

# Risa/Asir Package for Non-commutative Gröbner Bases and its Applications

小原功任

金沢大学理学部計算科学科\*

## 1 はじめに

計算代数システム Risa/Asir 上にグレブナー基底パッケージ `yang` を実装したので報告する。我々のパッケージは、微分差分作用素環上のグレブナー基底を計算するものである。`yang` を作成した動機は、超幾何関数の諸公式 (解空間の次元, 隣接関係式 (差分方程式), バフ系, 二次関係式など) を Risa/Asir 上で計算することにあるので, `yang` には, それらの計算を行うルーチンが加えられている。

Risa/Asir 以外で, 非可換環上のグレブナー基底計算が可能な計算代数システムには次のものがある。

- MGFUN package on Maple (by F. Chyzak)
- Kan/sm1 (by N. Takayama)
- Macaulay2 (by D. Grayson and M. Stillman)
- Plural system based on Singular (by V. Levandovskyy and H. Schönemann)
- FELIX (by J. Apel and U. Klaus)
- MAS (by H. Kredel and M. Pesch)
- OPAL (by B. Keller)

## 2 設計の特徴とこのパッケージの長所

`yang` パッケージの特徴を簡単に説明する。

1. Risa/Asir に完全に統合されていること。

筆者は Risa/Asir 本体の開発に参加している。その関係もあり, `yang` を実装するのに必要な関数が Risa/Asir に実装されたり, 逆に `yang` で Risa/Asir の新しい機能が積極的に利用されている。例えば, `yang` では Risa/Asir のモジュール機能が用いられている。このモジュール機能によって, パッケージに必要な名前空間の分離が行われている。

---

\*ohara@air.s.kanazawa-u.ac.jp

2. Risa/Asir のユーザー言語で記述されていて、ソースコードのサイズも小さい。  
yang では、微分作用素および差分作用素は Risa/Asir のデータ型「分散表現多項式」として実装されている。それぞれの作用素は属性を持ち、その属性は乗算、S ベア計算、正規形計算に用いられる。yang は Risa/Asir のユーザー言語で記述されているので、これらのアルゴリズムは比較的簡潔に記述することができる。
3. 新しい機能の実装が容易。
4. 有理関数体  $\mathbf{Q}(x_1, \dots, x_n)$  を係数とするグレブナー基底計算が可能。  
我々の動機は、超幾何関数の諸公式 (解空間の次元、隣接関係式 (差分方程式)、パフ系、二次関係式など) を導出するであった。ところでパフ系を導出するためには、有理関数体を係数にとって、正規形 (normal form) を計算する必要がある。しかしながら、他の計算代数システムで有理関数体係数で計算が可能なものは少ない。よって、この点は yang の長所であろう。  
より具体的には yang には次の演算が実装されている。  
変数を  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_m)$  とする。  $\theta_i$  を変数  $x_i$  に関するオイラー微分作用素 ( $\theta_i = x_i \partial_{x_i}$ ),  $E_j$  を変数  $a_j$  に関する差分作用素とする。  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $E = (E_1, \dots, E_m)$  と置く。
  - (a) 微分差分作用素環  $\mathbf{Q}[x, a](\theta, E)$  の算術演算。係数は多項式環  $\mathbf{Q}[x, a]$  である。
  - (b) 微分差分作用素環  $\mathbf{Q}(x, a)(\theta, E)$  でのグレブナー基底計算。グレブナー基底計算にはプッフバーガーのアルゴリズムを用いる。係数は有理関数体  $\mathbf{Q}(x, a)$  である。
5. フリーである。

### 3 利用例: ガウスの超幾何関数

オイラー作用素  $\theta = x\partial$  と差分作用素  $E: f(a) \mapsto f(a+1)$  を考え、 $R = \mathbf{Q}(x, a, b, c)(\theta, E)$  と置く。このとき、イデアル  $I = \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$  を次のように定める。

$$\begin{aligned}\ell_1 &= \theta(\theta + c - 1) - x(\theta + a)(\theta + b), \\ \ell_2 &= \theta + a - aE.\end{aligned}$$

ここで、 $\ell_1$  はガウスの超幾何微分方程式、 $\ell_2$  はガウスの超幾何関数の隣接関係式である。

さて、イデアル  $I$  のグレブナー基底を yang を用いて求めよう。

微分差分作用素環の計算をするには yang\_DE.rr をロードすることに注意して、次のプログラムを Risa/Asir 上で実行する。

```
load("yang_DE.rr")$
Ring=["euler",[x],"difference",[a]]$
yang.define_ring(Ring)$ /* 環を定義 */

S0 = yang.constant(1)$
S1 = yang.operator(x)$
E1 = yang.operator(a)$
L1 = yang.multi(S1,S1+(c-1)*S0) - x*yang.multi(S1+a*S0,S1+b*S0)$
L2 = S1+a*S0-a*E1$
```

```
Gr = yang.buchberger([L1,L2]);
end$
```

このプログラムを走らせて得られるグレブナー基底は

$$g_1 = \theta - aE + a,$$

$$g_2 = E^2 - \frac{(a-b+1)x - 2a + c - 2}{(a+1)(x-1)}E - \frac{a-c+1}{(a+1)(x-1)}$$

となり、標準単項式の数は 2 個である。

#### 4 利用例: アッペルの超幾何関数 $F_3$

微分作用素環  $R = \mathbf{Q}(x_1, x_2, a_1, a_2, b_1, b_2, c)(\theta_1, \theta_2)$  のイデアル  $I = \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$  を次のように定める。

$$\ell_1 = \theta_1(\theta_1 + \theta_2 + c - 1) - x_1(\theta_1 + a_1)(\theta_1 + b_1),$$

$$\ell_2 = \theta_2(\theta_1 + \theta_2 + c - 1) - x_2(\theta_2 + a_2)(\theta_2 + b_2).$$

このときイデアル  $I$  のグレブナー基底を `yang` を計算し、あわせて  $F_3$  のパフ系を求めよう。  $R$  は微分作用素環なので、`yang.rr` をロードすることに注意して、次のプログラムを実行すればよい。このプログラムは  $((\theta_1 f), (\theta_2 f), (\theta_1 \theta_2 f))$  に関するパフ系を計算する ( $f = F_3(a, b, c; x_1, x_2)$ )。計算結果 `Pf` は、パフ系の係数行列のリストである。

```
load("yang.rr")$
Ring = ["euler", [x,y]]$
yang.define_ring(Ring)$ /* 環を定義 */

S0 = yang.constant(1)$
S1 = yang.operator(x)$
S2 = yang.operator(y)$
L1 = yang.multi(S1,S1+S2+(c-1)*S0) - x*yang.multi(S1+a1*S0,S1+b1*S0)$
L2 = yang.multi(S2,S1+S2+(c-1)*S0) - y*yang.multi(S2+a2*S0,S2+b2*S0)$
Gr = yang.buchberger([L1,L2])$
Base = [S0,S1,S2,S1*S2]$
Pf = yang.pfaffian(Base,Gr)$
end$
```

#### 5 応用: 二次関係式の探索

次のような式を超幾何関数の二次関係式という (この式はガウスの超幾何関数の場合)。

$${}_2F_1(a, b, c; x) {}_2F_1(-a, -b, 2-c; x) + \frac{x}{c-1} {}_2F_1'(a, b, c; x) {}_2F_1(-a, -b, 2-c; x)$$

$$- \frac{x}{c-1} {}_2F_1(a, b, c; x) {}_2F_1'(-a, -b, 2-c; x) - \frac{a+b-c+1}{ab(c-1)} x^2 {}_2F_1'(a, b, c; x) {}_2F_1'(-a, -b, 2-c; x) = 1$$

`yang` は、ある種の超幾何関数の二次関係式の係数を決めることができる。

これは次の方法による。まず、 $d_x F(a, x) = \Omega(a, x)F(a, x)$  をパラメータ  $a$  を含む、超幾何関数の満たすパフ系とする。ただし、 $\Omega(a, x)$  は変数  $x$  に関して、行列値正則 1-形式である。もしも、行列値関数  $S = S(a, x)$  が次の全微分方程式系の解であれば、 $S$  は超幾何関数  $F(a, x)$  と  $F(-a, x)$  の二次関係式の係数を (定数倍を除いて) 与えていることが知られている。

$$d_x S(a, x) + {}^t \Omega(a, x) S(a, x) + {}^t S(a, x) \Omega(-a, x) = 0.$$

したがって、この全微分方程式の解を見つけられれば、超幾何関数の二次関係式の係数を定めることができる。

## 6 応用: $A$ -超幾何微分差分方程式系

この節は、高山信毅氏との共同の仕事である。定数行列  $A = (a_{ij})_{ij} \in M(d, n, \mathbf{Z})$  を選び、変数  $x = (x_1, \dots, x_n)$  と  $b = (b_1, \dots, b_d)$  に対して、オイラー作用素  $\theta_j = x_j \partial_{x_j}$  と差分作用素  $E_j : f(b_j) \mapsto f(b_j + 1)$  を考える。

このとき微分差分作用素環  $R = Q(x, b)(\theta_1, \dots, \theta_n, E_1^{-1}, \dots, E_d^{-1})$  において、 $A$ -超幾何微分差分方程式系  $H_A$  を考える。

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \theta_j - b_i \right) \bullet f &= 0, \quad (i = 1, \dots, d) \\ \left( \theta_j - x_j \prod_{i=1}^d E_i^{-a_{ij}} \right) \bullet f &= 0, \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

我々は、yang を用いて、 $H_A$  に関するグレブナー基底の計算を行うことができる。 $H_A$  のホロノミックランクは何であろうか。

予想  $H_A$  のホロノミックランクは  $A$  の正規化体積に等しい。

実際、特別の場合にはこれらは定理である。

## 7 表

この節では、yang の性能を測定する。実験は次の環境で行った。

CPU: Pentium III 1.2GHz (Dual), Memory: 2GB, OS: FreeBSD 4.8.

まず、yang を用いて計算が終了するかが問題であるが、これは次の表の通りである。ただし、単項式順序は全次数逆辞書式順序を用い、表中の  $F_2[b_2]$  は合流型超幾何関数を表す。( $F_2$  を合流させたもの)

	グレブナー基底	パフ系	二次関係式
$F_1$	OK	OK	OK
$F_2$	OK	OK	OK
$F_3$	OK	OK	OK
$F_4$	OK	OK	NG
$F_2[b_2]$	OK	OK	OK
$F_D(n=3)$	OK	OK	-
$F_A(n=3)$	OK	OK	OK
$F_B(n=3)$	OK	OK	-
$F_C(n=3)$	OK	OK	NG
${}_2F_2$	OK	OK	OK
${}_3F_3$	OK	OK	OK

次に、グレブナー基底計算の速度を計測した。 $n$  は変数の個数。- はメモリ不足を表す。

	$F_1/F_D$	$F_2/F_A$	$F_3/F_B$	$F_4/F_C$
$n=2$	0.23s	0.21s	0.23s	0.33s
$n=3$	0.55s	20.70s	20.98s	320.66s
$n=4$	4.19s	3072.61s	-	-