数理解析研究所講究録 1396 巻 2004 年 124-133

数域と写像の分解

堰澤　明正 (Segizawa Akimasa), 五井　律子 (Goi Ritsuko)
方波見　大 (Katabami Yutaka)
(千葉大学自然科学研究科)
渚　勝 (Nagisa Masaru)(千葉大学理学部)

$n \geq 2$ とし $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{B}(H)$ (ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素) とする. 線形写像 $T : \ell_n^\infty \longrightarrow \mathbb{B}(H)$ として

$$T(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

という形のものを考える.

このT に対して 2 種類のノルムを考える. ひとつは完全有界ノルム

$$\|T\|_{cb} = \sup_k \|T \otimes \mathrm{id}_k\|$$

であり, もうひとつは $x_1, \ldots, x_n$ を含む閉 *- 部分環 A に対する分解ノルム

$$\|T\|_{dec} = \inf\{\max(\|S_1\|, \|S_2\|)\}$$

である. ただし

$$\ell_n^\infty \ni c \mapsto \begin{pmatrix} S_1(c) & T(c) \\ T(c^*)^* & S_2(c) \end{pmatrix} \in M_2(A)$$

が completely positive となるものを動く. つまり写像 T が値域 A の中で completely positive map に分解できるかという要素 $x_1, \ldots, x_n$ と A との関係が反映するノルムということになる.

このノルムの違いを調べることを考察するが, 感覚的に予想されることとして A が十分に大きいとその差が現れないということ, 正確にいうと次の事実が知られている.

- $\|T\|_{cb} \leq \|T\|_{dec}$
- (Haagerup, Paulsen, Wittstock) A が injective のとき

$$\|T\|_{cb} = \|T\|_{dec}$$

ここで A が injective であるとは有界線形作用素の全体 $\mathbb{B}(H)$ から A の上へのノルム 1 の射影が存在することである．また，この条件が injective を特徴付けることが知られている．

定理 [U. Haagerup] N を von Neumann algebra (weakly closed *-subalgebra of $\mathbb{B}(H)$) とする．このとき以下は同値である．

(1) N は injective.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ と linear map $T : \ell_n^\infty \longrightarrow N$ に対して

$$\|T\|_{dec} = \|T\|_{cb}.$$

(3) 正定数 c が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ と linear map $T : \ell_n^\infty \longrightarrow N$ に対して

$$\|T\|_{dec} \leq c\|T\|_{cb}.$$

Haagerup は decomposable norm と completely bounded norm の差を示す例も挙げている．さらに上の定理の条件 (3) は，この二つのノルムが同値であれば injective を導くことを意味している．したがって，作用素ノルムと数域半径とが同値なノルムに注意すると数域半径を用いても同様な議論が平行して行えることが予想できる．以下にこのことを述べる．

$x \in \mathbb{B}(H)$ の数域半径は

$$w(x) = \sup\{|(x\xi, \xi)| \mid \|\xi\| = 1\}$$

であり数域半径を用いたときの作用素ノルム

$$\|T\|_w = \sup\{w(Tx) \mid w(x) = 1\}$$
$$\|T\|_m = \sup\{w(Tx) \mid \|x\| = 1\}$$

によって

$$\|T\|_{wcb} = \sup_k \|T \otimes \mathrm{id}_k\|_w$$
$$\|T\|_{mcb} = \sup_k \|T \otimes \mathrm{id}_k\|_m$$

を定義する．また A に対する分解ノルムに対応するものとして

$$\|T\|_{wdec} = \inf\{\|S\|\}$$

ただし

$$\ell_n^\infty \ni c \mapsto \begin{pmatrix} S(c) & T(c) \\ T(c^*)^* & S(c) \end{pmatrix} \in M_2(A)$$

が completely positive となるものを動く．

$$\|T\|_{mdec} = \inf\{\|\frac{S_1+S_2}{2}\|\}$$

ただし

$$\ell_n^\infty \ni c \mapsto \begin{pmatrix} S_1(c) & T(c) \\ T(c^*)^* & S_2(c) \end{pmatrix} \in M_2(A)$$

が completely positive となるものを動く．

ここでの分解ノルムの定義の背景にはノルム，数域ノルム，正値性に関する次の事実を用いる．

$$\|a\| \le 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{pmatrix} \ge 0$$

$$w(a) \le 1 \Leftrightarrow \exists x \begin{pmatrix} 1+x & a \\ a^* & 1-x \end{pmatrix} \ge 0$$

このとき次のことがわかり

- $\|T\|_{wcb} \le \|T\|_{wdec}$, $\|T\|_{mcb} \le \|T\|_{mdec}$
- (Suen, Itoh-Nagisa) A が injective のとき

$$\|T\|_{wcb} = \|T\|_{wdec}, \|T\|_{mcb} = \|T\|_{mdec}$$

上の定理の同値条件として

(4) 任意の $n \in \mathbb{N}$ と linear map $T : \ell_n^\infty \longrightarrow N$ に対して

$$\|T\|_{wdec} = \|T\|_{wcb}.$$

(5) 任意の $n \in \mathbb{N}$ と linear map $T : \ell_n^\infty \longrightarrow N$ に対して

$$\|T\|_{mdec} = \|T\|_{mcb}.$$

が得られる.

また wdec ノルムの形は評価のしやすい形であるので, いくつかの例に対して, A が $x_1, \ldots, x_n$ を含む最小の閉 *- 部分環の場合にそれらのノルムを考察しておく.

これらのノルムを計算するのに有効な事実を述べる.

(F1) A が nuclear であるとき

$$\|T\|_{dec} = \|T\|_{cb}, \quad \|T\|_{mdec} = \|T\|_{mcb}, \quad \|T\|_{wdec} = \|T\|_{wcb}$$

(F2) $x_1, \ldots, x_n$ が unitary で, A が faithful tracial state を持つとき, $\|T\|_{dec} = \|T\|_{mdec} = \|T\|_{wdec} = n$

(F3) $\|T\|_{mcb} \leq \|T\|_{cb} \leq \|T\|_{wcb}$

(F4) $\|T\|_{mdec} \leq \|T\|_{dec} \leq \|T\|_{wdec}$

(F1) については nuclear であることから A の恒等写像が有限次行列環をスルーする completely positive map で近似される. 十分近い近似に対し、スルーする有限次元環で分解を実行すれば良い ([N]). (F2) の dec ノルムの評価は Haagerup による. そのアイデアを拡張して mdec, wdec ノルムが評価できる. これについては例 4 の後でのべる.

$\boxed{\text{例1}}$ A が可換のとき ($A \cong C(\Omega)$).
(F1) より $\|T\|_{dec} = \|T\|_{cb}$, $\|T\|_{wdec} = \|T\|_{wcb}$, また A の可換性より

$$|T\| = \|T\|_m = \sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|.$$

$$\begin{pmatrix} a & x_i \\ x_i^* & a \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow a \geq |x_i|$$

に注意すれば $\|T\| = \|T\|_{wdec}$ となる. つまり $\|T\|_{mcb} = \|T\|_{wdec}$.

$\boxed{\text{例2}}$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ がユニタリで, A が faithful trace を持ち, かつ nuclear であるとき.

$$\|T\|_{dec} = \|T\|_{cb} = \|T\|_{wdec} = \|T\|_{wcb} = n$$

となる.

- $x_i = x_i^* = x_i^{-1}$, $x_i x_j = -x_j x_i$ $(i \neq j)$ を満たすときはこの場合に属する.
- $x_1 x_2 = \gamma x_2 x_1$ $(|\gamma| = 1)$ となるユニタリもこの場合に属する.
- 離散 amenable 群の正則表現のユニタリ元のときもこの場合に属する.

$\boxed{\text{例3}}$ $x_i^* x_i = 1$, $\sum_{i=1}^n x_i x_i^* = 1$ のとき (A は Cuntz 環).
x_i の range の直交性より $\|T\| \geq \sqrt{n}$.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n} x_i x_i^* & x_i \\ x_i^* & 1/\sqrt{n} \end{pmatrix} \geq 0$$

より $\|T\|_{dec} = \|T\|_{cb} = \sqrt{n}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i \\ x_i^* & 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

より $\|T\|_{wdec} = \|T\|_{wcb} = n$ となる.

$\boxed{\text{例4}}$ 自由群 F_n の生成元を $g_1, \ldots, g_n$. 正則表現 λ とし $x_i = \lambda(g_i)$. $A = C^*_{red}(F_n)$.

- (Haagerup) $\|T\|_{cb} = 2\sqrt{n-1}$
- $\|T\|_{mcb} = \sqrt{2n-1}$
- $\|T\|_{dec} = \|T\|_{wdec} = n$
- $\sqrt{2n-1} \leq \|T\|_{wcb} \leq \min\{2\sqrt{2n-1}, n\}$

この例 4 について概略を説明する．まず F2 の性質を示しておく．

命題

$$\|T\|_{dec} = \|T\|_{mdec} = \|T\|_{wdec} = n.$$

証明

$$S_1(c_1, \ldots, c_n) = S_2(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i 1_N$$

と定義する．このとき $C_1, \ldots, C_n \in M_k(\mathbb{C})$ に対して，

$$\left(\begin{pmatrix} S_1 & T \\ T^* & S_2 \end{pmatrix} \otimes \mathrm{id}_k \right) (C_1, \ldots, C_n) = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & u_i \\ u_i^* & 1 \end{pmatrix} \otimes C_i$$

となる．$\begin{pmatrix} 1 & u_i \\ u_i^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_i^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_i \end{pmatrix} \geq 0$ だから $C_i \geq 0$ のとき，$\begin{pmatrix} 1 & u_i \\ u_i^* & 1 \end{pmatrix} \otimes C_i \geq 0$ となる．従って $\begin{pmatrix} S_1 & T \\ T^* & S_2 \end{pmatrix}$ が completely positive であることがわかる．これより

$$\|T\|_{wdec} \leq n, \qquad \|T\|_{mdec} \leq \|T\|_{dec} \leq n.$$

がわかる．

次に $\begin{pmatrix} x & u \\ u^* & y \end{pmatrix} \geq 0$, $uu^* = 1$ であるとき $x + uyu^* \geq 2$ となることを示す．実際，

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & uyu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ u^* & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \geq 0$$

であり，長さ 1 のベクトル ξ に対して，

$$\left(\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & uyu^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix} \right) = ((x + uyu^*)\xi, \xi) - 2 \geq 0$$

となり，$x + uyu^* \geq 2$ が得られる．

ここで，ℓ_n^∞ の射影 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ を

$$p_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ p_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \cdots,\ p_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

とし $S_1(p_k) = x_k, S_2(p_k) = y_k$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x_k & u_k \\ u_k^* & y_k \end{pmatrix} \geq 0$$

であり, $x^* + u_k y_k u_k^* \geq 2$ が成立する. したがって

$$\begin{aligned} \|\frac{S_1+S_2}{2}\| &= \frac{1}{2}\|\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)\| \\ &\geq \frac{1}{2}\tau(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\tau(x_k+u_k y_k u_k^*) \geq n \end{aligned}$$

となり,

$$\|T\|_{mdec} \geq n, \qquad \|T\|_{wdec} \geq n$$

であることがわかる.

これにより分解ノルムの評価が得られるが, 完全有界ノルムについては以下のような事実が必要になる.

定理 [Fell] G を離散群とする. $\lambda\colon G \to B(\ell^2(G))$ を正則表現, $\pi\colon G \to B(H_\pi)$ を unitary 表現とすると,

$$\lambda \otimes \pi \sim \lambda \otimes \mathrm{id} \quad \text{(unitary equivalent)}.$$

ただし $\mathrm{id} : G \longrightarrow B(H_\pi)$ は自明な表現とする.

自由群 F_2 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して F_n を部分群として含む. 言い換えれば, F_n の生成元 a, b を用いて n 個の関係式を持たない元 $g_1, g_2, \ldots, g_n$ を作れるということである. $W_r^*(F_2)$ のユニタリ元を

$$u_1 = \lambda(g_1), u_2 = \lambda(g_2), \cdots, u_n = \lambda(g_n)$$

とおく. このとき Akemann-Ostrand により

$$\|\sum_{i=1}^{n} u_i\| = 2\sqrt{n-1}, \qquad (n \geq 2)$$

という関係式が得られている. また Voiculescu (or Kesten) により

$$\|\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i + u_i^*}{2}\| = \sqrt{2n-1}, \qquad (n \geq 1)$$

という関係式も得られている. Haagerup は上の関係式を用いた. われわれは下の関係式を用いて $\|T\|_{mcb}$ を求める .

定理 [Russo-Dye] A を unital C*-algebra とする. このとき,

$$A_1 := \{x \in A \mid \|x\| \leq 1\} = \overline{\mathrm{co}}\{u \in A \mid u^*u = uu^* = 1\}.$$

すなわち, 単位球は unitary の凸結合で近似できる.

証明 A_1 を $A_1 = \{x \in A | \|x\| < 1\}$ (open unit ball of A), U を $U = \{u \in A | uu^* = u^*u = 1\}$ (unitaries of A) とする. $x \in A_1$ のとき, $x \in \overline{co}(U)$ を示せば十分である.

いま, $u \in U$ に対して $-u \in U$ であるから, $y = (x+u)/2 \in \overline{co}(U)$ が示されれば, $x \in \overline{co}(U)$ がいえる.

$U \subset 2\overline{co}(U) - x$ は closed かつ convex より, $\overline{co}(U) \subset 2\overline{co}(U) - x$, or $(x + \overline{co}(U))/2 \subset \overline{co}(U)$. $x_0 \in U$, $x_{n+1} = (x + x_n)/2$ とすると, $x_n \in \overline{co}(U)$, $x_n \to x$.

いま $y = ((xu^{-1}+1)/2)u$ であり, $\|xu^{-1}\| = \|x\| < 1$ から $\|y\| < 1$. また, $\|1 - (xu^{-1}+1)/2\| = \|(1 - xu^{-1})/2\| \leq 1/2 + \|xu^{-1}/2\| < 1$ より, y は invertible.

y を極分解すると, unitary v で $y = v|y|$ となる. いま, $w = |y| + i(1 - |y|^2)^{1/2}$ とすると, w は unitary であり, $|y| = (w + w^*)/2$ となる. したがって, $y \in \overline{co}(U)$.

定理

$$\|T\|_{mcb} = \sqrt{2n-1}$$

証明 $(C_1, \cdots, C_n) \in \ell_n^\infty(M_k(\mathbb{C}))$, $\|C_i\| \leq 1$ と仮定する. Russo-Dye の定理を用いて, $(C_1, \cdots, C_n) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (U_1^j, \cdots, U_n^j)$ とユニタリの凸結合に分解する. $w(x) =$

$\sup_{|\gamma|=1} \|\mathrm{Re}(\gamma x)\|$ より,

$$\begin{aligned}
w(T(C_1,\cdots,C_n)) &= \sup_{|\gamma|=1} \|\frac{1}{2},\gamma T(C_1,\cdots,C_n) + \frac{1}{2}\bar{\gamma}T(C_1,\cdots,C_n)^*\| \\
&= \frac{1}{2}\sup_{|\gamma|=1} \|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_j\left\{\gamma U_i^j \otimes \lambda(g_i) + \overline{\gamma} U_i^{j^*} \otimes \lambda(g_i)^*)\right\}| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\left(\sup_{|\gamma|=1}\|\sum_{i=1}^{n}\left\{\gamma U_i^j \otimes \lambda(g_i) + \bar{\gamma} U_i^{j^*} \otimes \lambda(g_i)^*\right\}\|\right).
\end{aligned}$$

ここで Fell の定理を用いて,

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{n}\left\{\gamma U_i^j \otimes \lambda(g_i) + \overline{\gamma} U_i^{j^*} \otimes \lambda(g_i)^*\right\}\| &= \|2\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma U_i^j \otimes \lambda(g_i)\right)\| \\
&= \|2\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda(g_i)\right)\| \\
&= 2\sqrt{2n-1}
\end{aligned}$$

より,

$$w(T(C_1,\cdots,C_n)) \leq \sqrt{2n-1}$$

が得られる.

$\|T\|_{mcb} \geq \sqrt{2n-1}$. は明らか.

References.

[AO] C.A. Akemann and P.A. Ostrand, *Computing norm in group C^*-algebras*, Amer. J. Math., 98(1975), 1015-1047.

[H] U. Haagerup, Injectivity and decomposition of completely bounded maps, in *Operator Algebras and Their Connection with Topology and Ergodic Theory*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1132,1985, 170–222.

[N] M. Nagisa, On the decomposition of finite rank linear maps, Math. Japonica **30**(1985), 503–510.

[P] V. I. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Dilations*, Pitmann Research Notes in Mathematics Series, Vol. 146, Pitmann Longman(Wiley), 1986.
[S] C.-Y. Suen, *W_ρ completely bounded maps*, Acta Sci. Math.67 (2001), 747-760
[V] D. V. Voiculescu, K.J. Dykema and A. Nica, *Free Random Variables*, CRM Monograph Ser. 1, Amer. Math. Soc. 1992.