数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 200-207

4変数ユニタリ群のAパケットについて*

今野和子 †

1 導入

局所体F上の連結簡約群とその準分裂な内部形式の間の既約表現(あるいはそれらのなすLパケット)の間の対応である、いわゆる広義 Jacquet-Langlands 対応は局所「Langlands函手性原理」の最もシンプルな場合である。その出発点となった四元数斜体の乗法群$D^{\times}$の場合には、$D^{\times}$の既約表現たちと$GL(2,F)$の既約二乗可積分表現との間に、指標等式で特徴づけられる一対一対応が得られている。

最近になって、志村曲線のゼータ関数やこれらの群をLevi部分群に含むより高次の群の保型表現を理解する際には、この対応に$D^{\times}$と$GL(2,F)$の1次元表現どうしの対応を付け加えた方がよいことがわかってきた。(既約表現の対応という意味では一対一対応でも写像でもなくなるが。) 同様の考察は$GL(n,F)$や一般の古典群の内部形式にも適用されるものと期待されている。

$GL(2)$の場合には付け加えるのは1次元表現という簡単で特徴的な表現であったため、特別な扱いは必要なかった。しかし一般には、非緩増加な既約表現と離散系列表現が入り交じったAパケットの間の対応となるため、その記述は(Aパケットが単一の元からなるであろう) $GL(n)$でさえ未解決の状態である。

4変数ユニタリ群に対してこの問題を考えたい。そのためにはAパケットを決定する必要があるが、完全な記述があるのは$GL(n)$, $SL(n)$, $U_{E/F}(2)$そして$U_{E/F}(3)$のみである。[KK]で4変数準分裂ユニタリ群$G^{*}(F)$のAパケットの候補をすべて決定した。ここでは4変数ユニタリ群の場合にこの対応を考えるために、$G^{*}(F)$の内部形式である、準分裂でない4変数ユニタリ群$G(F)$のAパケット考察する。

最後にこの研究集会で話す機会を与えてくださった主催者の渡部隆夫氏に深く感謝いたします。

*数理研短期共同研究「保型形式の構成とその応用」(2004年1月19〜23日)での講演録。

†学振特別研究員 京都大学大学院理学研究科 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町
E-mail: kkonno@math.kyoto-u.ac.jp
URL: http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/~kkonno/

2 既約許容表現の分類

E/F を標数 0 の非アルキメデス的局所体の二次拡大とし、それに付随する準分裂でない 4 変数ユニタリ群を G とする。これは同型を除いて一意である。G の F 上準分裂な内部形式 G^* がやはり同型を除いてただ一つ存在する。G の F ランクは 1 であるから、その F 有理的な真放物型部分群は共役を除いて一意である。そのうちの一つを $P = MU$ と書こう。P に対して [Bor79, §3] の議論により G^* の F 放物型部分群の共役類が決まる。その元 $P^* = M^*U^*$ を止めておく。すぐわかるように $M \simeq \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m \times G_2$, $M^* \simeq \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m \times G_2^*$ である。ここに $\mathrm{Res}_{E/F}$ は E から F への Weil の係数制限を、G_2, G_2^* はそれぞれ非等方的、準分裂な 2 変数ユニタリ群を表す。

これから $M(F)$ の任意の既約許容表現はある $E^\times$ の擬指標 ω と $G_2(F)$ の既約許容表現 τ のテンソル積である。E のモヂュラスを $|\cdot|_E$ として ω は $\chi[s] = \chi|\cdot|_E^s$, ($\chi$ は $E^\times$ の (ユニタリ) 指標、$s \in \mathbb{R}$) と一意に書ける。この $M(F)$ の表現からの放物型誘導表現

$$I_P^G(\chi[s] \otimes \tau) = \mathrm{ind}_{P(F)}^{G(F)}(\chi[s] \otimes \tau) \otimes \mathbf{1}_{U(F)}$$

を導入する。この節の目的は $G(F)$ のスーパーカスプでない既約許容表現の分類を [Kon03] から復習することである。そのような既約表現はすべて上の形の放物型誘導表現の組成因子として得られるから、$I_P^G(\chi[s] \otimes \tau)$ の組成列を記述すればよい。

$E^\times$ の指標は Langlands の可換類体論 (トーラスの Langlands 対応) で分類される。一方で $G_2(F)$ の既約許容表現は次のように記述されている。

G_2, G_2^* に対応するユニタリ相似変換群をそれぞれ $\widetilde{G}_2$, $\widetilde{G}_2^*$ と書く。$\widetilde{G}_2(F)$ の既約許容表現 $\widetilde{\pi}$ の $G_2(F)$ への制限の組成因子の集合 $\Pi = \Pi(\widetilde{\pi})$ を $G_2(F)$ の **L パケット**と呼ぶ。これはたかだか二つの既約表現からなり、$G_2(F)$ の既約許容表現の同型類の集合 $\Pi(G_2(F))$ はこうした L パケットたちの直和である。同様に $\widetilde{G}_2^*(F)$ の既約表現を用いて $G_2^*(F)$ の L パケットも定義される。一方でこれらの相似変換群に対しては同型

$$\widetilde{G}_2(F) \xrightarrow{\sim} E^\times \times D^\times/\Delta F^\times, \quad \widetilde{G}_2^*(F) \xrightarrow{\sim} E^\times \times GL(2,F)/\Delta F^\times,$$

があった [KK, 5.2.1]。ここで $\Delta : F^\times \hookrightarrow E^\times \times D^\times$ は対角埋め込みを表し、D は F 上のただ一つの四元数斜体である。特に $\widetilde{G}_2(F)$ の既約許容表現 $\widetilde{\pi}$ は $E^\times$ の擬指標 ω と $D^\times$ の既約表現 π^D で中心指標 ω_{π^D} が $\omega|_{F^\times}$ に等しいものを使って $\widetilde{\pi} \simeq \omega \otimes \pi^D$ と書ける。$\widetilde{G}_2^*(F)$ についても同様の記述が成り立つ。

$D^\times$ の既約許容表現の同型類の集合 $\Pi(D^\times)$ と、$GL(2,F)$ の本質的に二乗可積分な既約許容表現の同型類の集合 $\Pi_{\mathrm{disc}}(GL(2,F))$ の間には清水-Jacquet-Langlands 対応と呼ばれる全単射 $\mathrm{JL} : \Pi_{\mathrm{disc}}(GL(2,F)) \xrightarrow{\sim} \Pi(D^\times)$ がある [Shi65], [JL70]。これから $\widetilde{G}_2(F)$ と $\widetilde{G}_2^*(F)$ のあいだの清水-Jacquet-Langlands 対応

$$\mathrm{JL} : \Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G}_2^*(F)) \ni \omega \otimes \pi \longmapsto \omega \otimes \mathrm{JL}(\pi) \in \Pi(\widetilde{G}_2(F))$$

が定まる。$G_2(F)$ の L パケットの集合を $\Phi(G_2)_F$, $G_2^*(F)$ の二乗可積分な既約表現からなる L パケットの集合を $\Phi_{\mathrm{disc}}(G_2^*)_F$ と書けば、これらの間の清水-Jacquet-Langlands 対応

$$\mathrm{JL} : \Phi_{\mathrm{disc}}(G_2^*)_F \ni \Pi(\widetilde{\pi}^*) \longmapsto \Pi(\mathrm{JL}(\widetilde{\pi}^*)) \in \Phi(G_2)_F$$

は $\Pi(\tilde{\pi}^*)$ を与える $\tilde{\pi}^*$ の取り方によらず定義可能な全単射である。

最後に Rogawski による $\Phi_{\mathrm{disc}}(G_2^*)_F$ の記述を思い出す。E/F に類体論で対応する $F^\times$ の二次指標を $\omega_{E/F}$ と書く。$\Phi_{\mathrm{disc}}(G_2^*)_F$ の元は次の二つのタイプのうちのいずれかである [Rog90, §12.1]。

(i) 安定 L パケットはそのベースチェンジリフト $\pi\in\Pi(GL(2,E))$ [Rog90, 11.4] が二乗可積分なことで特徴づけられ、単一の元 $\tau^*\in\Pi_{\mathrm{disc}}(G_2^*(F))$ からなる。

(ii) $E^\times$ の非自明な指標 η,μ で、$\eta|_{F^\times}=\mathbf{1}_{F^\times}$, $\mu|_{F^\times}=\omega_{E/F}$ なるものを取る。内視 L パケット $\lambda_{\bar{\mu}}^{G_2^*}(\mathbf{1},\eta)$, $(\eta\neq\mathbf{1})$ はそのベースチェンジリフトが主系列表現 $I(\mu\otimes\eta\mu)$ であることで特徴づけられ、二つの既約スーパーカスプ表現からなる。

以上のもとで $G(F)$ のスーパーカスプでない既約許容表現は次のように分類される。$G_2(F)$ の一次元表現は $\eta|_{F^\times}=\mathbf{1}_{F^\times}$ なる $E^\times$ の指標 η を使って、$\eta_{G_2}(g)=\eta_u(\det g)$ と書けることに注意する。但し、η_u は $\eta_u(z/\sigma(z))=\eta(z)$, $(z\in E^\times)$ で定まる一変数ユニタリ群の指標である。

定理 2.1 ([Kon03]). $I_P^G(\chi[s]\otimes\tau)$, $(s\geq 0)$ は次の場合を除いて既約である。

(1) $I_P^G(\eta[3/2]\otimes\eta_{G_2})=\delta^G(\eta,\eta_{G_2})+J_P^G(\eta[3/2]\otimes\eta_{G_2})$.

(2) $I_P^G(\eta[1/2]\otimes\tau)=\delta^G(\eta,\tau)+J_P^G(\eta[1/2]\otimes\tau)$. ここで $\tau\not\simeq\eta_{G_2}$.

(3) $I_P^G(\mu[1]\otimes\tau)=\delta(\mu,\tau)+J_P^G(\mu[1]\otimes\tau)$. 但し、$\tau\in\mathrm{JL}(\lambda_{\bar{\mu}}^{G_2^*}(\mathbf{1},\eta))$, $(\eta\neq\mathbf{1})$.

(4) $I_P^G(\mu\otimes\tau)=\tau^G(\mu,\tau)_+\oplus\tau^G(\mu,\tau)_-$. 但し、$\tau\in\mathrm{JL}(\Pi^*(\pi))$.

上の等式はいずれも $G(F)$ の長さ有限許容表現の Grothendieck 群の中のそれである。η,μ は $E^\times$ の指標で $\eta|_{F^\times}=\mathbf{1}_{F^\times}$, $\mu|_{F^\times}=\omega_{E/F}$ となるものを表す。また、$\delta^G(\bullet)$ は既約二乗可積分表現を、$\tau^G(\bullet)$ は既約緩増加だが二乗可積分でない表現をそれぞれ表すものとする。

注意 2.2. 対応する $G^*(F)$ の誘導表現の可約点やそこでの既約組成因子は (2) の場合を除いて上と一致している。(2) の場合は

$$I_{P^*}^{G^*}(\eta[1/2]\otimes\eta_{G_2^*}\delta^{G_2^*})=\tau^{G^*}(\eta_{G_2^*}\delta^{G_2^*})+J_{P^*}^{G^*}(\eta[1/2]\otimes\eta_{G_2^*}\delta^{G_2^*})$$

となる [Kon01, 命題 5.8]。ただし $\tau^{G^*}(\eta_{G_2^*}\delta^{G_2^*})$ は既約緩増加だが二乗可積分でない表現である。

3 A パケットの例

緩増加既約許容表現の保型形式の整数論への寄与はそれを含む L パケットを通じて記述される。同様に非緩増加な既約許容表現の寄与はそれを含む **A パケット**と呼ばれる既約表現の有限族を用いて書けると期待されている [Art89]。この節では上で得られた $G(F)$ の既約許容表現を含む A パケットの例を構成する。

3.1 作業仮説

まず [Art89] にある予想のうちで我々が必要とするものを復習しておく。

A パケットやその函手的な性質は対応する A パラメタで決まるのだった。G の L 群 ${}^LG = \widehat{G} \rtimes_{\rho_G} W_F$ および F の局所 Langlands 群 $\mathcal{L}_F = W_F \times SU(2,\mathbb{R})$ を導入する [Kot84]。ここで W_F は F の E を含む代数閉包 $\bar{F}$ の F 上の Weil 群である [Tat79]。これは G の Langlands 双対群 $\widehat{G} = GL(4,\mathbb{C})$ に

$$\rho_G(w)g := \begin{cases} g & w \in W_E \text{ のとき}, \\ \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix} {}^tg^{-1} & \text{それ以外のとき}. \end{cases}$$

で作用している。G と G^* は互いの内部形式なのでその L 群は共通である。まず G^* の **A パラメタ**とは、図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_F & \xrightarrow{\psi|_{\mathcal{L}_F}} & {}^LG \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \\ W_F & = & W_F \end{array}$$

を可換にする連続準同型 $\psi : \mathcal{L}_F \times SL(2,\mathbb{C}) \to {}^LG$ であって、

- $\psi(W_F)$ は相対コンパクトで半単純元からなる。
- $\psi|_{SL(2,\mathbb{C})}$ は解析的。

を満たすものである。2つの A パラメタが**同値**とはそれらが $\widehat{G}$ 共役なことである。G^* の A パラメタの同値類の集合を $\Psi(G^*)$ と書く。これは [KK, 命題 3.2] で分類されている。G の A パラメタ (の同値類) は $\psi \in \Psi(G^*)$ であって何らかの "*relevance condition*" を満たすものとして定義される。現在のところこの "relevance condition" は特定されていないので、このノートでは対応する $G(F)$ の A パケットが空でないものと定めることにする。G の A パケットの同値類の集合を $\Psi(G)$ と書く。

以下では [KK, §3.3] のリスト中の (G.2.b.ii) 型のパラメタ

$$\psi|_{\mathcal{L}_E \times SL(2)} = [(\eta \otimes \rho_{2,SL(2)}) \oplus (\eta' \otimes \rho_{2,SU(2)})] \times p_{W_E}, \quad \psi(w_\sigma) = \left(\begin{array}{c|c} & \mathbf{1}_2 \\ \hline \mathbf{1}_2 & \end{array}\right) \rtimes w_\sigma$$

を考える。ここで η, η' は互いに異なる $E^\times$ の指標で $\eta|_{F^\times} = \eta'|_{F^\times} = \mathbf{1}_{F^\times}$ となるもので、$\rho_{2,SL(2)}$, $\rho_{2,SU(2)}$ はそれぞれ $SL(2)$, $SU(2)$ の 2 次元標準表現を表す。p_{W_E} は射影 $\mathcal{L}_E \twoheadrightarrow W_E$ である。この $\psi \in \Psi(G^*)$ には (非緩増加) L パラメタ

$$\phi_\psi|_{\mathcal{L}_E} = \Big(\eta[1/2] \oplus \eta[-1/2] \oplus (\eta' \otimes \rho_{2,SU(2)})\Big) \times p_{W_E}$$

が対応する [Art89, § 4]。ψ に対応する A パケット $\Pi_\psi(G)$ はこの ϕ_ψ に付随する L パケット $\Pi_{\phi_\psi}(G) = \{J_P^G(\eta[1/2] \otimes \eta'_{G_2})\}$ を含むべきである [Art89, 予想 6.1 (iv)][1]。特に $\psi \in \Psi(G^*)$ は $\Psi(G)$ に属する。

[1] 予想は $G = G^*$ の場合のみを扱っているが、これは ϕ_ψ に付随する放物型部分群が F 有理的であることを保証するためと、A パケットの原点として generic な標準加群の Langlands 商を採用するためである。今のように問題の放物型部分群が F 上定義されている場合にはこうした包含関係が $G \neq G^*$ の場合にも成り立つと期待される。

A パケット $\Pi_\psi(G)$ の内部構造はその S 群

$$\mathcal{S}_\psi(G) := S_\psi(G)/S_\psi(G)^0 Z(\widehat{G})^\Gamma, \quad S_\psi(G) := \mathrm{Cent}(\psi, \widehat{G})$$

を用いて記述される。すなわち "ペアリング"

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{S}_\psi(G) \times \Pi_\psi(G) \longrightarrow \mathbb{C}^1$$

が存在することが期待されている [Art89, 予想 6.1 (iii)]。一般にこの "ペアリング" は必ずしも完全ではないことが知られているが [LL79]、今の場合は完全であると仮定すれば、$\mathcal{S}_\psi(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ から $\Pi_\psi(G)$ は $J_P^G(\eta[1/2]\otimes\eta'_{G_2})$ ともう一つの表現を含むはずである。実際以下で見るように、保型表現論の要請から $\Pi_\psi(G)$ に属するはずである既約二乗可積分表現が局所テータ対応によって構成される。

3.2 局所テータ対応

$(V,(\cdot,\cdot))$ を E 上の 2 次元エルミート空間、$(W,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を E 上の 2 または 4 次元歪エルミート空間とし、対応するユニタリ群をそれぞれ $G(V)$, $G(W)$ と書く。F の非自明指標 ψ_F と $F^\times$ への制限が自明な $E^\times$ の指標 η に対して、ユニタリ双対ペア $G(V)\times G(W)$ の *Weil* 表現 $(\omega_{V,W,\eta} = (\omega_{W,1},\omega_{V,\eta}), \mathcal{S}_{V,W,\eta})$ が定まる [HKS96]。$G(V)$ の既約許容表現 π_V の $\omega_{V,W,\eta}$ による局所 θ 対応を $\theta_\eta(\pi_V, W)$ と書こう。ただし π_V が $\omega_{V,W,\eta}$ の商に表れないときには $\theta_\eta(\pi_V,W) := 0$ とする。同様に $\theta_\eta(\pi_W, V)$ も定義される。E 上の与えられた次元の (歪) エルミート空間の等距離類は二つある。以下ではそのうち双曲的なものを V^+, W^+, そうでないものを V^-, W^- 等と書く。また $W^\pm$ の次元 d を明示したいときには $W_d^\pm$ と書く。我々の構成の鍵は次である。

定理 3.1 (ε 二分性 [KK], Th. 5.4). $\epsilon(V^\pm) := \pm 1$ と書く。
(i) Π^* を $G_2^*(F) = G(W_2^+)$ の L パケットとし、$\tau^* \in \Pi^*$ とする。E 上の 2 次元エルミート空間 V に対して、$\theta_\eta(\tau^*, V) \neq 0$ であるためには

$$\varepsilon(1/2, \Pi^*\times\eta^{-1}, \psi_F)\omega_{\Pi^*}(-1)\lambda(E/F,\psi_F)^{-2} = \epsilon(V) \tag{3.1}$$

が必要十分である。ただし $\varepsilon(s, \Pi^*\times\eta^{-1},\psi_F)$ は Langlands-Shahidi 理論による η^{-1} でひねった Π^* の標準 ε 因子であり [Sha90]、ω_{Π^*} は Π^* の元の (共通する) 中心指標である。$\lambda(E/F,\psi_F)$ は Langlands の λ 因子である [Lan70]。
(ii) 上の場合には局所テータ対応は全単射

$$\Pi^* \ni \tau^* \longmapsto \theta_\eta(\tau^*, V) \in \begin{cases} \eta_G \Pi^{*,\vee} & \epsilon(V) = 1 \text{ のとき} \\ \eta_G \mathrm{JL}(\Pi^*)^\vee & \text{その他のとき} \end{cases}$$

を与える。ただし $\Pi^\vee$ は L パケット Π の元の反傾表現たちからなる L パケットを表す。

$\Pi_\psi(G)$ を構成するには、$\tau = \eta'_{G_2^*}\delta^{G_2^*}$ に定理を適用する。

$$\varepsilon(1/2, \eta'_{G_2^*}\delta^{G_2^*}\times\eta^{-1},\psi_F)\lambda(E/F,\psi_F)^{-2} = 1$$

だから [KK, § 6.1.2 (2.b.ii)]、

$$\theta_\eta(\eta'_{G_2^*}\delta^{G_2^*}, V_2^+) = (\eta\overline{\eta}')_{G_2^*}\delta^{G_2^*}, \quad \theta_\eta(\eta'_{G_2^*}\delta^{G_2^*}, V_2^-) = \{0\} \tag{3.2}$$

である。さて、テータ二分性 [HKS96, 系 4.4] から $\theta_\eta((\eta\overline{\eta}')_{G_2}, W_2^\pm)$ の片方だけが消えていない。もし $\Theta_\eta((\eta\overline{\eta}')_{G_2}, W_2^+) \neq \{0\}$ ならそれは $\eta'_{G_2^*}\delta^{G_2^*}$ でなくてはならず、これは (3.2) に矛盾する。つまり

$$\Theta_\eta((\eta\overline{\eta}')_{G_2}, W_2^+) = \{0\}, \quad \Theta_\eta((\eta\overline{\eta}')_{G_2}, W_2^-) = \eta'_{G_2}$$

がわかる。これと局所テータ対応の**誘導原理** [MVW87, 3 章 IV.4] を組み合わせて

$$\Theta((\eta\overline{\eta}')_{G_2}, W_4^-) \simeq J_P^G(\eta[1/2] \otimes \eta'_{G_2})$$

を得る。一方、$\mathrm{JL}((\eta\overline{\eta}')_{G_2}) \simeq (\eta\overline{\eta}')_{G_2^*}\delta^{G_2^*}$ を見ると、退化 Whittaker 模型と Jacquet 加群の考察により

$$\theta_\eta((\eta\overline{\eta}')_{G_2^*}\delta^{G_2^*}, W^-) \simeq \delta^G(\eta', \eta_{G_2})$$

がわかる。これらから

$$\Pi_\psi(G) := \{J_P^G(\eta[1/2] \otimes \eta'_{G_2}), \delta^G(\eta', \eta_{G_2})\}$$

であると期待される。

注意 3.2. η と η' を入れ換えると A パラメタ

$$\psi'|_{\mathcal{L}_E \times SL(2)} = (\eta' \otimes \rho_{2,SL(2)}) \oplus (\eta \otimes \rho_{2,SU(2)}) \quad \psi'(w_\sigma) = \left(\begin{array}{c|c} & \mathbf{1}_2 \\ \hline \mathbf{1}_2 & \end{array}\right) \rtimes w_\sigma.$$

に対する A パケット $\Pi_{\psi'}(G) = \{J_P^G(\eta'[1/2] \otimes \eta_{G_2}), \delta^G(\eta, \eta'_{G_2})\}$ が得られる。また、

$$\varphi|_{\mathcal{L}_E} = (\eta \oplus \eta') \otimes \rho_{2,SU(2)}, \quad \varphi(w_\sigma) = \left(\begin{array}{c|c} & \mathbf{1}_2 \\ \hline \mathbf{1}_2 & \end{array}\right) \rtimes w_\sigma.$$

に対する二乗可積分な L パケットは $\Pi_\varphi(G) = \{\delta^G(\eta, \eta'_{G_2}), \delta^G(\eta', \eta_{G_2})\}$ である。

これらのパケットに対応する G^* のパケットは次の通りである [KK, § 6.1.2 (2.b.ii)]。

$$\Pi_\psi(G^*) = \{J_{P^*}^{G^*}(\eta[1/2] \otimes \eta'_{G_2^*}\delta^{G_2^*}), \pi_c\}, \quad \Pi_{\psi'}(G^*) = \{J_{P^*}^{G^*}(\eta'[1/2] \otimes \eta_{G_2^*}\delta^{G_2^*}), \pi_c\},$$
$$\Pi_\varphi(G^*) = \{\delta^G(\eta, \eta'), \pi_c\}$$

ここで $\pi_c := \Theta_\eta((\eta\overline{\eta}')_{G(V_-)}, W^+)$ は既約スーパーカスプ表現である。G の場合には $\delta^G(\eta, \eta'_{G_2}) \neq \delta^{G^*}(\eta', \eta_{G_2})$ であったが、準分裂な群 G^* の場合には $\delta^{G^*}(\eta, \eta') \simeq \delta^{G^*}(\eta', \eta)$ であるため、スーパーカスプ表現 π_c が表れることを注意する。

注意 3.3. 楕円的でない A パラメタ [KK, 命題3.2 (M_1)]:

$$\psi^{M_1}_{\mu,\eta}|_{\mathcal{L}_E\times SL(2)} = [(\mu\otimes\mathbf{1}_2)\oplus(\eta\otimes\rho_{2,SL(2)})]\times p_{W_E},\quad \psi^{M_1}_{\mu,\eta}(\omega_\sigma) = \left(\begin{array}{cc|c} & & \mathbf{1}_2 \\ \hline & 1 & \\ 1 & & \end{array}\right)\rtimes w_\sigma$$

の A パケットは $\Pi_{\psi_{\mu,\eta}} = \{\tau^G(\mu,\eta_{G_2})_\pm\}$ である。これは L パラメタ

$$\phi^{M_1}_{\mu,\eta}|_{\mathcal{L}_E} = [(\mu\otimes\mathbf{1}_2)\oplus(\eta\otimes\rho_{2,SU(2)})]\times p_{W_E},\quad \phi^{M_1}_{\mu,\eta}(\omega_\sigma) = \left(\begin{array}{cc|c} & & \mathbf{1}_2 \\ \hline & 1 & \\ 1 & & \end{array}\right)\rtimes w_\sigma$$

に対応する L パケット $\Pi_{\phi_{\mu,\eta}} = \{\tau^G(\mu,\eta_{G_2})_\pm\}$ と同じであることに注意する。

参考文献

[Art89] James Arthur. Unipotent automorphic representations: conjectures. *Astérisque*, (171-172):13–71, 1989. Orbites unipotentes et représentations, II.

[Bor79] A. Borel. Automorphic L-functions. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pages 27–61. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[HKS96] Michael Harris, Stephen S. Kudla, and William J. Sweet. Theta dichotomy for unitary groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(4):941–1004, 1996.

[JL70] H. Jacquet and R. P. Langlands. *Automorphic forms on* GL(2). Springer-Verlag, Berlin, 1970. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114.

[KK] Kazuko Konno and Takuya Konno. CAP automorphic representations of $U_{E/F}(4)$ I. Local theory. preprint.

[Kon01] Kazuko Konno. Induced representations of U(2, 2) over a p-adic field. *J. Reine Angew. Math.*, 540:167–204, 2001.

[Kon03] Kazuko Konno. Unipotent representations of unitary groups in 4 variables. *Proc. RIMS*, 1348:118–133, 2003.

[Kot84] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula: cuspidal tempered terms. *Duke Math. J.*, 51(3):611–650, 1984.

[Lan70] R. P. Langlands. On Artin's L-function. *Rice Univ. Studies*, 56:23–28, 1970.

[LL79] J.-P. Labesse and R. P. Langlands. L-indistinguishability for $SL(2)$. *Canad. J. Math.*, 31(4):726–785, 1979.

[MVW87] Colette Mœglin, Marie-France Vignéras, and Jean-Loup Waldspurger. *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, volume 1291 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Rog90] Jonathan D. Rogawski. *Automorphic representations of unitary groups in three variables*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[Sha90] Freydoon Shahidi. A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups. *Ann. of Math. (2)*, 132(2):273–330, 1990.

[Shi65] Hideo Shimizu. On zeta functions of quaternion algebras. *Ann. of Math. (2)*, 81:166–193, 1965.

[Tat79] J. Tate. Number theoretic background. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pages 3–26. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.