の BG 標準形共有問題

§3の結果の応用として，3-PHO が或る 4-PHO [18]と BG 標準形を共有するための条件を考察しよう．そのためには，与えられた 3-PHO ハミルトニアン $K(q,p)$ ((1') 参照) に対し，パラメータ (a_ℓ) と (c_m) ((14), (17) 参照) をうまく選ぶことで $H(q,p)$ を 4-PHO ハミルトニアンの形にできるかを調べればよい．

定理 4.1 [7] 3-PHO ハミルトニアン (1') が或る 4-PHO ハミルトニアンと4次まで BG 標準形を共有するための必要十分条件は，3-PHO ハミルトニアンが

$$
3(f_1 f_3 + f_2 f_4) - (f_2^2 + f_3^2) = 0 \tag{22}
$$

を満たすことである．■

条件 (22) は，2自由度自然力学系に対する Bertrand-Darboux(BD) 条件 [7, 11] を 3-PHO に適用したものと理解できる[19]．3-PHO が (22) を満たすとき，BG 標準形を共有する 4-PHO も実は BD 条件を満たすことも示されている．これらの結果のある種の一般化も成立する．

定理 4.2 [11] δ を3以上の任意の奇数とする．δ-PHO が或る $(2\delta-2)$-PHO と $2\delta-2$ 次まで BG 標準形を共有するための必要十分条件は，δ-PHO がある回転点変換[20]によって変数分離可能なことである．δ-PHO と BG 標準形を共有する $(2\delta-2)$-PHO も δ-PHO と同じ回転点変換で変数分離可能である．■

以上のように，3-PHO と 4-PHO が BG 標準形を共有するという設定をすると，両者は自動的に変数分離可能になるという当初は予想もしていなかった結果とその一般化が得られた．BG 標準化は元来，非可積分系に対する手法であったのだが，逆問題を通じて2種類の力学系の可積分性[21]のリンケージが得られたところは面白いのではなかろうか．

4.2 変数分離できない 3-PHO の BG 標準化逆問題

さて，3-PHO の BG 標準化逆問題を巡っては「(22) を満たさない (*i.e.* 回転点変換で変数分離できない)3-PHO と BG 標準形を共有する系の典型[22]はどんなものか？」ということが気になってくる．候補として，

[18] 斉 δ 次多項式ポテンシャルが印加された摂動調和振動子を δ-PHO と呼ぶことにする．4-PHO は $\delta = 4$ の場合．

[19] 正確には，少数の例外を除く必要がある．その意味で 'generic' な BD 条件と言える．

[20] $(q,p) \to (gq, gp)$ $(g \in SO(2))$ なる形の変換．

[21] 変数分離可能性が成り立てば，可積分である．

[22] 23 個の複素パラメータで表される一般解は既に得ているが，そこから応用上意味のありそうなものを探すという意味．

線形磁場と斉4次多項式ポテンシャルを印加された摂動調和振動子(線形磁場中の4-PHOと略す)を考える[23]．そのハミルトニアンは，$V_4(q)$ を q の斉4次多項式，$A^{(j)}$ $(j=1,2)$ を q の斉2次多項式とするとき，

$$Q(q,p)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left\{\left(p_j-A^{(j)}(q)\right)^2+q_j^2\right\}+V_4(q) \tag{23}$$

で与えられる．以下の結果が得られている．

定理 4.3 [12] (1') で与えられるハミルトニアンを持つ3-PHOが，或る線形磁場中の4-PHOと4次までBG標準形を共有するための必要十分条件は

$$3(f_1f_3+f_2f_4)-(f_2^2+f_3^2)>0 \tag{24}$$

である．■

(24)は，これを満たす3-PHOが回転点変換によって変数分離できないことを示している．これらの半数の3-PHOが積分不可能系[24]であることがZiglin解析によって証明できる[12][25]．半数を規定する条件などの詳細は紙面の都合で割愛する．対応する線形磁場中の4-PHOの積分不可能性は今後の課題である．また，$3(f_1f_3+f_2f_4)-(f_2^2+f_3^2)<0$ の場合を調べれば，BG標準化逆問題の視点から3-PHOの分類が完成することになる．

5 おわりに

以上，BG標準化逆問題への数式処理の応用についての現状を概説した．月並みな表現だが，数式処理はこの問題においてさまざまな試行を行なう上で，非常に有用で不可欠なツールであるといえよう．

参考文献

[1] J. Moser, *Lectures on Hamiltonian Systems* (Memoirs of AMS **81**), (AMS, 1968).

[2] M.Kummer, Commun. Math. Phys., **48**, 53 (1976).

[3] N.A.Chekanov, M.Hongo, V.A.Rostovtsev, Y.Uwano and S.I.Vinitsky, Phys. At. Nucl., **61**, 2029 (1998):

[4] N.A.Chekanov, V.A.Rostovtsev, Y.Uwano and S.I.Vinitsky, Compu. Phys. Commun., **126**, 47 (2000).

[5] Y.Uwano, N.Chelanov, V.Rostovtsev and S.Vinitsky, *Computer Algebra in Scientific Computing,* V.Ganzha *et. al.* eds., 441 (Springer-Verlag, 1999).

[6] Y.Uwano, J. Phy. Soc. Japan, **63** suppl.A, 31 (1994): J. Phys. **A**, **28**, 2041 (1995): Int. J. Bifurcation and Chaos, **8**, 941 (1998): Rep. Math. Phys., **44**, 267 (1999).

[7] Y.Uwano, J. Phys. **A**, **33**, 6635 (2000).

[8] A.Gusev, N.Chekanov, V.Rostovtsev, Y.Uwano and S.Vinitsky, *Computer Algebra in Scientific Computing*, V.Ganzha *et. al.* eds., 187 (TU Munchen, 2002).

[9] A.Gusev, Y.Ukolov, N.Chekanov, V.Rostovtsev, Y.Uwano and S.Vinitsky, *Computer Algebra in Scientific Computing*, V.Ganzha *et. al.* eds., 187 (TU Munchen, 2003).

[10] A.Gusev, N.Chekanov, V.Rostovtsev, S.Vinitsky and Y.Uwano, Programming and Computer Science, **30**, 76 (2004).

[11] Y.Uwano, *to appear in* 'Superintegrability in Classical and Quantum Systems' CRM Proceedings and Lecture Notes **37** (2004).

[12] Y.Uwano, *Computer Algebra in Scientific Computing*, V.Ganzha *et. al.* eds., 383 (TU Munchen, 2003).

[23] 前節の4-PHOにさらに線形磁場の摂動を加えてみたことになる．

[24] ハミルトニアンと独立な一価解析的保存量を持たない系という意味．

[25] 残り半分も非可積分と予想されるが，証明はまだである．