数理解析研究所講究録 1401 巻 2004 年 58-72

TRANSPLANTATION THEOREMS AND THEIR APPLICATIONS

金沢大学工学部　勘甚裕一 (Yuichi Kanjin)
Faculty of Engineering,
Kanazawa University

本稿では，前半第 1 節で直交関数展開に関する移植定理の考え方，役割について解説したい．その 1 つの重要な役割は，直交関数展開におけるフーリエ・マルチプライヤーの有界性に関する移転定理が，この移植定理から導かれることである．このことの説明と移転定理の意味についても述べたい．後半の第 2 節では，著者 [14] が最近得た，実ハーディー空間におけるハンケル変換に関する移植定理と，フーリエ・マルチプライヤーの有界性への応用について述べる．

1. 移植定理

直交関数展開における移植定理 (transplantation theorem) とは何かを説明するために，フーリエ級数論における M. Riesz の定理から始めたい．

周期 2π をもち，区間 $(-\pi,\pi)$ において可積分である周期関数 $f(\theta)$ のフーリエ級数展開を

$$f(\theta)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin n\theta\,d\theta$$

とする．関数 $f(\theta)$ の共役関数 $\tilde{f}(\theta)$ は，フーリエ級数展開

$$\tilde{f}(\theta)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin n\theta-b_n\cos n\theta)$$

をもつような関数として定義される．このとき，M. Riesz が示したのは次の定理である．

The M. Riesz theorem (M. Riesz [1]). $1<p<\infty$ とする．次の不等式が成り立つ：

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(\theta)|^p\,d\theta\le C\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^p\,d\theta.$$

ここで，C は p のみに依存する定数である．

この定理から，フーリエ級数の部分和の L^p 収束が得られることは，よく知られている．また，共役関数 $\tilde{f}(\theta)$ は，特異積分

$$\tilde{f}(\theta)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\epsilon<|\theta|<\pi} f(t)\cot\frac{\theta-t}{2}\,dt$$

によって表現される．これは，2π 周期関数に対するヒルベルト変換そのものである．M. Riesz の定理は，その後特異積分論を触発するなど，調和解析学における極めて重要な定理の１つである．

この定理を移植定理の視点から書き直すことによって，移植定理の考え方・役割を説明したい．まず，作用素 T と T' を定義する．2π 周期偶関数

$$f(\theta)\sim\ (a_0/2)+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta+a_3\cos 3\theta+\dots$$

に対し，関数 $Tf(\theta)$ を，つぎのフーリエ級数をもつものとして定義する：

(1) $$Tf(\theta)\sim\ (a_0/2)\sin\theta+a_1\sin 2\theta+a_2\sin 3\theta+a_3\sin 4\theta+\dots.$$

また，奇関数

$$g(\theta)\sim\ b_1\sin\theta+b_2\sin 2\theta+b_3\sin 3\theta+\dots$$

に対し，

(2) $$T'g(\theta)\sim\ b_1+b_2\cos\theta+b_3\cos 2\theta+b_4\cos 3\theta+\dots.$$

と定義する．作用素 T は，cosine 級数の係数を sine 級数に「植付け」，作用素 T' は sine 級数の係数を cosine 級数に「植付け」るものであった．このような作用素を移植作用素（transplantation operator）と言う．

いま，偶関数 $f(\theta)$ と奇関数 $g(\theta)$ に対して

$$\tilde{f}(\theta)\sim a_1\sin\theta+a_2\sin 2\theta+\dots,\qquad \tilde{g}(\theta)\sim -b_1\cos\theta-b_2\cos 2\theta-\dots$$

であることに注意すると，次が成り立つことがわかる：

$$Tf(\theta)=f(\theta)\sin\theta+\tilde{f}(\theta)\cos\theta,\qquad T'g(\theta)=g(\theta)\sin\theta-\tilde{g}(\theta)\cos\theta.$$

これより，M. Riesz の定理を使うと，次の形の定理が得られる．

Theorem A．$1<p<\infty$ とする．次の不等式が成り立つ：

(3) $$\int_0^\pi |Tf(\theta)|^p\,d\theta\le C\int_0^\pi |f(\theta)|^p\,d\theta,$$

(4) $$\int_0^\pi |T'g(\theta)|^p\,d\theta\le C\int_0^\pi |g(\theta)|^p\,d\theta.$$

我々は，Theorem A のような，移植作用素の有界性を主張する命題を移植定理と呼んでいる．

この移植定理の‘使い方’を，Askey [4] に拠って説明したい．次の結果を取り上げる：

Hardy-Littlewood (1931) ．$1 < p < \infty$ とする．係数 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，条件 $a_{n-1} \geq a_n \to 0$ を満たすものとする．このとき，関数 $f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta$ が p 乗可積分 $\int_0^{\pi} |f(\theta)|^p \, d\theta < \infty$ である必要十分条件は，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-1} < \infty$ である．

自然に，sine 級数に対して同様の結果が成り立たないか問題にしたくなる．この問題を，上の移植定理で扱ってみよう．仮定は，$1 < p < \infty$ と係数 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が同じ条件 $b_{n-1} \geq b_n \to 0$ を満たすことである．まず，関数 $g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$ が p 乗可積分であるとする．このとき $T'g(\theta)$ は (2) の形の cosine 級数であり，(4) から p 乗可積分である．これらのことから，関数 $T'g(\theta)$ を考えれば，上の Hardy-Littlewood の結果から $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}^p n^{p-1} < \infty$ であり，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p n^{p-1} < \infty$ が従う．逆に，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p n^{p-1} < \infty$ を仮定する．明らかに，$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}^p n^{p-1} < \infty$ なので，再び上の結果から cosine 級数 $f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} \cos n\theta$ は p 乗可積分である．このとき，(3) より sine 級数 $Tf(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$ が p 乗可積分であることがわかる．これで，Hardy-Littlewood の結果が sine 級数についても同じ形で成り立つことがわかった．

移植定理があれば上で見たように，cosine 級数に対して得られている結果が，そっくり sine 級数に移ることになる．逆に，sine 級数に対して得られている結果が，cosine 級数に移ることにもなる．これが，移植定理の考え方である．

以上，M. Riesz の定理から始めて，それが cosine 級数と sine 級数の間の移植定理を導くこと，そしてそれを使って移植定理の考え方・役割について述べた．次に，一般的な直交関数展開の枠組みで移植定理と，フーリエ・マルチプライヤーの有界性に関する移転定理を定式化し，それらの関係を述べたい．

$\{\phi_\alpha(x)\}, \{\psi_\alpha(y)\}$ をそれぞれルベーグ測度 dx, dy に関する 2 つの完備な正規直交系とする．定義されている区間は，どこであってもかまわない．関数 $f(x)$ を直交関数系 $\{\phi_\alpha(x)\}$ によって，

$$f(x) \sim \sum_{\alpha} (f, \phi_\alpha)\phi_\alpha(x), \quad (f, \phi_\alpha) = \int f(t)\overline{\phi_\alpha(t)}dt$$

とフーリエ展開する．同様に，関数 $g(y)$ を直交関数系 $\{\psi_\alpha(y)\}$ によって，

$$g(y) \sim \sum_{\alpha} (g, \psi_\alpha)\psi_\alpha(y), \quad (g, \psi_\alpha) = \int g(s)\overline{\psi_\alpha(s)}ds$$

とフーリエ展開する．作用素 T_ψ^ϕ を

$$T_\psi^\phi f(y) \sim \sum_{\alpha} (f, \phi_\alpha)\psi_\alpha(y) = \int f(t) \sum_{\alpha} \overline{\phi_\alpha(t)}\psi_\alpha(y)\, dt$$

と定義し，ϕ 系から ψ 系への**移植作用素**（**transplantaion operator**）と呼ぶ．逆方向への作用素，ψ 系から ϕ 系へのそれ T_ϕ^ψ は，

$$T_\phi^\psi g(x) \sim \sum_{\alpha} (g, \psi_\alpha)\phi_\alpha(x) = \int g(s) \sum_{\alpha} \overline{\psi_\alpha(s)}\phi_\alpha(x)\, ds$$

で定義される．明らかに，

$$T^{\psi}_{\phi}T^{\phi}_{\psi}f = f, \quad T^{\phi}_{\psi}T^{\psi}_{\phi}g = g$$

が成り立つ．我々が，欲しいのは，積分核 $\sum_{\alpha}\overline{\phi_{\alpha}(t)}\psi_{\alpha}(y)$，$\sum_{\alpha}\overline{\psi_{\alpha}(s)}\phi_{\alpha}(x)$ をもつ積分作用素としての移植作用素 T^{ϕ}_{ψ}，T^{ψ}_{ϕ} の有界性に関する次の主張である．

Statement I．

$$(\phi \to \psi\text{移植}) \quad \|T^{\phi}_{\psi}f\|_p \le C\|f\|_p \qquad ; \quad (\psi \to \phi\text{移植}) \quad \|T^{\psi}_{\phi}g\|_p \le C\|g\|_p.$$

ここで，$\|\cdot\|_p$ は，考えている空間の L^p ノルムとする．

この主張が成り立つとき，Statement I を ϕ 系と ψ 系の間の**移植定理**（**transplantation theorem**）と言う．M. Riesz の定理から導かれた Theorem A は，cosine 系と sine 系の間の移植定理である．そこで説明したように，ϕ 系と ψ 系の間の移植定理があれば，ϕ 系に関する直交展開に関して得られている成果が，そっくり ψ 系に関する直交展開へ移ることになる．このように移植定理とは，豊富な成果をもつ直交関数系の，その成果をそっくり未だ良く分っていない他の直交関数系へ移してしまおうと言う考えの定理である．移したい成果の最も重要なものはフーリエ・マルチプライヤー作用素の有界性である．マルチプライヤー作用素は，特異積分作用素などを含む，調和解析における研究対象として重要なものである．このフーリエ・マルチプライヤー作用素の有界性に関する移転定理といわれる定理が，移植定理から導かれることを述べよう．

有界数列 $\lambda = \{\lambda_{\alpha}\}$ に対し，ϕ 系におけるマルチプライヤー作用素 M^{ϕ}_{λ} は、

$$M^{\phi}_{\lambda}f(x) \sim \sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}(f,\phi_{\alpha})\phi_{\alpha}(x)$$

で定義され，ψ 系のそれ M^{ψ}_{λ} は，

$$M^{\psi}_{\lambda}g(y) \sim \sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}(g,\psi_{\alpha})\psi_{\alpha}(y)$$

と定義される．次の関係が基本的である：

$$M^{\phi}_{\lambda}f = T^{\psi}_{\phi}M^{\psi}_{\lambda}T^{\phi}_{\psi}f, \tag{5}$$

$$M^{\psi}_{\lambda}g = T^{\phi}_{\psi}M^{\phi}_{\lambda}T^{\psi}_{\phi}g. \tag{6}$$

いま，ϕ 系と ψ 系の間の移植定理が成り立っているとする．関係 (5) より，

$$\begin{aligned}\|M^{\phi}_{\lambda}f\|_p = \|T^{\psi}_{\phi}M^{\psi}_{\lambda}T^{\phi}_{\psi}f\|_p &\le |T^{\psi}_{\phi}|_p\|M^{\psi}_{\lambda}T^{\phi}_{\psi}f\|_p \\ &\le |T^{\psi}_{\phi}|_p|M^{\psi}_{\lambda}|_p\|T^{\phi}_{\psi}f\|_p \le |T^{\psi}_{\phi}|_p|M^{\psi}_{\lambda}|_p|T^{\phi}_{\psi}|_p\|f\|_p.\end{aligned}$$

ここで，$|\cdot|_p$ は作用素の L^p 空間上での作用素ノルムを表す．

つまり，ψ 系でマルチプライヤー作用素 M_λ^ψ の L^p 有界性 $|M_\lambda^\psi|_p < \infty$ が成り立っているならば ϕ 系でも L^p 有界性 $|M_\lambda^\phi|_p < \infty$ が成り立つということである．関係 (6) もあるので，逆も言える．即ち，移植定理からマルチプライヤー作用素に関する次の主張が導かれる．

Statement II.

$$(\psi \to \phi\text{型}) \qquad |M_\lambda^\psi|_p < \infty \text{ ならば } |M_\lambda^\phi|_p < \infty \quad ;$$
$$(\phi \to \psi\text{型}) \qquad |M_\lambda^\phi|_p < \infty \text{ ならば } |M_\lambda^\psi|_p < \infty.$$

うえの Stetement II のうち，($\psi \to \phi$型) の主張が成り立つとき，我々はそれを ψ 系から ϕ 系への**移転定理**（**transference theorem**）といい，($\phi \to \psi$型) の主張が成り立つとき，ϕ 系から ψ 系への移転定理という．

もし，ψ 系において，マルチプライヤー作用素の L^p 有界性に関し豊富な結果の蓄積があれば，($\psi \to \phi$型) の移転定理を証明することによって，それらがそっくり ϕ 系に持ち込めるということである．移植定理の最大の目的のひとつは，この有用な移転定理を得ることにある．ただし，移転定理の証明には必ずしも移植定理を必要とはしない（移植定理を介さずに直接別の方法で，移転定理を証明することも行われている）．課題は，よく研究されている直交関数系からあまり研究が進んでいない直交関数系への移転定理，またそれを導く移植定理を証明することである．

注意として，移転定理では ($\psi \to \phi$型) と ($\phi \to \psi$型) のそれぞれが独立に有用である．移転定理を移植定理から導くには，($\psi \to \phi$型) ひとつを導くにも，移植定理の ($\psi \to \phi$移植) と ($\phi \to \psi$移植) が一組となって成り立たなければならない．一方向の移植作用素の有界性が有効に機能する場合もあるが（例えば，[10]），普通は ($\psi \to \phi$移植) と ($\phi \to \psi$移植) 両方をもって移植定理と呼ぶ．

2. ハンケル変換における移植定理

この節においては，ハンケル変換における移植作用素の有界性について議論する．前節との関連でいえば，2つの系 $\phi = \{\phi_\alpha(x)\}_\alpha$，$\psi = \{\psi_\alpha(y)\}_\alpha$ として，第1種ベッセル関数 $J_\mu, \mu > -1$ からなる2つの異なる指数 μ, ν をもつ系 $\{J_\mu(xt)\sqrt{xt}\}_t$，$\{J_\nu(yt)\sqrt{yt}\}_t$ を考えることに相当する（パラメータ α がパラメータ $t > 0$ に対応する）．

区間 $(0, \infty)$ 上の関数 $f(t)$ の指数 μ のハンケル変換 $\mathcal{H}_\mu f(x)$ は次で与えられる：

$$\mathcal{H}_\mu f(y) = \int_0^\infty f(t)\sqrt{yt}J_\mu(yt)\,dt, \quad y > 0,$$

指数 μ が $-1/2, 1/2$ のとき，ベッセル関数は

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \qquad J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

なので，ハンケル変換は，それらのとき cosine, sine 変換である：

$$\mathcal{H}_{-1/2}f(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos yt\,dt,\ \mathcal{H}_{1/2}f(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin yt\,dt.$$

以下において，扱うハンケル変換の指数 μ は，いつでも $\mu\geq -1/2$ であるものとする．

フーリエ変換の場合と同様に，ハンケル変換においても，次の基本的な事柄が成り立つ：

- $\|\mathcal{H}_\mu f\|_2=\|f\|_2$．ただし，$\|f\|_2=\{\int_0^\infty|f(t)|^2\,dt\}^{1/2}$．
- $L^2(0,\infty)$ 上で，$\mathcal{H}_\mu\mathcal{H}_\mu=I$．ただし，$I$ は恒等変換．

2.1. **移植作用素**. ハンケル変換における，指数 ν から μ への移植作用素 $\mathcal{T}_\mu^\nu$ は合成

$$\mathcal{T}_\mu^\nu=\mathcal{H}_\mu\mathcal{H}_\nu$$

によって定義される．移植作用素 $\mathcal{T}_\mu^\nu$ は，$L^2(0,\infty)$ 上においては，$\|\mathcal{T}_\mu^\nu f\|_2=\|f\|_2$ を満たしている．この移植作用素の L^p 有界性，つまり移植定理は D. L. Guy によって得られた．彼は重みつき L^p 空間で結果を得ているが，ここではその主要部分を述べておく．

Guy (1960) ([11]). $1<p<\infty$ とする．移植作用素 $\mathcal{T}_\mu^\nu$ は $L^p(0,\infty)$ 上へ有界作用素として一意的に拡張される．

この結果によって，前節で説明したようにフーリエ変換におけるノルム不等式がハンケル変換の場合に移転することになる．実際，Guy はハンケル変換において，マルチンキーヴィッツ型のマルチプライヤー定理を得るために彼の移植定理を証明した．この移植定理がこの種の定理の初めてのものであると言われている．S. Schindler は，移植作用素の積分核の具体的表示を得ることによって，Guy の移植定理を精密化した．筆者 [14] は最近，この積分核表示を利用して実ハーディー空間上におけるハンケル変換の移植作用素の有界性を証明した．次の小節以降これについて述べたい．ここでは，後の便宜のため Schindler の結果をのべておく．

作用素 $T_{\mu,\nu}$ を次で定義する：

$$T_{\mu,\nu}f(x)=\lim_{\delta\to+0}\int_{|x-y|>\delta}f(y)\tilde{I}_{\mu,\nu}(x,y)\,dy+k(\mu,\nu)f(x), \tag{7}$$

$$k(\mu,\nu)=\cos((\mu-\nu)\pi/2),$$

ただし，$0<y<x$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\tilde{I}_{\mu,\nu}(x,y)\\
&= K_{\mu,\nu}\sqrt{xy}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu}\frac{1}{x^2-y^2}F\left(\frac{\nu-\mu}{2},\frac{\mu+\nu}{2};\nu+1;\frac{y^2}{x^2}\right)\\
(8)\qquad &= 2^{-1}K_{\mu,\nu}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu+1/2}\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right)F\left(\frac{\nu-\mu}{2},\frac{\mu+\nu}{2};\nu+1;\frac{y^2}{x^2}\right),\\
&K_{\mu,\nu}=\frac{2\Gamma((\mu+\nu+2)/2)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma((\mu-\nu)/2)}.
\end{aligned}
$$

$y>x>0$ に対しては，

$$\tilde{I}_{\mu,\nu}(x,y)=\tilde{I}_{\nu,\mu}(y,x)$$

で定義する．ここで，$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ は，超幾何関数である．すなわち，

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k k!}z^k,\qquad |z|<1.$$

ただし，$(\lambda)_0=1,(\lambda)_k=\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1),k\geq 1$ である．以下の議論に必要なSchindler の結果の本質的な部分を書くと：

Schindler (1973) ([19]). (i) $f\in C_c^{\infty}(0,\infty)$ に対して，$\mathcal{T}_{\mu}^{\nu}f(x)=T_{\mu,\nu}f(x)$ *a.e.* $x>0$. ここで，$C_c^{\infty}(0,\infty)$ は開区間 $(0,\infty)$ に台をもつ無限回微分可能な関数の空間である．

(ii) $1<p<\infty$ とする．$\int_0^{\infty}|f(x)|^p\,dx<\infty$ ならば，値 $T_{\mu,\nu}f(x)$ は *a.e.* $x>0$ に対して存在し，

$$\int_0^{\infty}|T_{\mu,\nu}f(x)|^p\,dx\leq C\int_0^{\infty}|f(x)|^p\,dx$$

が成り立つ．

注意として，Schindler の結果から移植作用素 $\mathcal{T}_{\mu}^{\nu}$ は，$L^p(0,\infty),1<p<\infty$ 上に有界作用素として一意的に拡張することが出来，$f\in L^p(0,\infty)$ に対して，$\mathcal{T}_{\mu}^{\nu}f(x)=T_{\mu,\nu}f(x)$ a.e. $x>0$ である．

2.2. **実ハーディー空間における移植定理**. この小節では，筆者 [14] が最近得た，実ハーディー空間におけるハンケル変換に関する移植定理とその応用として得られるヘルマンダー型のマルチプライヤー定理を述べたい．実ハーディー空間において移植定理を考えることは，Guy や Schindler の移植定理で，$p=1$ の場合を考察することである．

定理を述べるために，いくつかの記号を準備しよう．記号 $H^1(\mathbb{R})$ で，いつものように実ハーディー空間を表そう：

$$H^1(\mathbb{R})=\{f(x)=\lim_{t\to+0}\Re F(x+it)\ ;\ F\in H^1(\mathbb{R}_+^2)\}.$$

ここで，$H^1(\mathbb{R}^2_+)$ は上半平面 $\mathbb{R}^2_+$ の古典的ハーディー空間である，すなわち，

$$H^1(\mathbb{R}^2_+)=\{F(z)\ ;\ F(z)\text{ は }\mathbb{R}^2_+\text{ で正則},\|F\|_{H^1(\mathbb{R}^2_+)}=\sup_{t>0}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+it)|\,dx<\infty\}.$$

そして，$f\in H^1(\mathbb{R})$ のノルムは，$\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}=\|F\|_{H^1(\mathbb{R}^2_+)}$ で与えられる．我々は，ハンケル変換の定義域を考慮して，次の実ハーディー空間を扱う：

$$H^1(0,\infty)=\{h|_{(0,\infty)}\ ;\ h\in H^1(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}h\subset[0,\infty)\}.$$

ただし，ノルムは $\|f\|_{H^1(0,\infty)}=\|h\|_{H^1(\mathbb{R})}$ で導入する．ここで，$h\in H^1(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}h\subset[0,\infty)$ かつ $f=h|_{(0,\infty)}$ である．この空間に対して，$H^1(0,\infty)=\{h|_{(0,\infty)}\ ;\ h\in H^1(\mathbb{R})$, 偶関数 $\}$ が成り立っていることが知られている．我々の定理は次である：

定理 ([14]). (i) $\mu\geq-1/2$ かつ $\nu>1/2$ であるとする．このとき，$\mathcal{T}_\mu^\nu$ は，一意的に $H^1(0,\infty)$ 上の有界作用素に拡張され，

$$\|\mathcal{T}_\mu^\nu f\|_{H^1(0,\infty)}\leq C\|f\|_{H^1(0,\infty)}$$

が成り立つ．

(ii) $\mu\geq-1/2$ とする．このとき，$\mathcal{T}_\mu^{-1/2}$ は $H^1(0,\infty)$ から $L^1(0,\infty)$ への有界作用素に一意的に拡張され，

$$\|\mathcal{T}_\mu^{-1/2}f\|_{L^1(0,\infty)}\leq C\|f\|_{H^1(0,\infty)}$$

が成り立つ．ここで，C は μ,ν のみに依存する定数である．

証明の概略は，最後の小節で述べることとし，ここではこの定理からハンケル変換に関するヘルマンダー型のマルチプライヤー定理が得られることを示そう．

関数 $m\in L^\infty(\mathbb{R})$ をマルチプライヤーにもつフーリエ・マルチプライヤー作用素 $\mathcal{M}_m$ は

$$\mathcal{M}_m h=\mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}(h)),\qquad h\in L^2(\mathbb{R})$$

で定義される．ここで，$\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}$ 上の普通のフーリエ変換で，$\mathcal{F}^{-1}$ はその逆変換である．空間 $H^1(\mathbb{R})$ におけるヘルマンダー型のマルチプライヤー定理はすでに知られていて，次のようである．

Theorem B. 関数 $\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq A$ が条件

$$\left(\frac{1}{R}\int_{R<|\xi|\leq 2R}\left|\frac{dm(\xi)}{d\xi}\right|^2dx\right)^{1/2}\leq AR^{-1},\quad R>0 \tag{9}$$

を満たすとする．ただし，A は R には依存しない定数とする．このとき，フーリエ・マルチプライヤー作用素 $\mathcal{M}_m$ は $H^1(\mathbb{R})$ 上へ一意に拡張することができ，$\|\mathcal{M}_m h\|_{H^1(\mathbb{R})}\leq CA\|h\|_{H^1(\mathbb{R})}$ が成り立つ．ここで，C は h と m には無関係な定数である．

我々の移植定理が，この定理からハンケル変換の場合の対応する定理を引き出すことになる．これを説明したい．

関数 ϕ をマルチプライヤーにもつハンケル・マルチプライヤー作用素 $\mathcal{M}_\phi^\mu$ は

$$\mathcal{M}_\phi^\mu f = \mathcal{H}_\mu(\phi \mathcal{H}_\mu(f)), \quad f \in L^2(0,\infty)$$

で定義される．いま条件

$$(10) \qquad \|\phi\|_{L^\infty(0,\infty)} \le A, \quad \left(\frac{1}{R}\int_{R<y\le 2R}\left|\frac{d\phi(y)}{dy}\right|^2 dy\right)^{1/2} \le AR^{-1}, \quad R>0$$

を仮定する．ただし，A は R には依存しない定数とする．作用素 $\mathcal{M}_\phi^{-1/2}$ の有界性は，少し議論がいるが，Theorem B そのものであると言える．よって，以下 $\mu > -1/2$ の場合を考えればよい．まず，等式 $\mathcal{M}_\phi^\mu = \mathcal{T}_\mu^{-1/2}\mathcal{M}_\phi^{-1/2}\mathcal{T}_{-1/2}^\mu$ が成り立っていることに注意する．作用素 $\mathcal{T}_{-1/2}^\mu$ は，定理の (i) から，(H^1,H^1)-有界である．作用素 $\mathcal{M}_\phi^{-1/2}$ は，すぐ前に注意したように (H^1,H^1)-有界である．そして，作用素 $\mathcal{T}_\mu^{-1/2}$ が定理の (ii) より，(H^1,L^1)-有界である．合わせて，次の結果を得る：

系． $\mu \ge -1/2$ とする．仮定 (10) の下で，ハンケル・マルチプライヤー作用素 $\mathcal{M}_\phi^\mu$ は空間 $H^1(0,\infty)$ から $L^1(0,\infty)$ への有界作用素に一意的に拡張でき，

$$\|\mathcal{M}_\phi^\mu f\|_{L^1(0,\infty)} \le CA\|f\|_{H^1(0,\infty)}$$

が成り立つ．ここで，C は f と ϕ には無関係な定数である．

2.3. **定理の証明の概略．** 定理は次の補題１，２から従う．

補題 1. $\mu > -1/2$ とする．このとき，次が成り立つ：

$$\|\mathcal{T}_\mu^{\mu+2} f\|_{H^1(0,\infty)} \le C\|f\|_{H^1(0,\infty)}, \qquad \|\mathcal{T}_{\mu+2}^\mu f\|_{H^1(0,\infty)} \le C\|f\|_{H^1(0,\infty)}.$$

補題 2. (i) $\mu \ge -1/2$ かつ $\nu \ge 1/2$ とする．このとき，

$$\|\mathcal{T}_\mu^\nu f\|_{H^1(0,\infty)} \le C\|f\|_{H^1(0,\infty)}.$$

(ii) $\mu \ge -1/2$ ならば，

$$\|\mathcal{T}_\mu^{-1/2} f\|_{L^1(0,\infty)} \le C\|f\|_{H^1(0,\infty)}.$$

定理がこれらの補題から従うことは，まず定理の (ii) については，補題２の (ii) そのものである．定理の (i)，すなわち $\mu \ge -1/2, \nu > -1/2$ の場合は次の通りである．等式 $\mathcal{T}_\mu^\nu = \mathcal{T}_\mu^{\nu+2}\mathcal{T}_{\nu+2}^\nu$ に注意する．明らかに $\nu+2 \ge 1/2$ なので，補題２の (i) より作用素 $\mathcal{T}_{\nu+2}^\nu$ と $\mathcal{T}_\mu^{\nu+2}$ は，補題１から (H^1,H^1)-有界である．よって，それらの合成である問題の作用素 $\mathcal{T}_\mu^\nu$ は (H^1,H^1)-有界となる．よって，補題１，２から定理が従う．

補題１は，すでに [2, Proposition] で示してあるので，補題２の証明の概略を述べよう．証明のための道具は，Schindler の移植作用素に対する積分表現 (7)，と，実ハー

ディー空間におけるアトム分解及びモレキュールによる実ハーディー空間の特徴づけである．実関数 $a(x)$ が中心 c のアトムであるとは；（1） 区間 $[c-h/2, c+h/2]$ に台をもち，（2） $\|a\|_2 \le h^{-1/2}$，（3） $\int_{\mathbb{R}} a(x)\,dx = 0$ であること．アトム分解は次のことを主張する：$f \in H^1(0,\infty)$ ならば，数列 $\{\lambda_j\}$，$\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$ とアトムの列 $\{a_j\}$，$\operatorname{supp} a_j \subset [0,\infty)$ が存在して，$f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$ かつ $\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| \le C\|f\|_{H^1[0,\infty)}$ である．ここで，C は f には依存しない定数である．実関数 $M(x)$ が中心 c のモレキュールであるとは；（1）

$$N(M) = \|M\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|\ |\cdot - c|\ M\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} < \infty,$$

（2） $\int_{\mathbb{R}} M(x)\,dx = 0$ であること．$N(M)$ をモレキュールノルムという．実ハーディー空間のモレキュールによる特徴づけから，次のことが知られている：モレキュールの列 $\{M_j\}$ が $\sum_j N(M_j) < \infty$ を満たせば，$f = \sum_j M_j \in H^1(\mathbb{R})$ かつ $\|f\|_{H^1(\mathbb{R})} \le C\sum_j N(M_j)$ である．ここで，C は絶対定数．注意として，モレキュールノルムは L^1 ノルムよりも大きい：$\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \le CN(g)$．

補題2の証明に取り掛かろう．$f \in H^1(0,\infty) \cap L^2(0,\infty)$ とする．f をアトム分解する：$f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$ かつ $\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| \le C\|f\|_{H^1[0,\infty)}$．そして，$\operatorname{supp} a_j \subset [0,\infty)$．このとき，

$$\mathcal{T}_\mu^\nu f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \mathcal{T}_\mu^\nu a_j(x) \quad \text{a.e.} x > 0$$

を示すことが出来る．よって，

(I) 「$\mu \ge -1/2, \nu \ge 1/2$ または $\mu \ge -1/2, \nu = -1/2$ のとき，任意のアトム $a(x)$，$\operatorname{supp} a_j \subset [0,\infty)$ に対して，$N(\mathcal{T}_\mu^\nu a) \le C$.」

を示すことが出来るならば，$\mu \ge -1/2, \nu = -1/2$ のとき

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_\mu^{-1/2} f\|_{L^1(0,\infty)} &\le \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|\, \|\mathcal{T}_\mu^{-1/2} a_j\|_{L^1(0,\infty)} \le C\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| N(\mathcal{T}_\mu^{-1/2} a_j) \\ &\le C\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| \le C\|f\|_{H^1(0,\infty)}.\end{aligned}$$

を得る．$H^1(0,\infty) \cap L^2(0,\infty)$ が $H^1(0,\infty)$ で稠密なことから補題2の (ii) が得られる．さらに，

(II) 「$\mu \ge -1/2, \nu \ge 1/2$ のとき，任意のアトム $a(x)$，$\operatorname{supp} a \subset [0,\infty)$ に対して，$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}_\mu^\nu a(x)\,dx = 0$.」

を示せば，$\mathcal{T}_\mu^\nu a$ がモレキュールであることがわかり，

$$\|\mathcal{T}_\mu^\nu f\|_{H^1(0,\infty)} \le C\sum_{j=0}^{\infty} N(\lambda_j \mathcal{T}_\mu^\nu a_j) \le C\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| N(\mathcal{T}_\mu^\nu a_j)$$
$$\le C\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| \le C\|f\|_{H^1(0,\infty)}$$

となり，再び $H^1(0,\infty)\cap L^2(0,\infty)$ が $H^1(0,\infty)$ で稠密であることを使って，補題2の (i) を得て，定理の証明が終わる．よって，(I) と (II) を示せばよいことになった．

(I) を示してみよう．a を中心が c で $\operatorname{supp} a \subset [0,\infty)$ であるアトムとする．$Q = [c-h/2, c+h/2] \subset [0,\infty)$ を $\operatorname{supp} a$ を含む最小の閉区間とする．$\mathcal{T}_\mu^\nu$ が $L^2(0,\infty)$ の合同変換であることから，

(11) $$\|\mathcal{T}_\mu^\nu a\|_2 = \|a\|_2 \le h^{-1/2}.$$

なので，(I) を示すには，$\|\,|\cdot - c|\,\mathcal{T}_\mu^\nu a\,\|_2 \le Ch^{1/2}$ を示せば十分である．

$$\|\,|\cdot - c|\,\mathcal{T}_\mu^\nu a\,\|_2^2 = \left\{\int_{(0,\infty)\cap\tilde{Q}} + \int_{(0,\infty)\setminus\tilde{Q}}\right\} |x-c|^2 |\mathcal{T}_\mu^\nu a(x)|^2\,dx$$
$$= V_1 + V_2$$

とする．ここで，$\tilde{Q} = [c-h, c+h]$ とおいた．V_1 に対しては，

$$V_1 = \int_{(0,\infty)\cap\tilde{Q}} |x-c|^2 |\mathcal{T}_\mu^\nu a(x)|^2\,dx \le h^2 \|\mathcal{T}_\mu^\nu a\|_2^2 \le h$$

なので，$V_2 \le Ch$ を示せば (I) の証明が終わる．ここで Schindler の積分表現

$$\mathcal{T}_\mu^\nu a(x) = \lim_{\delta\to+0} \int_{|x-y|>\delta} a(y)\tilde{I}(x,y)\,dy + k(\mu,\nu)a(x) \quad a.e. x > 0,$$

を使う．ただし，簡単のため $\tilde{I}(x,y) = \tilde{I}_{\mu,\nu}(x,y)$ とおいた．$x \in (0,\infty)\setminus\tilde{Q}$ に対しては，$\mathcal{T}_\mu^\nu a(x) = \int_Q a(y)\tilde{I}(x,y)\,dy$ なので，

$$V_2 = \int_{(0,\infty)\setminus\tilde{Q}} |x-c|^2 \left|\int_Q a(y)\tilde{I}(x,y)\,dy\right|^2 dx.$$

を評価すればよい．$\tilde{I}(x,y)$ を変数 y の関数として，点 c においてテーラー展開すれば，アトムの性質（3）より，

$$\int_Q a(y)\tilde{I}(x,y)\,dy = \int_Q a(y)\frac{\partial\tilde{I}}{\partial y}(x, c+\theta(y-c))(y-c)\,dy, \quad 0<\theta<1.$$

が従う．もし，

(12) $$\left|\frac{\partial\tilde{I}}{\partial y}(x,\xi)\right| \le \frac{C}{|x-c|^2}, \quad \xi = c+\theta(y-c),\ 0<\theta<1,\ y\in Q,\ x\in(0,\infty)\setminus\tilde{Q}$$

を示すことが出来るならば,

$$\left|\int_Q a(y)\tilde{I}(x,y)\,dy\right| \le \frac{C}{|x-c|^2}\int_Q |a(y)|\,|y-c|\,dy$$
$$\le \frac{C}{|x-c|^2}\|a\|_2 h^{3/2} \le \frac{C}{|x-c|^2}h$$

となり，求める不等式

$$V_2 \le Ch^2 \int_{(0,\infty)\setminus\tilde{Q}} \frac{dx}{|x-c|^2} \le Ch.$$

を得て (I) が示される．評価 (12) については，超幾何関数の性質を使って証明することが出来ることを注意しておくに留めよう．

最後に，(II) の証明の要点を述べて本稿を終わろう．a を $\operatorname{supp} a \subset [0,\infty)$ であるようなアトムとする．(I) から，$\mathcal{T}_\mu^\nu a$ は可積分である．よって，

$$\int_0^\infty \mathcal{T}_\mu^\nu a(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int_0^\infty e^{-\epsilon x^2}\mathcal{T}_\mu^\nu a(x)\,dx.$$

である．これに，移植作用素の定義を持ち込み，積分順序を交換すると次のように変形される．実際には細かな注意が必要なところではあるが，考え方を述べるため，ここでは，変形のすべてが許されることとし，以下大略のみを述べる．

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathcal{T}_\mu^\nu a(x)\,dx\\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\int_0^\infty e^{-\epsilon x^2}\int_0^\infty\int_0^\infty a(t)\sqrt{yt}J_\nu(yt)\,dt\,\sqrt{xy}J_\mu(xy)\,dy\,dx\\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\int_0^\infty a(t)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\epsilon x^2}\sqrt{xy}J_\mu(xy)\,dx\,\sqrt{yt}J_\nu(yt)\,dy\,dt.
\end{aligned}$$

すると，x に関する積分が Kummar の合流型超幾何関数

$$\Phi(\alpha;\gamma;z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha)_k z^k}{(\gamma)_k k!},\ z,\alpha,\gamma\in\mathbb{C},\ \gamma\ne 0,-1,-2,\dots$$

で書けていることが知られている：

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\epsilon x^2}\sqrt{xy}J_\mu(xy)\,dx\\
&\qquad= \frac{y^{\mu+1/2}\Gamma((\mu+3/2)/2)}{2^{\mu+1}\epsilon^{(\mu+3/2)/2}\Gamma(\mu+1)}e^{-y^2/(4\epsilon)}\Phi((\mu+1/2)/2;\mu+1;y^2/(4\epsilon)).
\end{aligned}$$

$\Phi(\alpha;\gamma;z)$ は，z に関して整関数なので

$$\left|\int_0^\infty e^{-\epsilon x^2}\sqrt{xy}J_\mu(xy)\,dx\right| \le C\epsilon^{-1/2},\ 0<y\le 2\sqrt{\epsilon} \tag{13}$$

を満たす．また，漸近展開

$$\Phi(\alpha;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^z z^{\alpha-\gamma}[1+O(|z|^{-1})],\quad \Re z\to\infty,\quad \gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$$

は評価

$$(14)\qquad \int_0^\infty e^{-\epsilon x^2}\sqrt{xy}J_\mu(xy)\,dx=C_\mu y^{-1}+R_\epsilon(y),\quad |R_\epsilon(y)|\le C\epsilon y^{-3},\quad 2\sqrt{\epsilon}\le y$$

を与える．ここで，C_μ は μ のみで定まっている定数．これらの評価を積分

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \mathcal{T}_\mu^\nu a(x)\,dx\\ &=\lim_{\epsilon\to+0}\int_0^\infty a(t)\left\{\int_0^{2\sqrt{\epsilon}}+\int_{2\sqrt{\epsilon}}^\infty\right\}\left(\int_0^\infty e^{-\epsilon x^2}\sqrt{xy}J_\mu(xy)\,dx\right)\sqrt{yt}J_\nu(yt)\,dy\,dt.\end{aligned}$$

に適用する．実際，(13) を積分 $\int_0^{2\sqrt{\epsilon}}$ に，(14) を積分 $\int_{2\sqrt{\epsilon}}^\infty$ に適用することによって，

$$\int_0^\infty \mathcal{T}_\mu^\nu a(x)\,dx=C_\mu\int_0^\infty a(t)\int_0^\infty\frac{\sqrt{yt}J_\nu(yt)}{y}\,dy\,dt$$

を示すことが出来る．そして，

$$\int_0^\infty\frac{\sqrt{yt}J_\nu(yt)}{y}\,dy=\int_0^\infty J_\nu(u)u^{-1/2}\,du=\frac{\Gamma(\nu/2+1/4)}{\sqrt{2}\Gamma(\nu/2+3/4)}$$

なので，アトムの性質（3）より，

$$\int_0^\infty \mathcal{T}_\mu^\nu a(x)\,dx=0$$

を得る．要点のみではあったが，これで (II) が示された．

最後に，本文で引用した文献とそれ以外にも関連したものを挙げておきたい．[3]–[21] が移植定理に関係したもので，[22] 以下が移転定理に関する文献である．

References

[1] M. Riesz, Sur les fonctions conjuguée, Math. Z. **27** (1928), 218–244.

[2] Y. Kanjin, On Hardy-type inequalities and Hankel transforms, Monatsh. Math. **127**(1999), 311-319.

[3] R. Askey, Norm inequalities for some orthogonal series, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 808–823.

[4] R. Askey, A transplantation theorem for Jacobi coefficients, Pacific J. Math. **21** (1967), 393–404.

[5] R. Askey, A transplantation theorem for Jacobi series, Illinois J. Math. **13** (1969), 583–590.

[6] R. Askey and S. Wainger, A transplantation theorem for ultraspherical coefficients, Pacific J. Math. **16** (1966), 393–405.

[7] R. Askey and S. Wainger, A transplantation theorem between ultraspherical series, Illinois J. Math. **10** (1966), 322–344.

[8] J. E. Gilbert, Maximal theorems for some orthogonal series I, Trans. Amer. Math. Soc. **145** (1969), 495–515.

[9] J. E. Gilbert, Maximal theorems for some orthogonal series II, J. Math. Anal. Appl. **31**(1970), 349-368.

[10] J. J. Guadalupe and V. I. Kolyada, A transplantation theorem for ultraspherical polynomials at critical index, Studia Math. **141**(2001), 51-72.

[11] D. L. Guy, Hankel multiplier transforms and weighted p-norms, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 137–189.

[12] Y. Kanjin, A transplantation theorem for Laguerre series, Tôhoku Math. J. **43** (1991), 537–555.

[13] Y. Kanjin and E. Sato, The Hardy-Littlewood theorem on fractional integration for Laguerre series, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 2165–2171.

[14] Y. Kanjin, A transplantation theorem for the Hankel transform on the Hardy space, to appear in Tohoku Math. J.

[15] A. Miyachi, A transplantation theorem for Jacobi series in weighted Hardy spaces, to appear in Adv. in Math.

[16] A. Miyachi, A transplantation theorem for Jacobi series in weighted Hardy spaces, II, preprint.

[17] B. Muckenhoupt, Transplantation theorems and multipliers for Jacobi series, Memoirs Amer. Math. Soc. No.356, 1986.

[18] S. Schindler, Some transplantation theorems for the generalized Mehler transform and related asymptotic expansions, Trans. Amer. Math. Soc. **155**(1971), 257-291.

[19] S. Schindler, Explicit integral transform proofs of some transplantation theorems for the Hankel transform, SIAM J. Math. Anal. 4 (1973), 367–384.

[20] K. Stempak and W. Trebels, On weighted transplantation and multipliers for Laguerre expansions, Math. Ann. **300** (1994), 203–219.

[21] S. Thangavelu, A note on a transplantation theorem of Kanjin and multiple Laguerre expansions, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 1135–1143.

[22] N. Asmar, E. Berkson and J. Bourgain, Restrictions from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{T}^n$ of weak $(1,1)$ multipliers, Studia Math. **108**(1994), 291-299.

[23] J. J. Betancor and K. Stempak, Relating multipliers and transplantation for Fourier-Bessel expansions and Hankel transform, Tôhoku Math. J.**53**(2001), 109-129.

[24] W. C. Connett and A. L. Schwartz, Weak type multipliers for Hankel transforms, Pacific J. Math. **63**(1976),125-129.

[25] K. de Leeuw, On L^p multipliers, Ann. of Math. (2)**81**(1965),364-379.

[26] A. H. Dooley and G. I. Gaudry, An extension of de Leeuw's theorem to the N-dimensional rotation group, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **34**(1984), 111-135.

[27] D. Fan and S. Sato, Transference on certain multiliner multiplier operators, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) **70**(2001), 37-55.

[28] D. Fan and Z. Wu, Transference of maximal multipliers on Hardy spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **123**(1995), 3169-3174.

[29] S. Igari, Lectures on Fourier series of several variables, Lecture Note, Univ. of Wisconsin, 1968.

[30] S. Igari, On the multipliers of Hankel transform,Tôhoku Math. J. **24**(1972), 201-206.

[31] M. Kaneko, Boundedness of some operators composed of Fourier multipliers, Tôhoku Math. J.**35**(1983), 268-288.

[32] Y. Kanjin, Convergence and divergence almost everywhere of spherical means for radial functions, Proc. Amer. Math. Soc. **103**(1988), 1063-1069.

[33] C. Kenig and P. A. Tomas, Maximal operators defined by Fourier multipliers, Studia Math. **68**(1980), 79-83.

[34] E. Sato, Lorentz multipliers for Hankel transforms, to appear in Math. Japon.

[35] K. Stempak, On connections between Hankel, Laguerre and Heisenberg multipliers, J. London Math. Soc. **51**(1995), 286-289.

[36] K. Stempak, Transplanting maximal inequalities between Laguerre and Hankel multipliers, Monatsh. Math. **122**(1996), 187-197.

[37] J. Tateoka, On Hardy-Bessel potential spaces over the 2-series field, Math. Nachr. **168**(1994), 279-298.

[38] J. Tateoka and W. R. Wade, On the strong approximation and summability by Cesàro means on the Besov spaces over the 2-series field, Acta Sci. Math. (Szeged) **60**(1995), 685-703.

[39] K. Woźniakowski, A new proof of the restriction theorem for weak type $(1,1)$ multipliers on $\mathbb{R}^n$, Illinois. J. Math. **40**(1996), 479-483.