数理解析研究所講究録 1399 巻 2004 年 31-50

Geometry of Banach Spaces and Fixed Points

(Banach 空間の幾何学と不動点)

Wataru TAKAHASHI (高橋 渉)
Department of Mathmatical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology
(東京工業大学・大学院情報理工学研究科)

1 はじめに

近年コンピュータと不動点理論の急速な発展に伴い，種々の分野で発生する非線形問題の研究が盛んになり，大きな学問領域を形成するに至っている．非線形関数解析学や凸解析学等はその一つである．これらの分野において，種々の不動点定理は重要な役割を果たしている．例えばHahn-Banach の拡張定理はMarkov-角谷の不動点定理を用いると見通しがよく証明できるし，Banach 空間上で定義されたコンパクト作用素の不変部分空間の存在はSchauder の不動点定理を用いるとこれまでの証明より簡潔に証明できる [60]．一方，Banach 空間の幾何学も非線形問題と大きな関わりをもっている．Hilbert 空間で非線形問題を取り扱うと比較的気持ちよく解けることが多いが，その問題をBanach 空間で考えると，とたんに難しく，複雑になってしまうことが多い．それはBanach 空間の幾何学的構造によるものである．

ここでは，非線形問題を考える際，非常に重要となるBanach 空間の幾何学と不動点との関わりについて論じてみたいと思う．まず初めに，距離空間の完備性と縮小写像の不動点の存在について議論を行う．次にBanach 空間の幾何学，特にBanach 空間の正規構造と非拡大写像の不動点定理について，Kirk の不動点定理から始まり，Lau-高橋の不動点定理に至るまでを詳しく解説する．最後に，Banach 空間の幾何学（特にノルムの凸性と微分可能性）と非拡大写像の収束定理について，非線形エルゴード定理，Mann 及びHalpern タイプの収束定理を中心に解説する．

2 準備

E をBanach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．このとき，C 上の写像 T は，任意の $x,y\in C$ に対して，$\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|$ を満たすとき，非拡大であるといわれる．C 上の写像 T に対して $F(T)$ は T の不動点の全体を表し，$R(T)$ は T の値域を表す．C 上の写像 P がretraction であるとき，任意の $z\in R(P)$ に対して $Pz=z$ である．また C の部分集合 D に対して，C から D の上への非拡大retraction が存在するとき，D は C の非拡大retract といわれる．

Banach 空間 E に対して，E 上の凸性のmodulus δ は，任意の $\varepsilon(0\leq\varepsilon\leq 2)$ に対して

$$\delta(\varepsilon)=\inf\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|:\ \|x\|\leq 1,\ \|y\|\leq 1,\ \|x-y\|\geq\varepsilon\right\}$$

で定義される．Banach 空間 E は，任意の $\varepsilon > 0$ に対してその modulus が $\delta(\varepsilon) > 0$ であるとき，一様凸であるといわれる．また，E は $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ となる $x, y \in E$ $(x \neq y)$ に対して，常に $\|x+y\| < 2$ であるとき，狭義凸であるといわれる．一様凸な Banach 空間は狭義凸である．E^* を E の共役空間とするとき，E が $E = (E^*)^*$ を満たすなら，E は回帰的であるといわれる．一様な凸な Banach 空間は回帰的であることも知られている．

Banach 空間 E の元 x とその共役空間 E^* の元 x^* に対して，(x, x^*) によって x における x^* の値 $x^*(x)$ を表すとき，E 上の duality 写像 J は，次のように定義される．任意の $x \in E$ に対して

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \ (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Hahn-Banach の定理によって，任意の $x \in E$ に対して $J(x) \neq \phi$ であることが証明される．この duality 写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ．$U = \{x \in E : \ \|x\| = 1\}$ とするとき，任意の $x, y \in U$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{$*$}$$

が常に存在するとき，E のノルムは Gâteaux 微分可能であるといわれる．このとき，Banach 空間 E は smooth であるともいわれる．任意の $x \in U$ に対して極限 $(*)$ が $y \in U$ に関して一様に達せられるとき，E のノルムは Fréchet 微分可能であるといわれる．E が smooth であるなら，duality 写像 J は一価となり，E のノルムが Fréchet 微分可能なら，J は norm-to-norm 連続である [60].

S を semitopological 半群とする．すなわち，S は Hausdorff 位相をもった半群で，任意の $s \in S$ に対して，2 つの写像 $t \mapsto ts$ と $t \mapsto st$ は連続であるとする．$B(S)$ は S 上の実数値有界関数からなる Banach 空間とし，X は定値関数を含む $B(S)$ の閉部分空間とする．X の共役空間 X^* の元 μ が X 上の mean であるとは

$$\|\mu\| = \mu(1) = 1$$

を満たすときをいう．$\mu \in X^*$ が mean であるための必要十分条件は

$$\inf_{s \in S} f(s) \le \mu(f) \le \sup_{s \in S} f(s), \quad \forall f \in X$$

であることはよく知られている [60]．X 上の実数値関数 μ が X 上の submean であるとは

(1) $\mu(f+g) \le \mu(f) + \mu(g), \quad \forall f, g \in X;$

(2) $\mu(\alpha f) = \alpha \mu(f), \quad \forall f \in X, \ \alpha \ge 0;$

(3) 任意の $f, g \in X$ に対して，$f \le g \Rightarrow \mu(f) \le \mu(g);$

(4) 定値関数 c に対して，$\mu(c) = c$

が成り立つときをいう．明らかに X 上の mean は X 上の submean である．この submean の概念は最初溝口–高橋 [40] によって導入され，Lau–高橋 [33, 34] によってその研究がなされた．この submean μ と $f \in X$ に対して，$\mu(f)$ のことをしばしば $\mu_t(f(t))$ と書くこともある．$s \in S$ と $f \in B(S)$ に対して

$$(\ell_s f)(t) = f(st), \quad (r_s f)(t) = f(ts), \quad \forall t \in S$$

で $\ell_s f, r_s f \in B(S)$ を定義する．$X \subset B(S)$ を定値関数を含み，かつ $\ell_s (s \in S)$ の下で不変なものとする．このとき，X 上の mean μ は

$$\mu(f) = \mu(\ell_s f), \quad \forall s \in S, \quad f \in X$$

であるとき，left invariant であるといわれる．X 上の mean μ が right invariant であることも同様に定義される．X 上の mean μ が left invariant でかつ right invarinat であるとき，μ は X 上で invariant であるといわれる．また X 上の submean μ が

$$\mu(f) \leq \mu(\ell_s f), \quad \forall s \in S, \quad f \in X$$

であるとき，left subinvariant であるといわれる．S を semitopological 半群とする．このとき，S が left reversible であるとは，S のどんな 2 つの閉な右イデアルが空でない共通部分をもつときをいう．S が right reversible も同様に定義される．S が left reversible であるとき，$a, b \in S$ に対して

$$a \leq b \Leftrightarrow \{a\} \cup \overline{Sa} \supset \{b\} \cup \overline{Sb}$$

で順序を定義すると，$(S, \leq)$ は directed system になる．同様に right reversible semitopological 半群 S に対しても順序が定義される．

3 距離空間の完備性と不動点

X を距離空間とし，T を X から X への写像とする．このとき，T が縮小写像であるとは，ある $k \geq 0$ が存在して

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

が成り立つときをいう．$C(X)$ によって X 上の縮小写像の全体を表すことにしよう．この節では，縮小写像の不動点の存在と距離空間の完備性について議論してみよう．最初に次の例 [47] を考察しておこう．

$$A_n = \left\{ \left(t, \frac{t}{n} \right) \in \mathcal{R}^2 : \ t \in (0, 1] \right\}, \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

とし

$$X = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} A_n \cup \{0\}$$

とする．X は通常の距離の下で距離空間となるが完備ではない．しかしながら，X 上の連続写像はすべて不動点をもつことが確かめられる．だから X 上の縮小写像はすべて不動点をもつ．一方よく知られているように次の定理が成り立つ．

定理 3.1 (縮小写像の不動点定理). X を距離空間とする．このとき，(1) $\Rightarrow$ (2) である．

(1) X は完備である；

(2) X 上の縮小写像は不動点をもつ．

上の例は一般には (2) $\Rightarrow$ (1) が成り立たないことを示している．そこで「縮小写像を含むどのような写像が不動点をもてば X は完備なるか」という問題が提起される．これに答えるのがこの節の目的である．まずは次の定義 [23] を与えておこう．

定義 3.1. (X,d) を距離空間とし，p を $X\times X$ 上で定義された非負の値をとる実数値関数とする．このとき，p が 3 つの条件 (1),(2),(3) を満たすならば X 上の w-distance といわれる．

(1) $p(x,z)\le p(x,y)+p(y,z)$ が $x,y,z\in X$ についていえる；

(2) 任意の $x\in X$ に対し，$p(x,\cdot):X\to[0,\infty)$ は下半連続である；

(3) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，$p(x,z)\le\delta, p(x,y)\le\delta$ ならば $d(z,y)\le\varepsilon$ である．

距離空間 (X,d) の d は X 上の w-distance である．X 上の w-distance の例は他にもいろいろとあるが，ここでは 4 つの例をあげておこう．

例 1　X を線形ノルム空間とし，p: $X\times X\to[0,\infty)$ を

$$p(x,y)=\|y\|,\quad \forall x,y\in X$$

で定義しよう．このとき，p は w-distance である．

例 2　(X,d) を距離空間とし，T を X から X への連続写像としよう．このとき

$$p(x,y)=\max\{d(Tx,y),d(Tx,Ty)\},\quad \forall x,y\in X$$

で定義される p は X 上の w-distance である．

例 3　(X,d) を距離空間とし，$F\subset X$ を 2 点以上を含む有界な閉集合とする．$c\ge\delta(F)$ とし，p を

$$p(x,y)=\begin{cases} d(x,y), & \forall x,y\in F,\\ c, & \forall x\notin F \text{ or } y\notin F\end{cases}$$

で定義すると，p は X 上の w-distance である．ただし，$\delta(F)$ は F の直径を表す．

例4を書く前に，定義を1つしておこう．$\varepsilon > 0$ とする．距離空間 (X,d) が ε-chainable であるとは，任意の $x, y \in X$ に対して，X の有限集合 $\{u_0, u_1, \ldots, u_k\}$ が存在し

$$u_0 = x, u_k = y, d(u_i, u_{i+1}) < \varepsilon \ (i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

となるときをいう．$\{u_0, u_1, \ldots, u_k\}$ を x, y の ε-chain という．

例4 $\varepsilon > 0$ とし，距離空間 (X,d) を ε-chainable であるとする．このとき，$p\colon X \times X \to [0,\infty)$ を $x, y \in X$ に対して

$$p(x,y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} d(u_i, u_{i+1}) : \ \{u_0, u_1, \ldots, u_k\} \text{ は } x, y \text{ の } \varepsilon\text{-chain} \right\}$$

で定義すると，p は X 上の w-distance である．

距離空間 X 上の w-distances の全体を $W(X)$ で表すことにする．

距離空間の完備性と縮小写像の不動点の関係を議論する前に，もう1つ重要な写像について述べておこう．X を距離空間とし，T を X から X への写像としよう．このとき，T が Kannan 写像 [60] であるとは，ある k $(0 \le k < \frac{1}{2})$ が存在して

$$d(Tx, Ty) \le k\{d(Tx, x) + d(Ty, y)\}, \quad \forall x, y \in X$$

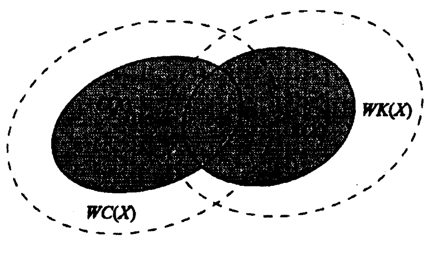
が成り立つときをいう．$K(X)$ で X 上の Kannan 写像の全体を表すことにする．まず距離空間 X 上の縮小写像と Kannan 写像の拡張をしておこう．X を距離空間とし，T を X から X への写像とする．このとき，T が弱縮小写像であるとは，ある $k \ge 0$ とある $p \in W(X)$ が存在して

$$p(Tx, Ty) \le kp(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

が成り立つときをいう．X 上の弱縮小写像の全体を $WC(X)$ で表すことにする．T が弱 Kannan 写像であるとは，ある k $(0 \le k < \frac{1}{2})$ と $p \in W(X)$ が存在して

$$p(Tx, Ty) \le k\{p(Tx, x) + p(Ty, y)\}, \quad \forall x, y \in X$$

が成り立つときをいう．X 上の弱 Kannan 写像の全体を $WK(C)$ で表すことにする．距離空間 X の縮小写像は連続であるが，Kannan 写像は一般には連続でない．そこで，縮小写像の全体 $C(X)$，Kannan 写像の全体 $K(X)$，弱縮小写像の全体 $WC(X)$，弱 Kannan 写像の全体 $WK(X)$ の間には次の関係があると想像される．



しかしながら，塩路–鈴木–高橋 [47] は次の定理を証明した．

定理 3.2 (**[47]**). X を距離空間とする．このとき

$$WC(X) = WK(X)$$

が成り立つ．

この結果を用いて，塩路–鈴木–高橋 [47] は距離空間の完備性と不動点の存在の同値性に関する次の定理を得た．

定理 3.3 (**[47]**). X を距離空間とする．このとき，(1),(2),(3),(4) の命題は同値である．

(1) X は完備である;

(2) 任意の $T \in K(X)$ に対して，$F(T) \neq \phi$ である；

(3) 任意の $T \in WC(X)$ に対して，$F(T) \neq \phi$ である；

(4) 任意の $T \in WK(X)$ に対して，$F(T) \neq \phi$ である．

また，鈴木–高橋 [51] は次の定理も証明している．

定理 3.4 (**[51]**). X をノルム空間とする．このとき，(1),(2) の命題は同値である．

(1) X は完備である（X は Banach 空間である）;

(2) 任意の $T \in C(X)$ に対して，$F(T) \neq \phi$ である．

4 Banach 空間の正規構造と不動点定理

この節の初めに，Banach 空間の凸集合に関する正規構造の定義をしておこう．E を Banach 空間とし，K を E の有界閉凸集合とする．このとき，$x \in K$ に対して

$$r_x(K) = \sup\{\|x - y\| : \ y \in K\}$$

を定義する．また $\delta(K)$ によって K の直径を表すことにする．このとき，Banach 空間 E の閉凸集合 C が正規構造 (normal structure) をもつとは，C の 2 点以上含む任意の有界閉凸集合 K が，$r_x(K) < \delta(K)$ となるような点 $x \in K$ を含むときをいう．一様凸な Banach 空間の閉凸集合や一般の Banach 空間のコンパクト凸集合は正規構造をもつことはよく知られている [60]．次の定理は Kirk[26] によって証明された．

定理 4.1 (**[26]**). E を Banach 空間とする．C を E の弱コンパクトな凸集合とし，正規構造をもつとする．このとき，C 上の非拡大写像 T は C の中に不動点をもつ．

1981年，Baillon–Schöneberg [6] は正規構造より弱い概念を定義し，Kirkの不動点定理の拡張定理を得た．彼らの不動点定理を述べる前に次の定義を与えておく．E をBanach空間とし，C を E の閉凸集合とする．このとき，C が asymptotic normal structure をもつとは，C の2点以上を含む有界閉凸集合 K と，$x_n - x_{n+1} \to 0$ を満たす任意の K の点列 $\{x_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \delta(K)$$

を満たす $x \in K$ が存在するときをいう．

定理 4.2 ([6])**.** E をBanach空間とする．C を E の弱コンパクトな凸集合とし，asymptotic normal structureをもつとする．このとき，C 上の非拡大写像 T は C の中に不動点をもつ．

問題 E をBanach空間とし，C を弱コンパクトな凸集合とする．このとき，C 上の非拡大写像が不動点をもつための必要十分条件を見つけよ．

一方，DeMarr[14] とBrowder[9] は非拡大写像の可換な族に対して次の不動点定理を証明した．

定理 4.3 ([14])**.** C をBanach空間 E のコンパクト凸集合とし，$\mathcal{S}$ を C から C への非拡大写像からなる可換な族とする．このとき，$\mathcal{S}$ は C の中に共通な不動点をもつ．

定理 4.4 ([9])**.** C を一様凸なBanach空間 E のコンパクト有界閉凸集合 C とし，$\mathcal{S}$ を C から C への非拡大写像からなる可換な族とする．このとき，$\mathcal{S}$ は C の中に共通な不動点をもつ．

これら2つの定理は，Banach空間のコンパクト凸集合と一様凸なBanach空間の有界閉凸集合が正規構造をもつという性質，及び非拡大写像の族 $\mathcal{S}$ が可換であるという代数的な性質から証明されたものである．この後，これらの性質は非拡大写像の非可換な族（可換な族の条件を含む）にまで拡張された．それらを書く前にいくつかの定義を与えておこう．S をsemitopological半群とし，C をBanach空間 E の閉凸集合とする．このとき，C から C への写像の族 $\mathcal{S} = \{T_t :\ t \in S\}$ が C 上の非拡大半群であるとは，次の3つの条件を満たすときをいう．

(1) $T_{ts}x = T_tT_s, \quad \forall s,t \in S,\ x \in C$;

(2) 任意の $x \in C$ に対して，$s \mapsto T_s x$ は連続である ;

(3) 任意の $x \in S$ に対して，$T_s x$ は非拡大写像である．

C 上の非拡大半群 $\mathcal{S} = \{T_t :\ t \in S\}$ に対して，$F(\mathcal{S})$ は T_s $(s \in S)$ の共通不動点の全体を表すことにする．また，semitopological 半群 S に対して，$C(S)$ は S 上の実数値有界連続関数からなるBanach空間を表すことにする．いま，$C(S)$ の部分集合 $RUC(S)$ を

$$RUC(S) = \{f \in C(S);\ s \mapsto r_s f \text{ は連続}\}$$

で定義すると，$RUC(S)$ は定値関数を含み，かつ ℓ_s と r_s $(s \in S)$ のもとで不変な $C(S)$ の閉部分空間となる．

1969 年高橋 [52] は DeMarr の定理を拡張する非拡大写像の非可換な族に対する最初の不動点定理の証明に成功した．

定理 4.5 ([52]). S を半群とし，C を Banach 空間 E のコンパクトな凸集合とする．$\mathcal{S} = \{T_t :\ t \in S\}$ を C 上の非拡大半群とし，$B(S)$ が left invariant mean をもつものとする．このとき，$\mathcal{S}$ は C の中に共通な不動点をもつ．

Mitchell[39] は高橋の定理を discrete left revesible 半群の場合まで拡張した．

定理 4.6 ([39]). S を discrete left reversible 半群とし，C を Banach 空間のコンパクトな凸集合とする．また，$\mathcal{S} = \{T_t :\ t \in S\}$ を C 上の非拡大半群とする．このとき，$\mathcal{S}$ は C の中に共通不動点をもつ．

Lim[36] は Kirk の不動点定理，Browder の不動点定理，Mitchell の不動点定理を同時に拡張する次の定理を証明した．

定理 4.7 ([36]). S を *left reversible semitopological* 半群とし，C を正規構造をもつ *Banach* 空間の弱コンパクトな凸集合とする．また，$\mathcal{S} = \{T_t :\ t \in S\}$ を C 上の非拡大半群とする．このとき，$\mathcal{S}$ は C の中に共通不動点をもつ．

S を semitopological 半群とするとき，S が left revesible であることと，$RUC(S)$ が invariant mean をもつことは，互いに独立な条件である．1989 年フランスの Marseille で行われた「Fixed Point Theory and Applications」の国際コンファレンスの全体講演の中で，高橋は「S を semitopological 半群とし，$RUC(S)$ が invariant mean をもつとき，Lin の定理は成立するか」という問題を提起した．これに対し，1944 年，高橋–Jeong[63] はこの問題に対する部分的な解答を与える次の不動点定理を証明した．

定理 4.8 ([63]). S を semitopological 半群とし，C を一様凸な Banach 空間の有界閉凸集合とする．また，$\mathcal{S} = \{T_t :\ t \in S\}$ を C 上の非拡大半群とし，$RUC(S)$ は left invariant な submean をもつとする．このとき $\mathcal{S}$ は C の中に共通不動点をもつ．

高橋–Jeong[63] の不動点定理以後，この定理と Lim の不動点定理を同時に拡張するような定理が証明できないかということが問題になった．そしてついに，Lau–高橋 [33] は 1999 年に次のような定理を発見するに至った．

定理 4.9 ([33]). S を semitopological 半群とし，C を正規構造をもつ Banach 空間の弱コンパクトな凸集合とする．また，$\mathcal{S} = \{T_t :\ t \in S\}$ を C 上の非拡大半群とし，$RUC(S)$ は left invariant な submean をもつとする．このとき，$\mathcal{S}$ は C の中に共通不動点をもつ．

5 非線形エルゴード定理

最初の非線形エルゴード定理は，1975 年 Baillon[4] によって，次のような形で証明された．

定理 5.1 ([4]). C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，T を $F(T)$ が空でないような C 上の非拡大写像とする．このとき，任意の $x \in C$ に対して，Ceaàro 平均

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

は $F(T)$ の元に弱収束する．

この定理は，Bruck[12] によって，Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間まで拡張された．

定理 5.2 ([12]). E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．T を $F(T)$ が空でないような C 上の非拡大写像とする．このとき，任意の $x \in C$ に対して，Ceaàro 平均

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

は $F(T)$ の元に弱収束する．

この定理の証明は Hilbert 空間の場合の証明と比べてそれほど簡単なものではなかった．特に定理 5.2 の証明にあたって用いられる次の補助定理は，ノルムの凸性やノルムの微分可能性を用いるもので難しいものである．

定理 5.3. E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．T を C 上の非拡大写像とし，$x \in C$ とする．このとき，集合

$$F(T) \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{co}\{T^n x : \ n \geq m\}$$

は高々一点からなる．

実数パラメータをもつ非拡大半群の非線形エルゴード定理は，Baillon の定理が証明された次の年（1976 年）に，次のような形で証明された．その前に実数パラメータの非拡大半群の定義を与えておく．

定義 5.1. C を Banach 空間 E の閉凸集合とし，$\{S(t) : \ 0 \leq t < \infty\}$ を C 上で定義された写像の族とする．このとき，$\{S(t) : \ 0 \leq t < \infty\}$ が次の 4 つの条件を満たすならば C 上の実数パラメータ非拡大半群と呼ばれる:

(1) $S(t+s)x = S(t)S(s)x, \quad \forall t, s \in [0, \infty), \ x \in C$;

(2) $S(0)x = x, \quad \forall x \in C$;

(3) 任意の $x \in C$ に対して，$t \mapsto S(t)x$ は連続である；

(4) $\|S(t)x - S(t)y\| \leq \|x - y\|, \quad \forall t \in [0, \infty], \ x, y \in C$.

定理 5.4 ([5]). C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，$\{S(t):\ t \in [0,\infty)\}$ を C 上の非拡大半群とする．もし $\cap_{t\geq 0}F(S(t))$ が空でないなら，任意の $x \in C$ に対して

$$S_\lambda = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt$$

は $\cap_{t\geq 0}F(S(t))$ の元に弱収束する．

一方，Banach 空間における実数パラメータの非拡大半群のエルゴード定理は，宮寺–小林 [41] によって，次のような形で証明された．

定理 5.5 ([41]). E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$\{S(t):\ t \in [0,\infty)\}$ を C 上の非拡大半群とする．このとき，$\cap_{t\geq 0}F(S(t))$ が空でないなら，任意の $x \in C$ に対して

$$S_\lambda = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt$$

は $\cap_{t\geq 0}F(S(t))$ の元に弱収束する．

この後，これらの定理はもっと一般の半群（可換及び非可換な半群）の場合まで拡張されることになるが，それはまず Hilbert 空間の場合でなされた．可換の場合に拡張したのが，平野–高橋 [20] であり，非可換の場合に拡張したのが高橋 [54]，Rodé[45] であった．Baillon の定理は著者 [57] によって次の形にまで拡張されているので，それをあげておく．その前にいくつかの定義を与えておく．

S を semitopological 半群とし，X を恒等的に 1 となる関数を含む $B(S)$ の部分空間とする．また，$B(S)$ の部分空間 X は $\ell_a(X) \subset X$，$r_a(X) \subset X$ を満たすものとする．このとき，X 上の means の net $\{\mu_\alpha\}$ が $f \in X$ と $a \in S$ に対して

$$\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(\ell_a f) \to 0, \quad \mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(\ell_a f) \to 0$$

を満たすとき，漸近的に不変であるという．例えば，$S = \{0,1,2,\dots\}$ とする．このとき $B(S)$ の元 $x = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ に対して

$$\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k, \quad n = 1,2,3,\dots$$

とすると，$\{\mu_n\}$ は $B(S)$ 上の漸近的に不変な means の点列である．

C を Hilbert 空間 H の閉部分集合とし，$\mathcal{S} = \{T_t:\ t \in S\}$ を C から C への非拡大半群とする．いま，$x \in C$ に対して，$\sup_{s\in S}\|T_s x\| < +\infty$ とすると $RUC(S)$ 上の mean μ に対して，Riesz の定理によって

$$\mu_t(T_t x, y) = (x_0, y), \quad \forall y \in H$$

となる $x_0 \in H$ が存在する [54] が，この x_0 を $T_\mu x = x_0$ で表すと次の定理が成り立つ．

定理 5.6 ([54]). C を Hilbert 空間 H の閉部分集合とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上の非拡大半群とし, $\{\mu_\alpha\}$ を $RUC(S)$ 上の漸近的に不変な means の net とする. さらに, C のある元 x に対し, $\{T_t x : t \in S\}$ は有界で, $\cap_{t\in S}\overline{co}\{T_{ts}x : s \in S\} \subset C$ とする. このとき, $\cap_{t\in S}F(T_t) \neq \phi$ であり, かつ $\{T_{\mu_\alpha}x\}$ は $\cap_{t\in S}F(T_t)$ の元に弱収束する.

一方, Banach 空間の場合で得られていた定理 5.2 (Bruck[12]) と定理 5.5 (宮寺–小林 [41]) をもっと一般な半群にまで拡張することが著者等 [19] によって試みられていたが, S に可換という条件をつけることによって次のような形で証明された. それを述べる前に定義を 1 つ与えておく.

定義 5.2. $RUC(S)$ 上の連続線形汎関数の net $\{\mu_\alpha\}$ が, 次の条件 (1),(2),(3) を満たすとき strongly regular といわれる.

(1) $\sup_\alpha \|\mu_\alpha\| < \infty$;

(2) $\lim_\alpha \mu_\alpha(1) = 1$;

(3) すべての $s \in S$ に対して $\lim_\alpha \|\mu_\alpha - r_s{}^*\mu_\alpha\| = 0$.

定理 5.7 ([19]). E を一様な凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, C を E の閉凸部分集合とする. S を可換な semitopological 半群とし, $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ となる C 上の非拡大半群とする. このとき, C から $F(\mathcal{S})$ 上の非拡大 retraction P で, 任意の $t \in S$ に対して, $PT_t = T_tP = P$ であり, 任意の $x \in C$ に対して $Px \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}$ となるものが一意に存在する. さらに, $RUC(S)$ 上の連続汎関数の net $\{\mu_\alpha\}$ が strongly regular ならば, 任意の $x \in C$ に対して, $\{T_{\mu_\alpha}x\}$ が Px に弱収束する.

上の定理が証明された後, S が非可換の場合に証明可能かという問題が浮上してきたがそれは最近 Lau–塩路–高橋 [30] によって, 次のような形で解決された.

定理 5.8 ([30]). S を semitopological 半群とし, C を一様凸な Banach 空間の閉凸集合とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ となる C 上の非拡大半群とし, さらに $RUC(S)$ が invariant mean をもつとする. このとき, C から $F(\mathcal{S})$ の上への非拡大 retraction P で, 任意の $t \in S$ に対して $PT_t = T_tP = P$ であり, 任意の $x \in C$ に対して $Px \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}$ となるものが存在する.

この定理は, 1981 年 Hilbert 空間において高橋 [54] によって証明されていた ergodic retraction の存在定理を完全に拡張するものである. 彼らはまた Róde のエルゴード定理 [45] を Banach 空間まで拡張するような次の定理を得た.

定理 5.9 ([30]). S を semitopological 半群とし, E を一様凸で, Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする. C を E の閉凸集合とし, $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ となる C 上の非拡大半群とする. このとき, C から $F(\mathcal{S})$ 上の非拡大 retraction P で, 任意の $t \in S$ に対して $PT_t = T_tP = P$ であり, 任意の $x \in C$ に対して $Px \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}$ となるものが一意に存在する. さらに $\{\mu_\alpha\}$ を $RUC(S)$ 上の means の asymptotically invariant net とすると, 任意の $x \in C$ に対して $\{T_{\mu_\alpha}\}$ は Px に弱収束する.

上の定理を証明するにあたって，Lau–塩路–高橋 [30] は定理 5.8 と Lau–西浦–高橋 [29] によって証明されていた次の定理を用いた.

定理 5.10 ([29]). S を semitopological 半群とし，E を一様凸で，Fréchet 微分可能なノルムをもつ *Banach* 空間とする．C を E の閉凸集合とし，$\mathcal{S} = \{T_t:\ t \in S\}$ を $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ となる C 上の非拡大半群とする．このとき，任意の $x \in C$ に対して，集合

$$F(\mathcal{S}) \cap \bigcap_{s \in S} \overline{co}\{T_{ts}x:\ t \in S\}$$

は高々一点からなる.

6 ノルムの微分可能性と収束定理

C を Banach 空間 E の閉凸集合とし，T を C から C への非拡大写像とする．Halpern[18] は Hilbert 空間で次の問題を考えた：$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ とし

$$x_1 = x \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

とすると，どのような条件の下で $\{x_n\}$ は T の不動点に収束するか．これに対して，Wittmann [67] は次の定理を証明した.

定理 6.1 ([67]). $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の元 α_n の実数列で

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$$

となるものとする．C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，T を C から C への $F(T) \neq \phi$ となる非拡大写像とする．$x \in C$ とし，$x_1 = x$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

とする．このとき，$\{x_n\}$ は T の不動点 x_0 に強収束する．また，$x_0 = Px$ である．ただし，P は H から $F(T)$ の上への metric projection である.

塩路–高橋 [48] は Wittmann の定理を Banach 空間の場合まで拡張したが，Halpern の問題を Banach 空間の場合で解くことは，それまで未解決な問題にされていた.

定理 6.2 ([48]). $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の元 α_n の実数列で

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$$

となるものとする．E を一様凸で一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする C を E の閉凸部分集合とし，T を C から C への $F(T) \neq \phi$ となる非拡大写像とする．$x \in C$ とし，$x_1 = x$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

とする．このとき，$\{x_n\}$ は T の不動点 x_0 に強収束する．また，$x_0 = Px$ である．ただし，P は C から $F(T)$ の上へのサニー非拡大な retraction である．

一方，清水–高橋 [46] は複数の非拡大写像に対する最初の共通不動点近似法を考察し，次の定理を得た．

定理 6.3 **([46])**. H を Hilbert 空間とし，C を H の閉凸集合とする．S, T を C から C への 2 つの可換な非拡大写像とし，$F(S) \cap F(T) \neq \phi$ とする．$\{\alpha_n\}$ を

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \infty$$

を満たす実数列とする．このとき，$x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)\frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} S^i T^j x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(S) \cap F(T)$ の元 Px に強収束する．ただし，P は C から $F(T)$ の上への metric projection である．

定理 6.4 **([46])**. H を Hilbert 空間とし，C を H の閉凸集合とする．$\{S(t):\ 0 \leq t < \infty\}$ を C 上の実数パラメータ非拡大半群とし，$\cap_{t\geq 0} F(S(t)) \neq \phi$ とする．$\{\alpha_n\}$ を

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

を満たす実数列とする．このとき，$x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} S(u)x_n\, du, \quad n = 1, 2, \ldots$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\{t_n\}$ を $t_n \to \infty$ となる実数列とするなら，$\cap_{t\geq 0} F(S(t))$ の元 Px に強収束する．ただし，P は C から $\cap_{t\geq 0} F(S(t))$ の上への metric projection である．

定理 6.4 は，塩路–高橋 [49] によって，次の定理まで拡張された．

定理 6.5 **([49])**. E を一様凸で一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$\{S(t):\ 0 \leq t < \infty\}$ を C 上の実数パラメータ非拡大半群とし，$\cap_{t\geq 0} F(S(t)) \neq \phi$ とする．$\{\alpha_n\}$ を

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

を満たす実数列とする．このとき，$x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} S(u)x_n\, du, \quad n = 1, 2, \ldots$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\{t_n\}$ を $t_n \to \infty$ となる実数列とするなら，$\cap_{t\geq 0} F(S(t))$ の元 Px に強収束する．ただし，P は C から $\cap_{t\geq 0} F(S(t))$ の上へのサニー非拡大 retraction である．

さらに，上の定理は，塩路–高橋 [50] によって，非拡大半群の場合まで拡張されている．

定理 6.6 ([50])**.** E を一様凸で一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$\mathcal{S} = \{T_t :\ t \in S\}$ を $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ となる C 上の非拡大半群とする．また，$\{\mu_n\}$ を $\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \ell_s^* \mu_n\| = 0$ $(s \in S)$ となる $RUC(S)$ 上の means の列とする．$x, y_1 \in C$ に対して，点列 $\{y_n\} \subset C$ を

$$y_{n+1} = \beta_n x + (1-\beta_n) T_{\mu_n} y_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

で定義する．ただし，$\{\beta_n\} \subset [0,1]$ は $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ ，$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ を満たすとする．このとき，$\{y_n\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に強収束する．

Mann[37] は Halpern とは異なる次の問題を考えた：$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ とし，$x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1-\alpha_n) x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

とするとき，どのような条件の下で $\{x_n\}$ は T の不動点に収束するか．Reich[43] は Banach 空間で次の定理を証明した．

定理 6.7 ([43])**.** E を一様な凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし，C を E の閉凸部分集合，T を C から C への $F(T) \neq \phi$ となる非拡大写像とする．$\{\alpha_n\}$ を実数列で

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1-\alpha_n) = \infty$$

を満たすものとする．このとき，$x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1-\alpha_n) x_n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ弱収束する．

厚芝–高橋 [2, 3] は複数の非拡大写像に対する Mann タイプの次の 2 つの収束定理を得た．

定理 6.8 ([2])**.** E を一様凸な Banach 空間とし，Opial 条件を満たすか，そのノルムが Frechét 微分可能であるとする．C を E の閉凸集合とし，S と T を $ST = TS$ 及び $F(T) \cap F(S) \neq \phi$ を満たす C から C への非拡大写像とする．点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=0}^{n-1} S^i T^j x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

と定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $0 \leq \alpha_n < 1$ を満たす実数列とする．このとき，$\{x_n\}$ は $F(T) \cap F(S)$ の元に弱収束する．

定理 6.9 ([3]). E を一様な凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし，C を E の閉凸部分集合とする．$\{S(t):\ 0 \leq t < \infty\}$ を C 上の $\cap_{t\geq 0}F(S(t)) \neq \phi$ となる非拡大写像とし，$\{t_n\}$ を $t_n \to \infty$ となる実数列とする．このとき，$x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} S(u)x_n\,du, \quad n = 1, 2, \dots$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ はされるは $0 \leq \alpha_n \leq a < 1$ を満たす実数列とする．このとき点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{t\geq 0}F(s(t))$ の点に弱収束する．

定理 6.9 はまた厚芝–塩路–高橋 [1] によって次の定理にまで拡張されている．

定理 6.10 ([1]). E を一様な凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし，C を E の閉凸部分集合とし，$\mathcal{S} = \{T_t:\ t \in S\}$ を $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ となる C 上の非拡大写像とする．また $\{\mu_n\}$ を $\lim_{n\to\infty}\|\mu_n - \ell_s^*\mu_n\| = 0$ $(s \in S)$ となる $RUC(S)$ 上の means の列とし，点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_{\mu_n}x_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は $0 \leq \alpha_n \leq a < 1$ を満たすものとする．このとき $\{x_n\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束する．

Halpern タイプの収束定理と Mann タイプの収束定理とでは Banach 空間のノルムの微分可能性に興味ある違いが出ている．Halpern タイプは一様 Gâteaux 微分可能性を仮定して強収束定理を証明しているのに対し，Mann タイプでは Fréchet 微分可能性を仮定して弱収束定理を証明している．

参考文献

[1] S. Atsushiba, N. Shioji and W. Takahashi, *Approximating common fixed points by the Mann iteration process in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 351–361.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), 117–127.

[3] S. Atsushiba and W. Takahashi, *A weak convergence theorem for nonexpansive semigroups by the Mann iteration process in Banach spaces*, in Nonlinear Anaysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds.), World Scientific, 1999, pp. 102–109.

[4] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodic pour les contraction non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris **280** (1975), 1511–1514.

[5] J. B. Baillon, *Quelques properiétès de convergence asymptotique pour les semigroupes de contractions impaìres*, C. R. Acad. Sci. Paris **283** (1976), 75–78.

[6] J. B. Baillon and R. Schöneberg, *Asymptotic normal structure and fixed points of nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 257–264.

[7] H. Brèzis, Opérateurs maximaux monotones, Mathematics Studies No.5, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[8] F. E. Browder, *Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Sci. USA **43** (1965), 1272-1276.

[9] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **54** (1965), 1041–1044.

[10] F. E. Browder, *Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 660–665.

[11] R. E. Bruck, *A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **53** (1974), 59–71.

[12] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 107-116.

[13] M. M. Day, *Amenable semigroups*, Illinois J. Math. **1** (1957), 509–544.

[14] E. DeMarr, *Common fixed points for commuting contraction mappings*, Pacific J. Math. **13** (1963), 1139–1141.

[15] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics **485**, Springer, Berlin, 1975.

[16] K. Fan, *Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformalions*, Math. Z. **68** (1957), 205–217.

[17] D Göhde, *Zum prinzip der kontraktiven abbildung*, Math. Nach. **30** (1965), 251–258.

[18] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

[19] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1269–1281.

[20] N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive semigroups in Hilbert space*, Kodai Math. J. **2** (1979), 11–25.

[21] N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Banach spaces*, Pacific J. Math. **112** (1984), 333–346.

[22] O. Kada, A. T. Lau and W. Takahashi, *Asymptotically invariant net and fixed point set for semigroup of nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **29** (1997), 539–550.

[23] O. Kada, T. Suzuki and W. Takahashi, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric space*, Math. Japonica **44** (1996), 381–391.

[24] O. Kada and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems of almost nonexpansive curves for commutative semigroups*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **5** (1995), 305–324.

[25] O. Kada and W. Takahashi, *Strong convergence and nonlinear ergodic theorems for commutative semigroups of nonexpanseve mapping*, Nonlinear Anal. **28** (1997), 495–511.

[26] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1004–1006.

[27] A. T. Lau, *Invariant means on almost periodic functions and fixed point properties*, Rocky Mountain J. Math. **3** (1973), 69–76.

[28] A. T. Lau, *Amenability and fixed point property for semigroup of non-expansive mappings*, in Fixed Point Theory and Applications (M. A. Théra and J. B. Baillon Eds.), Pitman Research Notes in Mathematics Series #252, 1991, pp.303–313.

[29] A. T. Lau, K. Nishiura and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for semigroups of nonexpansive mappings and left ideals*, Nonlinear Anal. **26** (1996), 1411–1427.

[30] A. T. Lau, N. Shioji and W. Takahashi, *Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, J. Func. Anal. **161** (1999), 62–75.

[31] A. T. Lau and W. Takahashi, *Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroups of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **126** (1987), 277–294.

[32] A. T. Lau and W. Takahashi, *Invariant means and fixed point properties for non-expansive representations of topological semigroups*, Topol. Methods Nonlinear Anal.**5** (1995), 39–57.

[33] A. T. Lau and W. Takahashi, *Invariant submeans and semigroups of nonexpansive mappings on Banach spaces with normal structure*, J. Func. Anal. **142** (1996), 79–88.

[34] A. T. Lau and W. Takahashi, *Nonlinear submeans on semigroups*, Topol. Methods Nonlinear Anal.**22** (2003), 345–353.

[35] T. C. Lim, *A fixed point theorem for families of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **53** (1974), 484-493.

[36] T. C. Lim, *Characterization of normal structure*, Proc. Amer. Math. Soc. **43** (1974), 313–319.

[37] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[38] T. Mitchell, *Topological semigroups and fixed points*, Illinois J. Math. **14** (1970), 630–641.

[39] T. Mitchell, *Fixed points of reversible semigroups of nonexpansive mappings*, Kōdai Math. Sem. Rep. **22** (1970), 322–323.

[40] N. Mizoguchi and W. Takahashi, *On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal. **14** (1990), 69–80.

[41] I. Miyadera and K. Kobayasi, *On the asymptotic behavior of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **6** (1982), 349–365.

[42] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[43] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[44] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*. J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287–292.

[45] G. Rodé, *An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **85** (1982), 172–178.

[46] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71–83.

[47] N. Shioji, T. Suzuki and W. Takahashi, *Contraction mappings, Kannan mappings and metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3117–3124.

[48] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequence for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3641–3645.

[49] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for continuous semigroups in Banach spaces*, Math. Japonica **50** (1999), 57–66.

[50] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 73–87.

[51] T. Suzuki and W. Takahashi, *Fixed point theorems and characterizations of for metric completeness*, Topol. Methods Nonlinear Anal.**8** (1996), 371–382.

[52] W. Takahashi, *Fixed point theorem for amenable semigroups of non-expansive mappings*, Kōdai Math. Sem. Rep. **21** (1969), 383-386.

[53] W. Takahashi, *Recent results in fixed point theory*, SEA Bull. Math. **4** (1981), 59–85.

[54] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253–256.

[55] W. Takahashi, *Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 543–553.

[56] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 55–58.

[57] W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity*, Can. J. Math. **44** (1992), 880–887.

[58] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1283–1293.

[59] W. Takahashi, *Fan's existence theorem for inequalities concerning convex functions and its applications*, in Minimax Theory and Applications (S. Simons and B. Ricceri, Eds.), Kluwer Academic Publishers, 1998, pp.241-260.

[60] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[61] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[62] W. Takahashi, *Iterative methods for approximation of fixed points and their applications*, J. Oper. Res. Soc. Japan **43** (2000), 87–108.

[63] W. Takahashi and D. H. Jeong, *Fixed point theorem for nonexpansive semigroups on Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 1175–1179.

[64] W. Takahashi and G. E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Japon. **48** (1998), 1–9.

[65] W. Takahashi and J. Y. Park, *On the asymptotic behavior of almost orbits of commutative semigroups in Banach spaces*, in Nonlinear and Convex Analysis (B. L. Lin and S. Simons, Eds.), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Marcel Dekker, Inc., New York, 1987, pp.271–293.

[66] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators.* J. Math. Anal. Appl. **104** (1984), 546-553.

[67] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. **58** (1992), 486–491.

[68] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.