数理解析研究所講究録 1399 巻 2004 年 8-14

Dichotomy of Ergodic Measure

九州工業大学・情報工学部 本田あおい (Aoi HONDA)
Faculty of computer science and systems engineering
Kyushu Institute of Technology
パリ第一大学
Department of mathematics and computer science,
Université Paris I - Panthéon-Sorbonne

九州工業大学・情報工学部 岡崎悦明 (Yoshiaki OKAZAKI)
Faculty of computer science and systems engineering
Kyushu Institute of Technology

Let $\mathscr{G}(P_i)$ be the group of the (equivalence class of) automorphisms of the Lebesgue space $(\Omega, \mathscr{B}, P_i), i = 1, 2$. Then $\mathscr{G}(P_i)$ is a complete separable metrizable topological group with respect to the weak topology. Let G_i be a connected subgroup of $\mathscr{G}(P_i)$. Suppose that P_i is G_i-ergodic and the following conjugacy is satisfied:

$\forall T \in G_1,\ T \circ G_2 \circ T^{-1} \subset \mathscr{G}(P_2)$

$\forall S \in G_2,\ S \circ G_1 \circ S^{-1} \subset \mathscr{G}(P_1)$.

Then it follows that either $P_1 \sim P_2$(*equivalent*) or $P_1 \perp P_2$(*singular*).

1 導入と準備

本論文では, ポーランド空間上のある作用群について準不変かつエルゴード的な確率測度についての, 二分定理を示す.

μ, ν を可測空間 $(\Omega, \mathscr{B})$ 上の確率測度とする. μ が ν に関して絶対連続 $(\mu \ll \nu)$ とは任意の $A \in \mathscr{B}$ に対して $\nu(A) = 0$ ならば $\mu(A) = 0$ となること, μ と ν が同値 $(\mu \sim \nu)$ とは μ と ν が互いに絶対連続であることをいう. μ と ν が特異 $(\mu \perp \nu)$ とはある $A \in \mathscr{B}$ に対して $\mu(A) = 0$ かつ $\nu(A^c) = 0$ が成り立つことである.

$(\Omega, \mathscr{B})$ の 2 つの確率測度について必ず同値か特異のいずれかが成り立つことを示す定理を二分定理という. 角谷 [4] は角谷の二分定理と呼ばれる次の定理を示した.

Theorem 1 (Kakutani's dichotomy(1948)) $\mu_k,\ \nu_k$ を確率空間列 $(\Omega_k,\ \mathscr{B}_k)$ 上に定義された確率測度とし, $\mu = \prod_{k=1}^{\infty} \mu_k,\ \nu = \prod_{k=1}^{\infty} \nu_k$ をそれぞれ $\Omega = \prod_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ 上の無限直積確率測

度とする．このとき任意の k に対して $\mu_k \sim \nu_k$ ならば $\mu \sim \nu$ か $\mu \perp \nu$ のいずれかが成り立つ．

また Brown and Dooley[1] は加群 $Z_{\ell(i)} = \{0, 1, \ldots, \ell(i) - 1\}, i \geq 1$ の無限直積空間 $X := \prod_{i=1}^{\infty} Z_{\ell(i)}$ 上の G-measure に関する二分定理を, 岡崎 [5] はベクトル空間のある部分空間に関するエルゴード的準不変測度の二分定理を示した．我々の結果はこれら一連の研究の延長上に続くものである．

まず必要な定義を導入する．Ω をポーランド空間, すなわち完備可分距離空間とし, $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ を確率空間とする．

Definition 2 (Automorphism) $T : \Omega \to \Omega$ が次の条件 1,2 を満たすとき automorphsm であるという．

1. ある $N, N' \in \mathscr{B}$ が存在して $P(N) = P(N') = 0$ かつ
   $T : \Omega \setminus N \to \Omega \setminus N'$ が全単射, 両可測.
2. $T(P) \sim P \quad (T^{-1}(P) \sim P)$ である．ただし $T(P)(A) := (P \circ T^{-1})(A), A \in \mathscr{B}$

Lemma 3 $G(P)$ を $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ 上の automorphism 全体とすると, $G(P)$ は群である．

Proof 単位元: 恒等写像 I, 逆元: 逆写像

Definition 4 (G-ergodic) $G \subset G(P)$ とする．このとき任意の $A \in \mathscr{B}$ について任意の $T \in G$ に対して $P(A \triangle T^{-1}(A)) = 0 \Rightarrow P(A) = 1$ or 0 が成り立つとき P は G-ergodic であるという．

2 automorphism のなす群の位相

この章では Halmos[2],Tulcea[3] に従い $G(P)$ に位相を導入する．まず $G(P)$ の同値関係を定義する．

Definition 5 $S, T \in G(P)$ に対して $P(\{\omega : S(\omega) \neq T(\omega)\}) = 0, \omega \in \Omega$ が成り立つとき $S \sim T(\text{mod } 0)$ とする．

ここで定義される $\sim$ は同値律を満たす．

Fact 6 $G(P)$ の群構造は, $\sim$ (mod 0) と両立する．

Proof すなわち $T \sim T'$, $S \sim S'$ (mod 0)

$\Rightarrow T^{-1} \sim T'^{-1}$, $T \circ S \sim T' \circ S'$ (mod 0)

以後, 商空間 $\mathscr{G}(P) := G(P)/\sim$ を考える．ここで $T : \Omega \to \Omega$ に対して $\tilde{T} : L_1(\Omega) \to L_1(\Omega)$ を対応させる．

$$(\tilde{T}f)(\omega) := f(T^{-1}\omega) \cdot \frac{dT(P)}{dP}(\omega)$$

とすると $\tilde{T}f$ と f は L_1 isometry, すなわち $\left\|\tilde{T}f\right\|_{L_1} = \|f\|_{L_1}$ となり $\mathscr{L}(L_1, L_1)$ の強位相を $\mathscr{G}(P)$ 上に誘導でき, $T_0 \in \mathscr{G}(P)$ の近傍は

$$V(T_0) := \{T \mid \|Tf_i - T_0 f_i\| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n\},\quad \varepsilon > 0,\ f_1, \ldots, f_n \in L_1$$

の形となる. この位相は距離

$$d(S,T) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left\{ \left\|\tilde{T}\chi A_n - \tilde{S}\chi A_n\right\|_{L_1} + \left\|\tilde{T^{-1}}\chi A_n - \tilde{S^{-1}}\chi A_n\right\|_{L_1} \right\}$$

ただし $\Lambda = \{A_n\ :\ n \geq 1\}$ は $\mathscr{B}$ の可算生成元.

の位相と同位相である. すなわち $\mathscr{G}(P)$ の位相は距離を入れて位相群にすることができる. よって $(\mathscr{G}(P), d)$ はポーランド空間となる.

Definition 7 位相空間 G が connected とは

$$G = A \cup B,\ A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset,\ A \cap B = \emptyset$$

のとき A, B のうち一方は開集合ではないことをいう.

Lemma 8 位相群 G が connected のとき $V_n := \{S : d(S, I) < \frac{1}{n}\}, V_n \cap V_n^{-1} =: U_n$ としたとき

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} {U_n}^k$$

である.

3 Main Theorem

Theorem 8 P_1, P_2 を $(\Omega, \mathscr{B})$ 上の確率測度, $G_i \subset \mathscr{G}(P_i),\ i = 1, 2$ とする. このとき

$$\begin{cases} P_i : G_i\text{-ergodic} \quad (i = 1, 2) \\ G_1, G_2 : \text{connected} \\ \forall T \in G_1,\ T \circ G_2 \circ T^{-1} \subset \mathscr{G}(P_2) \\ \forall S \in G_2,\ S \circ G_1 \circ S^{-1} \subset \mathscr{G}(P_1) \end{cases} \quad \text{(共役性)}$$

ならば $P_1 \sim P_2$ または $P_1 \perp P_2$ のいずれかが成り立つ.

Theorem 8 の証明に必要な Lemma 9, 10 を次に示す.

Lemma 9 $G_0 \subset G \subset \mathscr{G}(P)$ とし, G_0 は G で稠密とする. このとき P が G_0-ergodic と P が G-ergodic は同値である.

Proof (必要性) 任意の$T \in G$に対して$P(A\triangle T^{-1}(A)) = 0$とする．このとき, 任意の$T' \in G_0$は$T' \in G$であるので$P(A\triangle T^{-1}(A)) = 0$となる．ここで$P$が$G_0$-ergodicであることから$P(A) = 0$ or 1である．
(十分性) $\forall T \in G_0$について$P(A\triangle T^{-1}(A)) = 0$とする．automorphism 列$\{T_n : T_n \in G_0\}; T_n \to T$をとると任意の$B \in \mathscr{B}$に対して$P((T_n^{-1})(B)\triangle T^{-1}(B)) \to 0$である．よって

$$\left|P(A\triangle T_n^{-1}(A)) - P(A\triangle T^{-1}(A))\right| \leqq P(T_n^{-1}(A)\triangle T^{-1}(A)) \to 0$$

から写像$(G,d) \ni T \to P(A\triangle T^{-1}(A)) \in [0,1]$は連続．したがって, 任意の$T \in G$に対して$P(A\triangle T^{-1}(A)) = 0$. PがG-ergodicより$P(A) = 0$ or 1である．

Lemma 10 任意の$T \in G$について$T(P) \sim P$かつP_2がG-ergodicならば$P2 \ll P_1$ or $P_2 \perp P_1$.

Proof $G_0 \subset G$: 可算稠密 ($\mathscr{G}(P_1), \mathscr{G}(P_2)$の両方で稠密) とする．$G_0$の生成する群$[G_0]$は

$$[G_0] := \bigcup_{n=0}^{\infty}(G_0 \cup G_0^{-1})^n$$

とおける．$P_1(A) = 0$とする．条件より, 任意の$T \in G_0$は$T \in \mathscr{G}(P_1)$であるから$P_1 \sim T^{-1}(P_1)$である．よって$P_1(A) = 0$ならば$T^{-1}(P_1)(A) = P_1(T(A)) = 0$であるので

$$P_1([G_0](A)) = P_1\left(\bigcup_{T\in[G_0]} T(A)\right) \leqq \sum_{T\in[G_0]} P_1(T(A)) = 0. \qquad (*)$$

また任意の$T \in G_0$について$T^{-1}([G_0](A)) = [G_0](A)$より$[G_0](A)$は$G_0$-不変集合である．したがって, 任意の$T \in G_0$について

$$\begin{aligned} & P_2\left([G_0](A)\triangle T^{-1}([G_0](A))\right) \\ = \ & P_2\left([G_0](A)\triangle[G_0](A)\right) = P_2(\emptyset) = 0 \quad (**) \end{aligned}$$

である．Lemma 9からP_2がG-ergodicならば, P_2はG_0-ergodicであるので(**)より$P_2([G_0](A)) = 0$ or 1となる．
(i) $\forall A \in \mathscr{B}; P_1(A) = 0$について$P_2([G_0](A)) = 0$のとき$A \subset [G_0](A)$より

$$P_2(A) \leqq P_2([G_0](A)) = 0$$

である．よって$P_1(A) = 0$ならば$P_2(A) = 0$であるので$P_2 \ll P_1$である．
(ii) $\exists A \in \mathscr{B}; P_1(A) = 0$について$P_2([G_0](A)) = 1$のとき, $P_1(A) = 0$と(*)より$P_1([G_0](A)) = 0$がいえる．$P_2([G_0](A)) = 1$より$P_1 \perp P_2$である．
(i), (ii)より$P_2 \ll P_1$ or $P_1 \perp P_2$がいえる．

系 11 $P_1, P_2 : (\Omega, \mathscr{B})$上の確率測度
$G \subset \mathscr{G}(P_1) \cap \mathscr{G}(P_2)$とする．このとき$P_1, P_2 : G$-ergodicならば$P_1 \sim P_2$または$P_1 \perp P_2$

Proof 同様に$\forall T \in G$ について $T(P_2) \sim P_2$ であり, また P_1 が G-ergodic でもあるので $P_1 \ll P_2$ または $P_1 \perp P_2$ となる. よって $P_1 \sim P_2$ または $P_1 \perp P_2$ となる.

Proof of Theorem 8 (1°) 任意の $T \in G_1$ に対して

$$G_2 \subset \mathscr{G}(T(P_2)) \cap \mathscr{G}(T^{-1}(P_2))$$

を示す. $\forall S \in G_2$ に対して $(\Omega, \mathscr{B}, T(P_2)), (\Omega, \mathscr{B}, T^{-1}(P_2))$ 上の automorphism であることを示せばよい. 仮定より全単射, 両可測である.
また $\forall A \in \mathscr{B}$ に対して

$$\begin{aligned} S(T(P_2))(A) &= T(P_2)(S^{-1}(A)) \\ &= P_2(T^{-1} \circ S^{-1}(A)) \\ &= P_2(T^{-1} \circ S^{-1} \circ T \circ T^{-1}(A)) \\ &= (T^{-1} \circ S^{-1} \circ T)^{-1}(P_2(T^{-1}(A)) \\ &= (T^{-1} \circ S^{-1} \circ T)^{-1} T(P_2)(A) \end{aligned}$$

$\because\ (T^{-1} \circ S^{-1} \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S \circ T \in \mathscr{G}(P_2)$.

よって $S(T(P_2))(A) = 0 \iff T(P_2)(A) = 0$
であるから $S(T(P_2)) \sim T(P_2)$.
同様にして $S(T^{-1}(P_2)) \sim T^{-1}(P_2)$. したがって, $\forall T \in G_1$ に対して $G_2 \subset \mathscr{G}(T(P_2)) \cap \mathscr{G}(T^{-1}(P_2))$.

(2°) $\forall S \in G_2$ について $S(T(P_2)) \sim T(P_2)$ であることと P_2 が G_2-ergodic であることから補題 10 を用いると $P_2 \ll T(P_2)$ or $P_2 \perp T(P_2)$ である. 同様に, $\forall S \in G_2$ について $S(T^{-1}(P_2)) \sim T^{-1}(P_2)$ であることと P_2 が G_2-ergodic であることから $P_2 \ll T^{-1}(P_2)$ or $P_2 \perp T^{-1}(P_2)$ である. したがって $\forall T \in G_1$ について $P_2 \sim T(P_2)$ or $P_2 \perp T(P_2)$.

(3°) 同様に任意の $S \in G_2$ について

$$P_1 \sim S(P_1) \quad \text{or} \quad P_1 \perp S(P_1).$$

(4°) $\forall T \in G_1$ に対して $P_2 \sim T(P_2)$, $\forall S \in G_2$ に対して $P_1 \sim S(P_1)$ とする. $P_2 \sim T(P_2)$ と, P_1 が G_1-ergodic であることから $P_1 \ll P_2$ or $P_1 \perp P_1$ である. また $P_1 \sim S(P_1)$ と, P_2 が G_2-ergodic であることより $P_2 \ll P_1$ or $P_1 \perp P_2$ である. よって $P_1 \sim P_2$ or $P_1 \perp P_2$.

(5°) $V_n := \{S : d(S, I) < \frac{1}{n}\}, V_n \cap V_n^{-1} =: U_n$ として I の基本近傍系 $(U_n^{-1} = U_n)$ をとる.
$\exists T \in G_1; P_2 \perp T(P_2) \Rightarrow P_1 \perp P_2$ を示す.

$P_1 \not\perp P_2$, すなわち $\exists A; P_1(A) > 0, P_2(A) > 0$ と仮定する. 連結だから $\exists k(n); T = T_{n,1} \circ \cdots \circ T_{n,k(n)}, T_{n,i} \in U_n, 1 \leqq i \leqq k(n)$ とあらわせる. $\forall i$ に対して $T_{n,i}(P_2) \sim P_2$ とする. $T(P_2) = T_{n,1} \circ \cdots \circ T_{n,k(n)}(P_2)$ より $T(P_2) \sim P_2$ である. これは仮定 $T(P_2) \perp P_2$ に矛盾する. (2°) より $\forall U \in G_1$ に対して $U(P_2) \sim P_2$ or $U(P_2) \perp P_2$ であるので

$\forall n$ についてある i が存在して

$$T_{n,i}(P_2) \perp P_2 \tag{1}$$

である．

一方, Ω 上で

$$T_{n,i}(P_1) \perp P_1 \tag{2}$$

であり, また今の仮定 $P_1 \not\perp P_2$ より A 上で $P_1 \sim P_2$ であることから, $T_{n,i}(A)$ 上で

$$T_{n.i}(P_1) \sim T_{n,i}(P_2) \tag{3}$$

である． これは $T_{n,i}(A) \supset C$ ならば $A \supset T_{n,i}^{-1}(C)$ であって $T_{n,i}(P_1)(C) = 0 \iff P_1\left(T_{n,i}^{-1}(C)\right) = 0$, $T_{n,i}(P_2)(C) = 0 \iff P_2\left(T_{n,i}^{-1}(C)\right) = 0$ と, A 上では $P_1 \sim P_2$ であることからわかる．したがって (2),(3) から $T_{n,i}(A)$ 上で $P_1 \sim T_{n,i}(P_2)$ がいえる．また A 上で $P_1 \sim P_2$ であるので $A \cap T_{n,i}(A)$ 上で

$$P_2 \sim T_{n,i}(P_2). \tag{4}$$

(1) と (4) が共に成り立つためには $P_2'A \cap T_{n,i}(A)) = 0$ でなくてはならない．そしてこのとき A 上で $P_1 \sim P_2$ より

$$P_1(A \cap T_{n,i}(A)) = 0 \tag{5}$$

である．しかし $T_{n,i} \in U_n$ より $\mathscr{G}(P)$ 上で $T_{n,i} \to I$ $(n \to \infty)$ であるので $P_1(A \cap T_{n,i}(A)) \to P(A) > 0$ $(n \to \infty)$．したがって, 十分大きな n については $P_1(A \cap T_{n,i}(A)) > 0$ となり (5) に矛盾する．ゆえに $P_1 \perp P_2$.

共役性条件がなければ成立しないことの反例

$\Omega = [0, 2]$

$\mathscr{B}$: ルベーグ可測集合全体

m : ルベーグ測度

$P_1 := \frac{1}{2}m,\ P_2 := m|_{[0,1]}$

$G_1 := \{g_t^{(1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$g_t^{(1)}x := x + t \pmod 2$

$G_2 := \{g_t^{(2)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$$g_t^{(2)}x := \begin{cases} x+t \pmod{1}, & 0 \leqq x \leqq 1 \\ x, & 1 < x \leqq 2 \end{cases}$$

とすると $P_1 \not\sim P_2$, $P_1 \not\perp P_2$ である.

P_1 は G_1-ergodic, 不変.
P_2 は G_2-ergodic, 不変.

- G_1 と G_2 は共役性がない

$$g^{(1)}_{\frac{2}{3}} \circ g^{(2)}_{\frac{1}{3}} \circ g^{(1)}_{-\frac{2}{3}} \not\subset \mathscr{G}(P_2)$$

参考文献

[1] G. Brown and A. H. Dooley, Dichotomy theorem for G-measures, *internat, J. Math.* **5** (1994), 827-834

[2] P. R. Halmos, Lectures on ergodic theory, Math. Soc. of Japan(1956).

[2] A. Ionescu-Tulcea, On the category of certain classes of transformations in ergodic theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* **114** (1965), 261-279

[3] S. Kakutani, On equivalence of infinite product measure. *Ann. of Math.* (2) **49** (1948), 214-224

[4] Y. Okazaki, Equivalent-singular dichotomy for quasi-invariant ergodic measure, *Ann. Inst. H. Poincar Probab. Statist.* **21** (1985), 393-400