数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 6-21

On Newforms of half-integral weight in the case of level 2^m

上田 勝 (奈良女子大学理学部)

k を正の整数，M を任意の正の整数とし，$S(k,M)$ をウェイト k, level M のカスプ形式の空間とする．さらに level M の Newform のなす空間を $S^0(k,M)$ と表すことにすると，この Newform の空間は次のような重要な性質を持っていた．

(1) $S^0(k,M)$ はヘッケ作用素 $T(n)$ の同時固有関数からなる基底を持ち，それらの基底は，ほとんど全ての固有値が一致すれば一意に決まる．(Strong multiplicity one property = S.M.O.)

(2) $S(k,M)$ は $S^0(k,M')$ $(0<M'\mid M)$ という Newform の空間から explicit に構成できる．

整数ウェイトの保型形式の研究に Newform の理論が大変役に立った事から，この理論を半整数ウェイトのカスプ形式に拡張できないかと考えるのは自然である．

【問題】半整数ウェイトで Newform を構成できるか？

ここでいう半整数ウェイトの Newform とは，整数ウェイトの時と同様に S.M.O. を満たすカスプ形式で，それらの生成する空間から，もともとの空間が explicit に構築されるものであるとする．

今回，この問題を level 2^m の場合に肯定的に解決できたので，その結果を報告する．

記号と準備

N を 4 で割り切れる正の整数．χ: $(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times\to\boldsymbol{C}^\times$ を N を法とする even quadratic Dirichlet character とする．ウェイト $k+1/2$, level N, 指標 χ のカスプ形式の空間を $S(k+1/2,N,\chi)$ と表す．また，任意の正の整数 M に対して，$S(2k,M)$ で，ウェイト $2k$, level M のカスプ形式の空間を表す．

よく知られているように空間 $S(k+1/2,N,\chi)$ と $S(2k,N/2)$ の間には**志村対応**と呼ばれる対応が存在する．その一つの定式化として，我々は Hecke 作用素を用いたものを採用することにする．

もう少し正確に言うと，整数ウェイトの空間 $S(2k,N,\chi)$ と半整数ウェイトの空間 $S(k+1/2,N/2)$ は単にベクトル空間というだけではなく，ともに Hecke 作用素を通じて Hecke 環が作用する Hecke 加群と考えられる．つまり，$S(2k,N,\chi)$ と $S(k+1/2,N/2)$ の上に Hecke 環の表現が定義出来る．

整数ウェイトの Newform 理論によれば，整数ウェイトの Newform は Hecke 環の作用の固有函数（=固有ベクトル）を与えているわけである．したがって，Hecke 作用素に基づいて志村対応を考えるということは，半整数ウェイトの保型形式の空間 $S(k+1/2,N,\chi)$ の Hecke 加群としての構造を考えるということにほかならない．

そして，この立場での志村対応とは，ウェイト $k+1/2$ のカスプ形式でヘッケ作用素 $\tilde{T}(n^2)$ の同時固有形式になっているものに対して，ウェイト $2k$ のヘッケ作用素 $T(n)$ に関する同時固有形式を対応させる，というものになる．

この志村対応により，半整数ウェイトの Newform を見出すために，整数ウェイトの Newform の理論を用いることが可能になる．そして，そのためには，ヘッケ環の二つの表現を比較する事が必要であるから，それぞれの空間上でのヘッケ作用素のトレースの計算とそれらの比較が必要となってくる．

1 歴史

1.1 Niwa の結果

半整数ウェイトの Hecke 作用素のトレースを explicit に計算し，比較したのは Niwa [N, 1977] が最初の試みであった．この論文において，Niwa は M が squarefree の奇数として，level $N=4M$，χ が even quadratic character となるときを取り扱っている．そして，土方の跡公式と志村の跡公式を用いて，Hecke 作用素のトレースを具体的に計算して比較を行い，次のトレース間の等式を示した．

命題 1.1 (Niwa's trace identity). M を squarefree な奇数であるとする．また，χ を $4M$ を法として定義される quadratic Dirichlet character であるとする．$4M$ と互いに素な正の整数 n に対して次の Hecke 作用素のトレースの等式が成立する．

$$\mathrm{tr}\Big(\tilde{T}(n^2);S(k+1/2,4M,\chi)\Big)=\mathrm{tr}(T(n);S(2k,2M))$$

ここで，$T(n)$ と $\tilde{T}(n^2)$ はそれぞれ整数ウェイトと半整数ウェイトの Hecke 作用素である． □

前に述べたようにこのトレースの等式から，Hecke 環上の加群として次の同型が成立する．

定理 1.1. M を squarefree な奇数であるとする．また，χ を $4M$ を法として定義される quadratic Dirichlet character であるとする．このとき，次の Hecke 加群としての同型が成立する．

$$S(k+1/2,4M,\chi) \cong S(2k,2M)\ .$$

□

さて，上の定理において，$M=1$ としてみると，$S(k+1/2,4,\chi) \cong S(2k,2)$ となる．そして level 2 の空間 $S(2k,2)$ の中には，level 1 の空間 $S(2k,1)$ が Hecke 部分加群として含まれているのであった．したがって，$S(k+1/2,4,\chi)$ の中に，$S(2k,1)$ に対応する**良い部分空間**が存在し，志村対応でよい挙動を示すのではないかと期待できる．

1.2 Kohnen の結果

Kohnen は論文 [K, 1980] において，$S(2k,1)$ に対応する**良い部分空間**を見出すという問題を解決した．さらに，この良い部分空間に関する半整数ウェイトの Newform の理論を，level が $4M$, M:squarefree odd integer で，χ が quadratic の場合に構築した．これを説明して行こう．

定義 1.1. M を正の奇数であるとし，χ を $N=4M$ を法として定義される quadratic Dirichlet character であるとする．そして，χ の local 2-成分を χ_2 とおく．この時，

$$pl_4(k+1/2,N,\chi) := \left\{ \begin{array}{l} f=\sum_{n\geqq 1} a(n)q^n \in S(k+1/2,N,\chi)\ ; \\ a(n)=0 \text{ if } (-1)^k\chi_2(-1)\,n \equiv 2,3 \pmod 4 \end{array} \right\}$$

と記号をおき，この部分空間を（Kohnen の）**plus 空間**と呼ぶことにする．ただし，$q=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,z)$ である．

この plus 空間はヘッケ作用素 $\tilde{T}(n^2)$ で閉じており，$S(k+1/2,N,\chi)$ のヘッケ部分加群になる事が証明できる ([K]).

Kohnen は plus 空間上の Hecke 作用素 $\tilde{T}(n^2)$, $(n, 2M) = 1$ のトレースを志村の跡公式を用いて計算し，次のトレースの間の等式を得た．

命題 1.2 (Kohnen's trace identity). M を squarefree な奇数であるとする．また，χ を $4M$ を法として定義される quadratic Dirichlet character であるとする．

$4M$ と互いに素な正の整数 n に対して次の Hecke 作用素のトレースの等式が成立する．

$$\text{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); pl_4(k+1/2, 4M, \chi)\Big) = \text{tr}(T(n); S(2k, M)) \tag{1}$$

□

したがって，前の Niwa の結果と同様にして次の定理を得る．

定理 1.2. M を squarefree な奇数であるとする．また，χ を $4M$ を法として定義される quadratic Dirichlet character であるとする．このとき，次のヘッケ加群としての同型が成立する．

$$pl_4(k+1/2, 4M, \chi) \cong S(2k, M)\,. \tag{2}$$

□

これらの結果を用いて，Kohnen は M が squarefree odd integer の仮定の下で，pl_4 に対するニューフォームの理論を確立した．

1.3 一般の plus 空間について

Niwa や Kohnen の結果に出てくる squarefree の仮定を取り除くことが望まれるが，squarefree の仮定を外すと，Newform 理論の構成以前にまず問題になるのは，Niwa や Kohnen の得た様なきれいなトレースの等式が成立しなくなるという事実である．

これは，例えば具体例 $S(3/2, 4 \times 5^2)$ を見るとよい．この空間は 2 次元で，同じ固有値のシステムに属する二つの一次独立なカスプ形式を持つ．したがって，重複度 2 が出てきて，トレースの等式は成り立たない．

筆者はこの場合を扱い，最終的に，non-squarefree case を扱うには Hecke 作用素だけではなく，Twisting 作用素 R_ψ を付けたヘッケ作用素を考え，それらの trace identity

を用いればよいという結果を得た（結果については [U2] を見よ）．ここで，Dirichlet 指標 ψ に対する R_ψ とは，$f = \sum_{n\geqq 1} a(n)q^n$ に対して，

$$f \mid R_\psi := \sum_{n\geqq 1} \psi(n)a(n)q^n$$

というものである．

この場合の関係式をすべて書き上げるのは繁雑になるだけなので，一番見やすい level $4p^m$, p:素数, $m \geqq 2$ の場合のみ書いてみよう．

例 1.1. $0 < n \in \boldsymbol{Z}$, $(n, 2p) = 1$ であるとする．このとき，次のトレース関係式が成立する．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 4p^m, \chi)\Big) \\
&\quad = \mathrm{tr}(T(n); S(2k, 2p^m)) + \sum_{a=1}^{[m/2]} \lambda(p, n; a)\, \mathrm{tr}\big(W(p^{2a})T(n); S(2k, 2p^{2a})\big) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); pl_4(k+1/2, 4p^m, \chi)\Big) \\
&\quad = \mathrm{tr}(T(n); S(2k, p^m)) + \sum_{a=1}^{[m/2]} \lambda(p, n; a)\, \mathrm{tr}\big(W(p^{2a})T(n); S(2k, p^{2a})\big) .
\end{aligned}$$

ここで，$[x]$ は x のガウス記号であり，$\lambda(p, n; a)$ は次の定数である．

$$\lambda(p, n; a) := \begin{cases} 1 + \left(\frac{-n}{p}\right), & \text{もし } 1 \leqq a \leqq [(m-1)/2] \\ \chi_p(-n), & \text{もし } a = m/2, \text{ かつ } m \text{ は偶数.} \end{cases}$$

ただし，χ_p は χ の p-成分である．

このタイプの trace identity を用いて，論文 [U1, 1998] において，**一般の奇数** M に対しての plus space $pl_4(k+1/2, 4M, \chi)$ の Newform の理論が確立された．

詳細は省くが，trace identity の誤差項に由来する重複度を外すために，Twisting 作用素に関する固有空間に分解するのがキーポイントであり，この分解した固有部分空間から，低い level からでてくる oldform を取り除いたものが Newform の空間を与えることになる．

つまり，標語的に言えば，

$\boxed{pl_4(k+1/2, 4M, \chi) \text{ は } \textbf{Hecke} \text{ 作用素と } \textbf{Twisting} \text{ 作用素で分類される.}}$

ということになる.

2 level 2^m の場合の trace identity

plus 空間以外の一般の場合の Newform を考えるには，偶数のコンダクターを持つ二次指標 $\left(\frac{-1}{\cdot}\right)$ や $\left(\frac{\pm 2}{\cdot}\right)$ に関する Twisting 作用素が必要になる．特に半整数ウェイトの twisted Hecke 作用素 $R_\psi \tilde{T}(n^2)$ のトレースを整数ウェイトの Hecke 作用素，Atkin-Lehner 型作用素のトレースの線型結合の形で表す恒等式 **trace identity** が必要になるが，これらは任意の level で見つかっている（結果については [U2] を見よ).

ここでは level 2^n の時の必要なもののみ挙げてみる.

Proposition 1 (level 2^m). **χ を 2^m を法として定義される** *even quadratic character,* $m \geqq 2$ **とし，** n **を任意の奇数とする．** $\xi(n) := (1 - \left(\frac{-1}{n}\right))/2$, $W(A)$ **は** *Atkin-Lehner involution* **であるとすると，以下の恒等式が成立する.**

(1) $$\mathrm{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); pl_4(k+1/2, 4, \chi)\Big) = \mathrm{tr}(T(n); S(2k, 1)).$$

(2) $$\mathrm{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 4, \chi)\Big) = \mathrm{tr}(T(n); S(2k, 2)).$$

(3) $$\mathrm{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 8, \chi)\Big) = \mathrm{tr}(T(n); S(2k, 4)).$$

(4) $$\mathrm{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 16, \left(\tfrac{2}{\cdot}\right))\Big) = \mathrm{tr}(T(n); S(2k, 8)).$$

(5) $$\mathrm{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 16, \left(\tfrac{1}{\cdot}\right))\Big) = 2\,\mathrm{tr}(T(n); S(2k, 4)).$$

$$(6)\qquad \operatorname{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 32, (\tfrac{1}{}))\Big) = \operatorname{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 32, (\tfrac{2}{}))\Big)$$
$$= 2\operatorname{tr}(T(n); S(2k, 8)).$$

$$(7)\qquad \operatorname{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 64, (\tfrac{1}{}))\Big)$$
$$= 2\Big\{\operatorname{tr}(T(n); S(2k, 16)) + \xi(n)\operatorname{tr}(W(16)T(n); S(2k, 16))\Big\}.$$

$$(8)\qquad \operatorname{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 64, (\tfrac{2}{}))\Big) - \operatorname{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 32, (\tfrac{1}{}))\Big)$$
$$= 4\Big\{\operatorname{tr}(T(n); S(2k, 8)) - \operatorname{tr}(T(n); S(2k, 4))\Big\}.$$

$$(9)\qquad \operatorname{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 128, (\tfrac{1}{}))\Big) - \operatorname{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 64, (\tfrac{2}{}))\Big)$$
$$= 2\Big\{\operatorname{tr}(T(n); S(2k, 32))$$
$$+ \xi(n)\operatorname{tr}(W(16)T(n); S(2k, 16)) - \operatorname{tr}(T(n); S(2k, 16))\Big\}.$$

$$(10)\qquad \operatorname{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 128, (\tfrac{2}{}))\Big) - \operatorname{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 64, (\tfrac{1}{}))\Big)$$
$$= 2\Big\{\operatorname{tr}(T(n); S(2k, 32)) - 2\operatorname{tr}(T(n); S(2k, 16))$$
$$+ 3\operatorname{tr}(T(n); S(2k, 8)) - 2\operatorname{tr}(T(n); S(2k, 4))\Big\}.$$

$$(11)\qquad \operatorname{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 2^m, \chi)\Big) - \operatorname{tr}\Big(\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 2^{m-1}, \chi(\tfrac{2}{}))\Big)$$
$$= 2\Big\{\operatorname{tr}\big(T(n); S(2k, 2^{m-2})\big) - \operatorname{tr}\big(T(n); S(2k, 2^{m-3})\big)$$
$$+ \xi(n)\chi_2(-n)\operatorname{tr}\big(W(2^{\hat{m}-2})T(n); S(2k, 2^{\hat{m}-2})\big)\Big\}.$$

if $m \geqq 8$ *and* $\hat{m}$ *is the greatest even integer* $\leqq m$.

Twisting operator R_ψ を付けた Hecke 作用素のトレースについても同様に次の恒等式が成立する.

Proposition 2 ($\psi = \left(\frac{-1}{}\right)$ **の場合**). **記号は上のとおりとする**. $\hat{m}$ を m **以下の最大の偶数とする**.

(1) $$\mathrm{tr}\Big(R_{\left(\frac{-1}{}\right)}\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 2^4, \left(\tfrac{1}{}\right))\Big) = (-1)^k \,\mathrm{tr}(W(4)T(n); S(2k,4)) \ .$$

(2) $$\mathrm{tr}\Big(R_{\left(\frac{-1}{}\right)}\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 2^5, \left(\tfrac{1}{}\right))\Big)$$
$$= (-1)^k\big\{\mathrm{tr}\big(T(n); S(2k,2^3)\big) - 2\,\mathrm{tr}\big(T(n); S(2k,2^2)\big) + 2\,\mathrm{tr}\big(W(2^2)T(n); S(2k,2^2)\big)\big\} \ .$$

(3) $$\mathrm{tr}\Big(R_{\left(\frac{-1}{}\right)}\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 2^5, \left(\tfrac{2}{}\right))\Big) = 0 \ .$$

(4) $$\mathrm{tr}\Big(R_{\left(\frac{-1}{}\right)}\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 2^6, \left(\tfrac{2}{}\right))\Big) = 0 \ .$$

(5) *If* $m \geqq 8$, *or* $m = 6, 7$ *and* $\chi = \left(\frac{1}{}\right)$,
$$\mathrm{tr}\Big(R_{\left(\frac{-1}{}\right)}\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 2^m, \chi)\Big) = (-1)^k\big(1 + \left(\tfrac{-1}{n}\right)\big)\chi(n)\,\mathrm{tr}\big(W(2^{\hat{m}-2})T(n); S(2k, 2^{\hat{m}-2})\big) \ .$$

(6) $$\mathrm{tr}\Big(R_{\left(\frac{-1}{}\right)}\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 2^7, \left(\tfrac{2}{}\right))\Big)$$
$$= (-1)^k\big(1 + \left(\tfrac{-1}{n}\right)\big)\left(\tfrac{2}{n}\right) \times \big\{\mathrm{tr}(W(64)T(n); S(2k,64)) - \mathrm{tr}(W(16)T(n); S(2k,16))\big\}.$$

Proposition 3 ($\psi = \left(\frac{\pm 2}{}\right)$ **の場合**). **記号を上のとおりとする**. $\tilde{m}$ を m **以下の最大の奇数とする**.

(1) $$\mathrm{tr}\Big(R_{\left(\frac{\pm 2}{}\right)}\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 2^6, \left(\tfrac{2}{}\right))\Big) = 0 \ .$$

(2) $$\mathrm{tr}\Big(R_{\left(\frac{\pm 2}{}\right)}\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 2^7, \left(\tfrac{2}{}\right))\Big) = 0 \ .$$

(3) *If* $m \geqq 8$, *or if* $m = 6, 7$ *and* $\chi = \left(\frac{1}{}\right)$,
$$\mathrm{tr}\Big(R_{\left(\frac{\pm 2}{}\right)}\tilde{T}(n^2); S(k+1/2, 2^m, \chi)\Big)$$
$$= \psi_2(-1)^k\big(1 - \left(\tfrac{-1}{n}\right)\psi_2(-1)\big)\chi(n)\,\mathrm{tr}\big(W(2^{\tilde{m}-2})T(n); S(2k, 2^{\tilde{m}-2})\big) \ .$$

3 level 2^m の場合の Newform 理論

3.1 証明方針

前の節の trace identity を見ると，いくつかのタイプに分かれることが分かる．

（1）plus 空間から level 8 までと，level 16 で $\chi = \left(\frac{2}{\cdot}\right)$ の時は，Niwa-Kohnen タイプの等式なので，これらは整数ウェイトの場合と同様にして自然に oldform を低い level のカスプ形式から構成することが出来る．

ただし，整数ウェイトと違って，低い level から作られる保型形式が互いに一次独立であることを示すのは結構難しい．Kohnen の論文では Ramanujan-Petersson 予想（Deligne の定理！）を用いていたが，我々は，有限メタプレクティック群の表現を用いて，Fourier 係数の non-vanishing を示し，それから一次独立性を得た．

（2）それ以降 level 32 まで．

これは，$\left(\frac{-1}{\cdot}\right)$ に関する Twisting 作用素が作用する部分である．ここでは，level $4p^2$ の時の plus space と同様に，trace identity に重複度 2 が出てくる．したがってまず低いレベルから来る oldform を取り除き，さらに，全体の空間を Twisting 作用素に関する二つの固有空間に分解する必要が有る．

ここで，低い level の空間，例えば $S(k+1/2, 8, \left(\frac{2}{\cdot}\right))$ は Twisting 作用素 $R_{\left(\frac{-1}{\cdot}\right)}$ で閉じていない．そこで，これを oldform として取り除く際，まず $R_{\left(\frac{-1}{\cdot}\right)}$ でふくらまし Twisting 作用素で閉じた部分空間を構成する必要がある．これが実際どの程度の大きさになるかを調べるためには，（1）の時と同様，Fourier 係数の non-vanishing を見る必要がある．

（3）level 64 以降．

この場合は，基本的に（2）と同じであるが，Twisting 作用素は $R_{\left(\frac{-1}{\cdot}\right)}$，$R_{\left(\frac{\pm 2}{\cdot}\right)}$ の 3 つを考える必要がある．

3.2 Newform の空間

以下では簡単のため，$k \geqq 2$ と仮定する．$k = 1$ の場合も少し手直しすれば同様の結果を得ることができる．

まず最初に **oldforms** の空間 $\mathfrak{O}(k+1/2, 2^m, \chi)$ を低い level のカスプ形式と，作用

素 $U(A)$, $\tilde{\delta}_A$, $\tau(2^m)$, R_ψ を用いて構成する．ここで，Twisting 作用素 R_ψ は既に説明した．それ以外は正の整数 A に対して

$$U(A):\quad f=\sum_{n\geqq 1} a(n)\,q^n \mapsto f\mid U(A):=\sum_{n\geqq 1} a(An)\,q^n \qquad (\textit{Shift operator})$$

$$\tilde{\delta}_A:\quad f=\sum_{n\geqq 1} a(n)\,q^n \mapsto f\mid \tilde{\delta}_A:=\sum_{n\geqq 1} a(n)\,q^{An}$$

で定める．さらに，$\tau(2^m)$ は Atkin-Lehner タイプの作用素で，[Sh, proposition 1.4] で定義されているものである．

そして，$S(k+1/2,2^m,\chi)$ の中での $\mathfrak{O}(k+1/2,2^m,\chi)$ の直交補空間 $\mathfrak{N}(k+1/2,2^m,\chi)$ をとり，さらに必要なら $\mathfrak{N}(k+1/2,2^m,\chi)$ を Twisting 作用素 R_ψ, $\psi=\left(\frac{-1}{}\right)$, $\left(\frac{2}{}\right)$ で固有空間 $\mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2,2^m,\chi)$ に分解する：ここで，$\kappa_1,\kappa_2\in\{\pm 1\}$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2,2^m,\chi)\\ &\quad:=\left\{f\in\mathfrak{N}(k+1/2,2^m,\chi)\ ;\ f\mid R_{\left(\frac{-1}{}\right)}=\kappa_1 f\ ,\ f\mid R_{\left(\frac{2}{}\right)}=\kappa_2 f\right\}.\end{aligned}$$

と定めるものとする．そしてこれらの空間 $\mathfrak{N}(k+1/2,2^m,\chi)$, $\mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2,2^m,\chi)$ が Newform の空間を与える．

さて，以下各 m について細かく述べていこう．

[Case of $m=1(?)$] (Kohnen)　このときは $\chi=\left(\frac{1}{}\right)$ である．そして oldform は存在しないので，plus 空間 $pl_4:=pl_4(k+1/2,4,\left(\frac{1}{}\right))$ 自身が Newform の空間である．このとき，Hecke 加群としての次の同型が存在する：

$$pl_4(k+1/2,4,\left(\tfrac{1}{}\right))\cong S^0(2k,1)\,.$$

[Case of $m=2$] (Manickam, Ramakrishnan, and Vasudevan)　この場合も $\chi=\left(\frac{1}{}\right)$ である．oldform の空間を次で定める：

$$\mathfrak{O}(k+1/2,4,\left(\tfrac{1}{}\right)):=pl_4\ \oplus\ pl_4|U(4)\,.$$

このとき，Hecke 加群としての次の同型が存在する：

$$\mathfrak{N}(4,\left(\tfrac{1}{}\right)):=\mathfrak{N}(k+1/2,4,\left(\tfrac{1}{}\right))\cong S^0(2k,2)\,.$$

[Case of $m=3$]　$\chi=\left(\frac{1}{}\right)$ の場合に，oldform の空間を次で定める：

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}(k+1/2,8,\left(\tfrac{1}{}\right)):=&\left\{pl_4\ \oplus\ pl_4|U(4)\ \oplus\ pl_4|U(8)\tau(8)\right\}\\ &\oplus\left\{\mathfrak{N}(4,\left(\tfrac{1}{}\right))\ \oplus\ \mathfrak{N}(4,\left(\tfrac{1}{}\right))|U(2)\tau(8)\right\}.\end{aligned}$$

このとき，Hecke 加群としての次の同型が存在する：

$$\mathfrak{N}(8, (\tfrac{1}{\cdot})) := \mathfrak{N}(k+1/2, 8, (\tfrac{1}{\cdot})) \cong S^0(2k, 4)\,.$$

さらに $S(k+1/2, 8, (\frac{2}{\cdot}))$ は $S(k+1/2, 8, (\frac{1}{\cdot}))$ に $\tau(8)$ によって同型に写されるので，$S(k+1/2, 8, (\frac{2}{\cdot}))$ についても同様の結果を得る．特に $\mathfrak{N}(8, (\frac{2}{\cdot})) := \mathfrak{N}(8, (\frac{1}{\cdot}))|\tau(8)$ が Newform の空間となる．

[Case of $m=4$ **and** $\chi = (\frac{1}{\cdot})$**]**　この場合

$$S(k+1/2, 16, (\tfrac{1}{\cdot})) = S(k+1/2, 8, (\tfrac{1}{\cdot})) \oplus S(k+1/2, 8, (\tfrac{2}{\cdot}))\,|\tilde{\delta}_2\,.$$

となるので，$S(k+1/2, 16, (\frac{1}{\cdot}))$ の**全ての元が oldform** となり，Newform は存在しない．

[Case of $m=4$ **and** $\chi = (\frac{2}{\cdot})$**]**　oldform の空間を次で定める：

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}(k+1/2, 16, (\tfrac{2}{\cdot})) := &\{pl_4|\tilde{\delta}_2 \oplus pl_4|U(2) \oplus pl_4|U(8) \oplus pl_4|U(8)\tau(8)\tilde{\delta}_2\}\\ &\oplus \{\mathfrak{N}(4, (\tfrac{1}{\cdot}))|\tilde{\delta}_2 \oplus \mathfrak{N}(4, (\tfrac{1}{\cdot}))|U(2) \oplus \mathfrak{N}(4, (\tfrac{1}{\cdot}))|U(2)\tau(8)\tilde{\delta}_2\}\\ &\oplus \mathfrak{N}(8, (\tfrac{1}{\cdot}))|\tilde{\delta}_2 \oplus \mathfrak{N}(8, (\tfrac{2}{\cdot}))\,.\end{aligned}$$

このとき，Hecke 加群としての次の同型が存在する：

$$\mathfrak{N}(k+1/2, 16, (\tfrac{2}{\cdot})) \cong S^0(2k, 8)\,.$$

[Case of $m=5$**]**　$\chi = (\frac{2}{\cdot})$ の場合に，次が成り立つ．

$$S(k+1/2, 32, (\tfrac{2}{\cdot})) = \sum_{a=0}^{2} \left(S(k+1/2, 16, (\tfrac{2}{\cdot})) + S(k+1/2, 16, (\tfrac{1}{\cdot}))\,|\tilde{\delta}_2 \right) |R_{(\frac{-1}{\cdot})}{}^{a}\,.$$

ここで $R_{(\frac{-1}{\cdot})}{}^{0} = \mathrm{id}$ としている．

したがって $S(k+1/2, 32, (\frac{2}{\cdot}))$ の**全ての元が oldform** となり，Newform は存在しない．また $S(k+1/2, 32, (\frac{1}{\cdot}))$ は $\tau(32)$ によって $S(k+1/2, 32, (\frac{2}{\cdot}))$ に同型に写されるので，$S(k+1/2, 32, (\frac{1}{\cdot}))$ にも Newform が存在しない事がわかる．

[Case of $m=6$ **and** $\chi = (\frac{1}{\cdot})$**]**　oldform の空間を次で定める：

$$\mathfrak{O}(k+1/2, 64, (\tfrac{1}{\cdot})) := S(k+1/2, 32, (\tfrac{1}{\cdot})) + S(k+1/2, 32, (\tfrac{2}{\cdot}))\,|\tilde{\delta}_2\,.$$

この空間の直交補空間 $\mathfrak{N}(k+1/2,64,(\frac{1}{\cdot}))$ を取って，Twisting 作用素 $R_{\left(\frac{-1}{\cdot}\right)}$ と $R_{\left(\frac{2}{\cdot}\right)}$ で固有部分空間に分割する：

$$\mathfrak{N}(k+1/2,64,(\tfrac{1}{\cdot})) = \bigoplus_{\kappa_1,\kappa_2\in\{\pm 1\}} \mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2,64,(\tfrac{1}{\cdot}))\,.$$

$$\mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2,64,(\tfrac{1}{\cdot})) = \left\{\ f\in\mathfrak{N}(k+1/2,64,(\tfrac{1}{\cdot}))\ ;\ f|R_{\left(\frac{-1}{\cdot}\right)} = \kappa_1 f,\ f|R_{\left(\frac{2}{\cdot}\right)} = \kappa_2 f\ \right\}.$$

このとき任意の $\kappa_1,\kappa_2\in\{\pm 1\}$ に対して，次の Hecke 加群としての埋めこみが得られる：

$$\mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2,64,(\tfrac{1}{\cdot})) \hookrightarrow S^0(2k,16)\,.$$

さらに，この埋めこみの像を明示的に与えることができる.

[Case of $m=6$ ans $\chi=(\frac{2}{\cdot})$]　この場合，次が成り立つ：

$$S(k+1/2,64,(\tfrac{2}{\cdot})) = \sum_{a,b=0}^{2}\left(S(k+1/2,32,(\tfrac{2}{\cdot})) + S(k+1/2,32,(\tfrac{1}{\cdot}))\,|\tilde{\delta}_2\right)|R_{\left(\frac{-1}{\cdot}\right)}{}^a R_{\left(\frac{2}{\cdot}\right)}{}^b\,.$$

ここで $R_{\left(\frac{-1}{\cdot}\right)}{}^0 = R_{\left(\frac{2}{\cdot}\right)}{}^0 = \mathrm{id}$.

したがって，$S(k+1/2,64,(\frac{2}{\cdot}))$ の**全ての元が oldform** であって，Newform は存在しない.

[Case of $m \geqq 7$]　oldform の空間を次で定める：

$$\mathfrak{O}(k+1/2,2^m,\chi) := S(k+1/2,2^{m-1},\chi)\ +\ S(k+1/2,2^{m-1},\chi(\tfrac{2}{\cdot}))\,|\tilde{\delta}_2\,.$$

そしてその直交補空間 $\mathfrak{N}(k+1/2,2^m,\chi)$ を取り，Twisting 作用素 $R_{\left(\frac{-1}{\cdot}\right)}$ と $R_{\left(\frac{2}{\cdot}\right)}$ で固有部分空間に分割する：

$$\mathfrak{N}(k+1/2,2^m,\chi) = \bigoplus_{\kappa_1,\kappa_2\in\{\pm 1\}} \mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2,2^m,\chi)\,.$$

$$\mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2,2^m,\chi) = \left\{\ f\in\mathfrak{N}(k+1/2,2^m,\chi)\ ;\ f|R_{\left(\frac{-1}{\cdot}\right)} = \kappa_1 f,\ f|R_{\left(\frac{2}{\cdot}\right)} = \kappa_2 f\ \right\}.$$

すると任意の $\kappa_1,\kappa_2\in\{\pm 1\}$ に対して，次の Hecke 加群としての埋めこみが得られる：

$$\mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2,2^m,\chi) \hookrightarrow S^0(2k,2^{m-2})\,.$$

さらに，この埋めこみの像を明示的に与えることができる．

3.3 主定理

前の節で定義した空間 $\mathfrak{N}(k+1/2,2^m,\chi)$, $\mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2,2^m,\chi)$ はつぎのきれいな性質を持つ．

定理 3.1. $\underline{2 \leqq m \leqq 3}$, または $\underline{m=4 \text{ かつ } \chi = \left(\frac{2}{\cdot}\right)}$ であると仮定する．

(1) $\mathfrak{N}(k+1/2,2^m,\chi)$ は全ての Hecke 作用素 $\tilde{T}(p^2)$ (p:素数) に対する同時固有関数からなる直交基底を持つ．その基底は non-zero な複素数倍をのぞき一意的に定まる．

f をその直交基底に属する固有形式とし，λ_p を $\tilde{T}(p^2)$ (p:素数) に関する f の固有値とする．すると，ウェイト $2k$, conductor 2^{m-1} の正規化された固有形式 $F \in S^0(2k,2^{m-1})$ で次の条件を満たすものが（ただ一つ）存在する．

$$\text{すべての素数 } p \text{ に対して} \quad F|T(p) = \lambda_p F\ .$$

(2) (*Strong Multiplicity One Property*) f, g を $\mathfrak{N}(k+1/2,2^m,\chi)$ の二つの non-zero な元とする．いま，ある整数 A があって，f と g は A と素な全ての素数 p に対して，$\tilde{T}(p^2)$ の同じ固有値に属する固有形式となっていると仮定する．すると $\boldsymbol{C}f = \boldsymbol{C}g$ である． □

定理 3.2. $\underline{m \geqq 7}$, または $\underline{m=6 \text{ and } \chi = \left(\frac{-1}{\cdot}\right)}$ と仮定する．任意の $\kappa_1, \kappa_2 \in \{\pm 1\}$ に対して，次が成立する．

(1) $\mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2,2^m,\chi)$ は全ての Hecke 作用素 $\tilde{T}(p^2)$ (p:素数) に対する同時固有関数からなる直交基底を持つ．その基底は non-zero な複素数倍をのぞき一意的に定まる．

f をその直交基底に属する固有形式とし，λ_p を $\tilde{T}(p^2)$ (p:素数) に関する f の固有値とする．すると，ウェイト $2k$, conductor 2^{m-2} の正規化された固有形式 $F \in S^0(2k,2^{m-2})$ で次の条件を満たすものが（ただ一つ）存在する．

$$\text{すべての素数 } p \text{ に対して} \quad F|T(p) = \lambda_p F\ .$$

(2) (*Strong Multiplicity One Property*) f, g を $\mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2,2^m,\chi)$ の二つの non-zero な元とする．いま，ある整数 A があって，f と g は A と素な全ての素数 p に対

して，$\tilde{T}(p^2)$ の同じ固有値に属する固有形式となっていると仮定する．すると $Cf = Cg$ である．

$\square$

ここで，次のことにも注意しておこう．定義から oldform の空間 $\mathfrak{O}(k+1/2, 2^m, \chi)$ はより低い level のカスプ形式から生成される．したがって帰納的に $S(k+1/2, 2^m, \chi)$ の空間は Newform の空間 $pl_4(k+1/2, N, \chi)$, $\mathfrak{N}(k+1/2, 2^\ell, \xi)$, $\mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2, 2^\ell, \xi)$ ($\ell \leqq m$, $\xi = (\frac{1}{\cdot}), (\frac{2}{\cdot})$) と $\tilde{\delta}_A$, $U(A)$, $\tau(A)$, and R_ψ 等のタイプの作用素によって再構成され得ることが示せる．

したがって，これらの空間 $\mathfrak{N}(k+1/2, 2^m, \chi)$, $\mathfrak{N}^{(\kappa_1,\kappa_2)}(k+1/2, 2^m, \chi)$ は整数ウェイトの時の Newform の空間と同様の良い性質を満たすので，これを半整数ウェイトの Newform の空間と呼ぶことにする．

4 （期待される）応用，副産物，コメント

4.1 Kohnen-Zagier 公式（Waldspurger の定理の精密化）の一般化

level が任意の $4\times$ 奇数 の plus space pl_4 に対する，Kohnen-Zagier 公式の一般化が pl_4 の newform 理論を用いて得られている（Sakata, 2003)．

今回の 2^n level の newform 理論を用いて，これらの場合にも Kohnen-Zagier 公式を拡張することが期待される．

4.2 副産物その１

道具として用いた有限メタプレクティック群の表現を用いて，半整数ウェイトの保型形式の Fourier 係数の non-vanishing についての情報が得られた．正確に言うと，保型形式の level を法とする剰余類の中に non-zero な Fourier 係数がいつ出てくるかを完全に記述できる．これを用いて，Ono-Skinner の結果の改良等が可能である．

4.3 副産物その２？

plus space pl_4 は level $N = 8\times$ 奇数 の plus space

$$pl_8(k+1/2, N, \chi) := \left\{ \begin{array}{l} f = \sum_{n\geqq 1} a(n)q^n \in S(k+1/2, N, \chi)\ ; \\ a(n) = 0 \text{ if } (-1)^k \chi_2(-1)\, n \equiv 2, 3 \pmod 4 \end{array} \right\}$$

の部分空間という形に拡張できる．そしてこの pl_8 については pl_4 と同様の性質が証明できる（と期待される）．一例を挙げれば，Hecke 加群として

$$pl_8(k+1/2,8) \cong S(2k,2)$$

という同型が成立する（証明は Newform 理論の副産物として出てくる）．ヤコビ形式やテータ級数との関連なども証明できるだろう．

また pl_4 のときは

$$pl_4(k+1/2,4) \cong S(2k,1)$$

であった．これからわかるように，志村対応では level N の半整数ウェイトの保型形式に対して，level $N/4$ の保型形式が対応するのが普通であり，$N/2$ に対応するほうが特殊である．

4.4 その他のコメント

（1）ここでは level 2^m の場合しか扱っていないが，任意の合成数 level へ拡張するには plus space pl_4 の場合の結果を組み合わせれば，組み合わせ論的な困難さは残るだろうが，問題なく拡張できる．

実際，使用する trace identity の形を見ると，level の 2 冪の部分と，奇数の部分とに分解され，奇数の部分については pl_4 のものとまったく同じ形．

（2）newform 理論の証明に用いた trace identity と有限メタプレクティック群の表現において，χ が quadratic つまり $\chi^2=\mathbf{1}$ という仮定を置いているが，これはあくまで技術的なものであり，本質的なものではない．つまり，これらの結果や Newform 理論はそれらの仮定無しに証明できるものと思われる．

これに関連して，「squarefree level で non quadratic character case に pl_4 の次元が計算され，対応する整数ウェイトの空間の次元との一致」（Kojima）が得られている．

（3）今回報告した Newform 理論で，oldform の部分を作るのに，Twisting operator R_ψ, shift operator $U(2)$, 変数の定数倍写像 $\tilde{\delta}_2$ だけならよかったのだが，Atkin-Lehner 型 operator $\tau(2^m)$ も用いている．このため，oldform の Fourier 係数が低いレベルの newform の Fourier 係数から明示的に表されることは自動的には保証されないが，この難点は有限メタプレクティック群の計算を使うことで解消される．

したがって，Newform のフーリエ係数を Kohnen-Zagier 公式の一般化や新谷リフト等を用いて計算しておけば，全てのカスプ形式のフーリエ係数を具体的に求めることが計算機を使って可能になる．

参考文献

[N] S. Niwa, *On Shimura's trace formula*, Nagoya Math. J. **66**, (1977), 183–202.

[K] W. Kohnen, *Newforms of half-integral weight*, J. reine und angew. Math. **333** (1982) 32–72.

[Sh] G. Shimura, *On modular forms of half integral weight*, Ann. of Math. **97**, (1973), 440–481

[U1] M. Ueda, *On Twisting operators and newforms of half-integral weight II –complete theory of newforms for Kohnen space* , Nagoya Math. J. **149**, (1998), 117–171.

[U2] M.Ueda, *Trace identities of twisted Hecke operators on the spaces of cusp forms of half-integral weight* , (to appear)
`http://euler.math.nara-wu.ac.jp/~ueda/`