数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 208-214

2次のSiegel保型形式とAbel曲面のゼータ関数に関するR. Salvati Manni-J. Top予想の証明

岡崎　武生 (大阪大学大学院理学研究科)

1　予想の紹介と結果

吉田敬之先生により全ての有理数体上定義されたAbel曲面のHasse-Weilゼータ関数は或る2次のSiegel保型形式のSpinor-L関数に一致するのではないかということが予想されていますが、R. Salvati Manni-J. Top予想とは、この吉田予想の成立しているAbel曲面とSiegel保型形式の候補を与えるものでした。

Abel曲面としては、$\mathbb{Q}$上定義された超楕円曲線 $\mathbf{C}: y^2 = x^5 - x$ のヤコビアン $J(\mathbf{C})$ をとり、2次のSiegel保型形式の方は、井草テータ関数の4積で以下の様に定義されます。

characteristic $m = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{R}^4$ に対して, 次数2のSiegel上半空間 $\mathfrak{H}_2$ 上の井草テータ関数 θ_m を

$$\theta_m(Z) := \sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{e}\Big(\frac{Z}{2}\begin{bmatrix} a_1+m_1 \\ a_2+m_2 \end{bmatrix} + (a_1+m_1, a_2+m_2)\begin{pmatrix} m_3 \\ m_4 \end{pmatrix}\Big)$$

(但し、$\mathbf{e}(t) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t), t \in \mathbb{R}, Z \in \mathfrak{H}_2, Z[x] = {}^t xZx$) とおき、
$n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{R}^4$ に対して

$$\Theta_n(Z) = \theta_{[(0,0,0,\frac{1}{4})+n]}(Z)\theta_{[(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\frac{1}{4})+n]}(Z)\theta_{[(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4})+n]}(Z)\theta_{[(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4})+n]}(Z)$$

とおきます。このとき、$n_i = 0$ or $\frac{1}{2}, 1 \le i \le 3, n_4 = 0$ とする事で得られる8つの $\Theta_n(Z)$ が、そのSiegel保型形式の候補です。なお、これらの Θ_n は $\Gamma(4) = Ker(Sp_2(\mathbb{Z}) \to Sp_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}))$ 上定義された $\Gamma(8)$ 上trivialな或るcongruence-character χ_1 付きのカスプ形式の空間に入っています。

予想
8 つの Θ_n は全て、Hecke 同時固有カスプ形式で *Spinor L*-関数は全て、$J(\mathbf{C})$ の *Hasse-Weil*ゼータ関数と一致する。*(*但し、2 の *Euler*因子は除く。*)*

というものでした。そして、

主定理
『この予想は全て正しい。』

を示したので、その証明方法を紹介します。

2 証明のアウトライン

証明の手順は以下の①〜③です。
①まず、Hasse-Weil ゼータ関数 $\zeta(s, J(\mathbf{C}))$ は、或る Grössen-character λ で具体的に書けます。
何故なら、楕円曲線 $E: y^2 = x(x-1)(x-3-2\sqrt{2})$ に対して、

$$\begin{aligned} \pi: C \quad &\ni \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{x(x+1)}{x-1} \\ \frac{y(x-1-\sqrt{2})}{(x-1)^2} \end{pmatrix} \in E \\ J(\mathbf{C}) \quad &\cong \quad Res_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(E) \quad \text{isogenous over } \mathbb{Q} \end{aligned}$$

($Res_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}$ は Weil restriction) と分解され、さらに楕円曲線 E は $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ 上の虚数乗法

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\sqrt{-2}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \frac{-(x-1)(x-3-2\sqrt{2})}{2x} \\ \frac{\sqrt{-2}y(x^2-3-2\sqrt{2})}{4x^2} \end{pmatrix}$$

をもつので、 8 分体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\mathbf{e}(1/8))$ の Grössen-character λ で志村-Milne の虚数乗法論により、

$$\begin{aligned} \zeta(s, J(\mathbf{C})) \quad &= \quad \zeta(s, E/\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \\ = L(s, \lambda) \quad &= \quad \prod_{(\mathfrak{P},2)=1} (1 - \lambda(\mathfrak{P}) N\mathfrak{P}^{-s})^{-1} \end{aligned}$$

とかけます。ここで、$\mathbb{Q}(\mathbf{e}(1/8))$ のイデアル (2) に関する類数は 1 なので、

$$\lambda(\mathfrak{P}) = \mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\mathbf{e}(1/8))/\mathbb{Q}(\sqrt{-2})}(\alpha), \mathfrak{P} = (\alpha), \alpha \equiv 1 \pmod 2$$

と完全に定義されます。

そして、Grössen-character $\mu:\mathbb{Q}(\sqrt{-2})_{\mathbb{A}}^{\times}\to\mathbb{C}^{\times}$ を、$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ のイデアル $(2\sqrt{-2})$ に関する類数は1であることに注意して

$$\mu(\mathfrak{p})=\alpha,\mathfrak{p}=(\alpha),\alpha\equiv 1\pmod{2\sqrt{-2}}$$

と定義すると

$$L(s,\lambda)=L(s,\mu)L(s,\overline{\mu})$$

と分解されます。ここで、$\overline{\cdot}$ は複素共役を意味します。

② Spinor L-関数が $L(s,\lambda)=L(s,\mu)L(s,\overline{\mu})$ になる Siegel 保型形式が、以下の方法 i) ～ iii) で構成できます。

i) まず、

$$\theta_\mu(z)=\sum_{\mathfrak{n}}\mu(\mathfrak{n})\mathbf{e}(N(\mathfrak{n})z),z\in\mathfrak{H}_1$$

($\mathfrak{n}$ は2と互いに素な $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ の整イデアルを走る) とおくと、θ_μ は Hecke eigen cusp-form で $L(s,\theta_\mu)=L(s,\mu)$ となります。また、μ の conductor から、

$$\theta_\mu\in S_2(\Gamma_0(64),\omega_2)$$

であることもわかります。ここで、S_2 で楕円カスプ形式の空間をあらわし、$\Gamma_0(N)=\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})\mid c\equiv 0\pmod{N}\}$、$\omega_2$ は2次拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ に関する Dirichlet character です。
即ち、$\theta_\mu(\gamma\cdot z)=j(\gamma,z)^2\omega_2(a)\theta_\mu(z)$ となっています。また、同様に

$$\theta_{\overline{\mu}}\in S_2(\Gamma_0(64),\omega_2)$$

です。

ii) θ_μ は2に関する Fourier 係数はすべて消えているので2に関しては、super-cuspidal representation となっています。θ_μ のレベルは2冪のみなので、他の有限素点では主系列表現となっていることから、Jacquet-Langlands 理論により、2でのみ分岐する $\mathbb{Q}$ 上定義された定符号四元数環 $D_{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}+\mathbb{Q}i+\mathbb{Q}j+\mathbb{Q}ij,i^2=j^2=1,ij=-ji$ の或る保型形式 φ で $L(s,\varphi)=L(s,\mu)$ となるものが存在します。ここで、$D_{\mathbb{Q}}$ の order R 上の character χ 付きの保型形式 φ を

$$\varphi(\gamma gk)=\chi(k)\varphi(g),\gamma\in D_{\mathbb{Q}}^{\times},g\in D_{\mathbb{A}}^{\times},k\in\prod_{p<\infty}R_p^{\times}$$

という形の $D_{\mathbb{Q}}$ のイデール $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ 上の $\mathbb{C}$-valued な連続関数で、以下 $\mathcal{A}(R,\chi)$ でこのような関数の空間を表すことにします。

一般に、$D_{\mathbb{A}}^{\times}$ は

$$D_{\mathbb{A}}^{\times}=\bigcup_{i}^{h(R)} D_{\mathbb{Q}}^{\times}\alpha_i(\mathbb{H}\times\prod_p R_p^{\times})\ \ (\text{有限直和}), \mathbb{H}=D_{\infty}$$

と分解できるので、α_i での値を決めることで φ は、決定できます。ここで、$h(R)$ は R に関する類数です。また、これらの関数は $\varphi(\alpha_i)$ でのみきまることから、$\mathcal{A}(R,\chi)$ は有限次元ですし、Hecke operator の計算も容易です。また、自動的に $L(s,\overline{\varphi})=L(s,\overline{\mu})$ となります。

iii) ii) で定めた保型形式のペア $\varphi,\overline{\varphi}$ から、吉田リフト (theta-lift の一種) で Siegel 保型形式 $Y(\varphi,\overline{\varphi})$ が構成できます。吉田リフトでは、一般に $L(s,Y(\varphi_1,\varphi_2))=L(s,\varphi_1)L(s,\varphi_2)$ となっているので、

$$L(s,Y(\varphi,\overline{\varphi}))=L(s,\varphi)L(s,\overline{\varphi})=L(s,\mu)L(s,\overline{\mu})=\zeta(s,J(\mathbf{C}))$$

ですから、こうして所望の Siegel 保型形式が構成できます。

この吉田リフトの形は、$\mathcal{A}(R,\chi)$ に対応する以下の条件を満たす、$D_{\mathbb{A}}\oplus D_{\mathbb{A}}$ の Schwartz function f を

1. 無限素点 ∞ に於いて $f_{\infty}=\exp(-2\pi(\mathrm{N}(x_1)+\mathrm{N}(x_2)))$ for $x_1,x_2\in\mathbb{H}$.

2. 有限素点 p で χ_p(χ の p-component) が trivial なら、f_p は $R_p\oplus R_p$ の特性関数.

3. 有限素点 p で χ_p が trivial でないなら、f_p は全ての $k_1,k_2\in R_p^{\times}$ と全ての $(x_1,x_2)\in D_p\oplus D_p$ に対して

$$f_p(k_1^{-1}x_1k_2,k_1^{-1}x_2k_2)=\overline{\chi_p(k_1)}\chi_p(k_2)f_p(x_1,x_2).$$

を取ると、

$$\begin{aligned}F(Z)&=\sum_{i,j}^{h(R)}n_i^{-1}n_j^{-1}\sum_{\delta_i\in D_{\mathbb{Q}}}\Big\langle\prod_{p<\infty}f_p(\alpha_i^{-1}\delta_1\alpha_j,\alpha_i^{-1}\delta_2\alpha_j)\\&\quad\times\mathbf{e}(\mathrm{N}(\delta_1)z_1+\mathrm{Tr}(\delta_1\cdot\delta_2^{*})z_2+\mathrm{N}(\delta_2)z_3),\overline{\varphi_1(\alpha_i)}\varphi_2(\alpha_j)\Big\rangle,\\Z&=\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_2&z_3\end{pmatrix}\in\mathfrak{H}_2\end{aligned}$$

で与えられます。$\langle , \rangle$ は Hermitian 内積、$n_i = |D_{\mathbb{Q}} \cap \alpha_i^{-1} R_{\mathbb{A}} \alpha_i|$、$*$ は $D_{\mathbb{Q}}$ の main-involution、N, Tr は被約ノルム、被約トレースを表しています。

③　最後に適当な $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ の保型形式 φ s,t $L(s,\varphi) = L(s,\mu)$ と φ の入っている空間 $\mathcal{A}(R,\chi)$ に対応した Schwartz-function $\prod_p f_p$ を取る事で予想の 8 つの Θ_n が全て得られる事を示します。しかし、実は 8 つの Θ_n は或る 2 の Hecke operator 達で移りあうことがわかるので、$\Theta_{(0,0,0,0)}$ に関して証明すれば十分です。

$$\begin{aligned}\Theta_{(0,0,0,0)}(8Z) &= \sum_{x_i,y_j\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}\Big(\frac{7}{8} + \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4} + \frac{x_3+x_4}{2}\Big)\\ &\quad \times\mathbf{e}\Big(Z\begin{bmatrix}2x_1\\2y_1\end{bmatrix} + Z\begin{bmatrix}2x_2+1\\2y_2+1\end{bmatrix} + Z\begin{bmatrix}2x_3\\2y_3+1\end{bmatrix} + Z\begin{bmatrix}2x_4+1\\2y_4+1\end{bmatrix}\Big)\end{aligned}$$

となり、$D_{\mathbb{Q}}$ の元 δ_1, δ_2 を

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 2x_1 + (2x_2+1)\cdot i + (2x_3)\cdot j + (2x_4+1)\cdot ij,\\ \delta_2 &= 2y_1 + (2y_2+1)\cdot i + (2y_3+1)\cdot j + (2y_4+1)\cdot ij,\end{aligned}$$

とおく。すると、$\Theta_{(0,0,0,0)}$ は

$$\begin{aligned}\Theta_{(0,0,0,0)}(8Z) &= \sum_{x_i,y_i\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}\Big(\frac{7}{8} + \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4} + \frac{x_3+x_4}{2}\Big)\\ &\qquad \times\mathbf{e}(\mathrm{N}(\delta_1)z_1 + \mathrm{Tr}(\delta_1\cdot\delta_2^*)z_2 + \mathrm{N}(\delta_2)z_3)\end{aligned}$$

となります。

さて、この式と吉田リフトの形を比べながら、Schwartz-function f_p を

1. 素点 2 で f_2 を δ_1, δ_2 の座標 x_i, y_i が全て $\mathbb{Z}_2$ に入っているとき、$f_2(\delta_1,\delta_2) = \mathbf{e}\Big(\frac{7}{8} + \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4} + \frac{x_3+x_4}{2}\Big)$、それ以外は 0 とおきます。
2. 他の有限素点 p で f_p を $x_i, y_i \in \mathbb{Z}_p$ のとき 1 、それ以外は 0 とおきます。

と選びます。次に $D_{\mathbb{Q}}$ の order R と R の character χ を、

$$f_p(k_1\delta_1, k_1\delta_2) = \overline{\chi_p(k_1)} f_p(\delta_1,\delta_2),\ \ k_1 \in R_p^{\times}$$

という条件から、

$$\begin{aligned}R &= \mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}(i+j) + 2\mathbb{Z}(j+ij) + 4\mathbb{Z}ij,\\ \chi &= \omega_2(a_1 + 4(a_2+a_3+a_4)), \text{for } a_1 + 2a_2(i+j) + 2a_3(j+ij) + 4a_4 ij \in R_2^{\times}\end{aligned}$$

で、2以外の素点pではR_pはmaximal order χ_pはtrivialと決定できます。
Rの類数$h(R)$は4で、

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1, \alpha_2 = (i+j+ij)_2 \times \prod_{v\neq 2} 1_v,\\ \alpha_3 &= (1+2i)_2 \times \prod_{v\neq 2} 1_v, \alpha_4 = (6+i+7j+3ij)_2 \times \prod_{v\neq 2} 1_v\end{aligned}$$

ととれます。そして、$\mathcal{A}(R,\chi)$のBrandt行列 (Hecke-operatorの有限次表現行列) を計算して$L(s,\varphi) = L(s,\mu)$となっていそうな固有保型形式φを

$$\varphi(\alpha_1) = 1, \varphi(\alpha_2) = -\sqrt{-1}, \varphi(\alpha_3) = \varphi(\alpha_4) = 0$$

と選びます。

このφとその複素共役$\overline{\varphi}$と上で定義したSchwartz function fをもちいて、吉田リフト$Y(\varphi,\overline{\varphi})$を計算します。

すると、Schwartz-function fの選び方から、当然$\Theta_{(0,0,0,0)}(8Z)$と$Y(\varphi,\overline{\varphi})$は非常に近い形をしています。ただ、$(\alpha_i,\alpha_j) \neq (1,1)$のパートがはみ出しています。

しかし、このはみだしたパートは結局cancelすることが容易な計算でわかります。即ち、$\Theta_{(0,0,0,0)}(8Z) = Y(\varphi,\overline{\varphi})$ですから、$\Theta_{(0,0,0,0)}(8Z)$はHecke同時固有形式で、$L(s,\Theta_{(0,0,0,0)}) = L(s,\varphi)L(s,\overline{\varphi})$であることが解りました。(但し、Bad prime 2に関するEuler factorは除きます)

一方、φから楕円保型形式θ_φを

$$\theta_\varphi(z) = \sum_i^{h(R)} n_i^{-1} \sum_{\delta\in D_{\mathbb{Q}}} \left\langle \prod_{p<\infty} f_p^{(1)}(\delta\alpha_i)\mathbf{e}(\mathrm{N}(\delta)z), \varphi(\alpha_i)\right\rangle,$$

と構成してθ_φはHecke固有形式$L(s,\varphi) = L(s,\theta_\varphi)$で$\theta_\varphi \in S_2(\Gamma_0(64),\omega_2)$であることがわかります。ここで$D_p$のSchwartz-function $f_p^{(1)}$は、

1. 素点2では、$\delta \in R_2^\times$なら$f_2^{(1)}(\delta) = \chi_2(\delta)$でそれ以外では0

2. 他の有限素点pでR_pの特性関数

とおいています。この構成法$\varphi \to \theta_\varphi$は一般のHecke固有形式$\varphi$からHecke楕円保型形式を構成するものです。

そして $dim_{\mathbb{C}} S_2(\Gamma_0(64), \omega_2) = 2$ と計算してこの空間 $S_2(\Gamma_0(64), \omega_2)$ は $\theta_\mu, \theta_{\bar{\mu}}$ で張られていることがわかるので $\theta_\mu = \theta_\varphi, \theta_{\overline{\mu}} = \theta_{\overline{\varphi}}$ となるので

$$L(s, \varphi) = L(s, \mu), L(s, \overline{\varphi}) = L(s, \overline{\mu})$$

と結論付けられて予想は完全に証明されました。最後に、$\theta_\varphi = \theta_\mu$ を示せたのは、たまたま $dim_{\mathbb{C}} S_2(\Gamma_0(64), \omega_2) = 2$ となっていたからというわけではないことを注意しておきます。

[P-Y] などによりカスプ形式の Fourier 係数がその重さ、レベルに対応した或る定数個消えていればそのカスプ形式自身が 0 であるという結果があるので、Fourier 係数を沢山計算することで $\theta_\varphi = \theta_\mu$ を示すという手段もあります。

参考文献

[I-K-O] T. Ibukiyama, T. Katsura and F. Oort: Super singular curves of genus two and class numbers. Composito Math. **57** (1986), 127-152

[J-L] H. Jacquet and R. P. Langlands :Automorphic forms on GL(2), Lecture Notes in Math. **114**

[M] J. S. Milne: On the arithmetic of abelian varieties, Invent. Math. **17** (1972), 177-190.

[P-Y] C. Poor and D. Yuen: LInear dependence among Siegel modular forms. Math. Ann. **318**, 205-234(2000)

[SM-T] R. Salvati Manni and J. Top: Cusp forms of weight 2 for the group $\Gamma(4,8)$, Amer. J. Math. **115** (1993), 455-486.

[S-T] G. Shimura and Y. Taniyama: Complex multiplication of abelian varieties, Mathematical Societiy of Japan (1961).

[Y] H. Yoshida: Siegel's modular forms and the arithmetics of quadratic forms, Invent. Math. **60** (1980), 193-248.