

## 曲線の特異解消のプロセスにおける 第一段階について

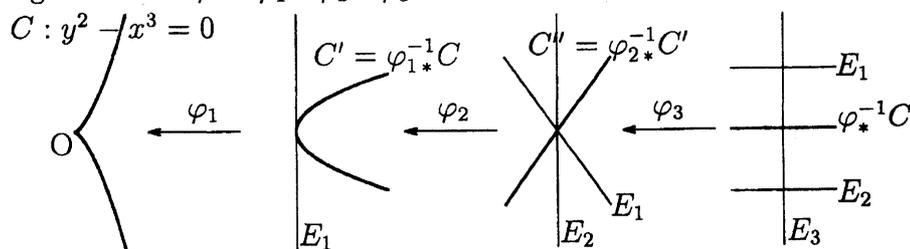
東京電機大学・工 桑田孝泰 (Takayasu Kuwata)  
Faculty of Engineering,  
Tokyo Denki University

### 1 Introduction

超曲面の特異点がどの程度の特異性をもつかを測る量に Log Canonical Threshold がある. log canonical という性質の良い特異点を表す言葉があり, log canonical でないものも含めて分類するために, 何倍に薄めると log canonical になるか, そのぎりぎりの値を Log Canonical Threshold (L.C.T.) とよんでいる. この値はいくつかの同値な定義があり, いろんな分野とのつながりをもってる (cf.[2]).

L.C.T. についてももう少し丁寧に述べよう.  $X$  が正規代数多様体  $/\mathbb{C}$  で,  $D = \sum d_i D_i$  ( $D_i$  は相異なる素因子) が  $X$  上の有効因子で  $K_X + D$  が  $\mathbb{Q}$ -Cartier であるとき,  $(X, D)$  に対して, log resolution  $\varphi : Y \rightarrow X$  が存在し,  $K_Y \equiv \varphi^*(K_X + D) + \sum (-d_i)\varphi_*^{-1}D_i + \sum e_j E_j$  と表せる. ここで, 任意の  $i, j$  に対して  $-d_i \geq -1$  かつ  $e_j \geq -1$  であるとき,  $(X, D)$  は log canonical であるという. この定義は log resolution の選び方に依らないことが知られている. そこで,  $\inf\{c \mid (X, cD) \text{ は logcanonical}\}$  を  $(X, D)$  の Log Canonical Threshold (L.C.T.) とよび,  $lct(X, D)$  もしくは  $X$  がわかっているときは  $lct(D)$  とかく.

例 1  $C : f(x, y) := y^2 - x^3 = 0$  は  $\mathbb{A}^2$  上の因子  $C = \text{div}(f)$  とみなせる.  $C$  の特異点  $(0, 0)$  における  $\mathbb{A}^2$  の blow up から始めて計 3 回 blow up を行うと log resolution  $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 : Y \rightarrow \mathbb{A}^2$  が得られる (下図).



このとき,  $\begin{cases} K_Y = \varphi^*K_{\mathbb{A}^2} + E_1 + 2E_2 + 4E_3 \\ \varphi^*C = \varphi_*^{-1}C + 2E_1 + 3E_2 + 6E_3 \end{cases}$  と表せて, 第2式  
の両辺を  $c$  倍し辺々をひくと

$$K_Y \equiv \varphi^*(K_{\mathbb{A}^2} + cC) - c\varphi_*^{-1}C + (1 - 2c)E_1 + (2 - 3c)E_2 + (4 - 6c)E_3$$

したがって,

$$(X, cD) \text{ は lc} \iff -c, 1 - 2c, 2 - 3c, 4 - 6c \text{ のすべてが } \geq -1 \text{ 以上}$$

$$\iff c \leq \frac{5}{6}$$

すなわち,  $lct(C) = \frac{5}{6}$

一般に, 次が成り立つ.

**命題 2**  $\mathbb{A}^n$  の超曲面  $D : f(x_1, \dots, x_n) = 0$  に対して,  $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{A}^n$  が

$(\mathbb{A}^n, D = \sum_{i=1}^l d_i D_i)$  の log resolution で,

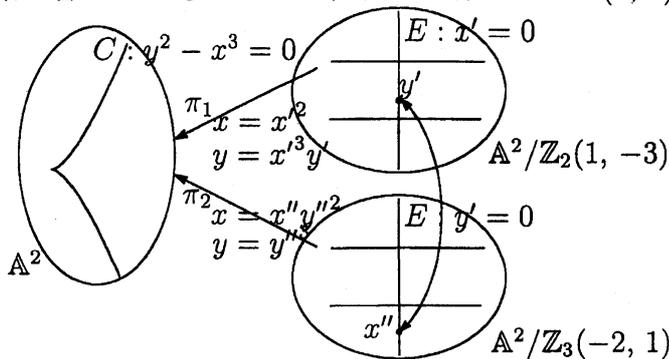
$$K_Y = \varphi^*K_{\mathbb{A}^n} + \sum_{j=1}^m a_j E_j, \quad \varphi^*D = \sum_{i=1}^l d_i \varphi_*^{-1}D_i + \sum_{j=1}^m b_j E_j$$

と表せるとき

$$lct(D) = \min\left\{\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_l}, \frac{a_1 + 1}{b_1}, \dots, \frac{a_m + 1}{b_m}\right\}.$$

(注) この命題より, 超曲面  $D \subset \mathbb{A}^n$  に対して,  $lct(D) \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$  がわかる. もちろん,  $(X, D) \text{ は lc} \iff lct(D) = 1$  である.

L.C.T. を求める上で強力な手段の1つに重み付き blow-up がある. たとえば例1において, 重み  $w = (2, 3)$  付きの  $\mathbb{A}^2$  の  $(0, 0)$  を中心とする blow-up を  $\pi : Y = B_{(2,3)}\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  とする. ここで,  $\mathbb{A}^2/\mathbb{Z}_2(1, -3), \mathbb{A}^2/\mathbb{Z}_3(-2, 1)$  を貼り合わせたものが  $Y$  で, 例外曲線は  $E = \mathbb{P}(2, 3)$  である. 実際,



$(x' = 0)$  上の点  $y'$  と  $(y'' = 0)$  上の点  $x''$  は  $y' = (1 : y') = (x'^2 : x'^3 y') = (x, y) = (x'' y''^2 : y''^3) = (x'' : 1) = x''$  である.  $\mathbb{A}^2/\mathbb{Z}_2(1, -3), \mathbb{A}^2/\mathbb{Z}_3(-2, 1)$

は,  $(x', y') \rightarrow (\epsilon x', \epsilon^{-3} y')$ ,  $(x', y') \rightarrow (\zeta^{-2} x'', \zeta y'')$  ( $\epsilon, \zeta$ は, 1の原始2, 3乗根)で移りあう点どうしは同一視してできる  $\mathbb{A}^2$ の商空間である. したがって,  $\pi$ は双有理正則写像にはなるが  $Y$ は非特異ではないから, log resolutionにはならない. しかし,  $K_Y = \pi^* K_{\mathbb{A}^2} + 4E$ ,  $\pi^* D = \pi_*^{-1} C + 6E$ から, 不等式  $lct(C) \leq \frac{5}{6}$ はいえる. 等号の成立に関しては [3]6.38に詳しい.

## 2 既約曲線の特異点の Puiseux 対

平面曲線  $C \subset \mathbb{A}^2$ の log resolution および 命題 2 での係数  $a_j, b_j$  はどのようにして得られるのだろうか. 解析的に既約な成分に対しては Puiseux 対を利用するという強力な手段がある.

今  $C: f(x, y) = 0$  は  $P = (0, 0)$  で特異点をもつ既約な解析曲線とする.

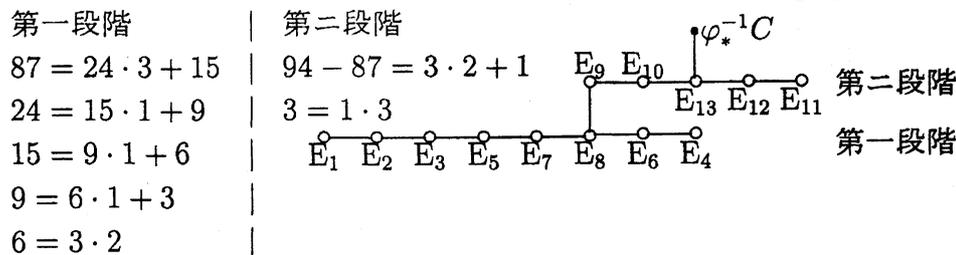
このとき,  $C$  は  $P$  の付近で局所パラメタを用いて 
$$\begin{cases} x = t^m \\ y = \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i t^i \end{cases}$$

と表される. ただし,  $m = \text{mult}_P(C)$ ,  $\alpha_n \neq 0$ ,  $m < n$ ,  $m \nmid n$  である. ここで, 次の条件を満たす指数  $(m; n_1, \dots, n_g)$  を  $(C, P)$  の Puiseux 対といい,  $Ch(C)$  もしくは  $Ch(f)$  とかく.

- (i)  $n_1 = n, \text{gcd}(m, n_1, \dots, n_g) = 1$
  - (ii)  $n_1, \dots, n_{j-1}$  が  $\text{gcd}(m, n_1, \dots, n_{j-1}) > 1$  をみたすとき,  $n_j$  は  $n_j = \min\{i | \alpha_i \neq 0, \text{gcd}(m, n_1, \dots, n_{j-1}) > \text{gcd}(m, n_1, \dots, n_{j-1}, i)\}$
- 特に,  $(m; n_1)$  を第一 Puiseux 対とよぶ.

例 3  $C: \begin{cases} x = t^{24} \\ y = t^{87} + t^{93} + t^{94} + t^{101} \end{cases}$  について,

$\text{gcd}(24, 87) = 3 = \text{gcd}(24, 87, 93) > \text{gcd}(24, 87, 94) = 1$  より,  $Ch(C) = (24; 87, 94)$  である. 次のようなユークリッドのアルゴリズムにより最短特異点解消の様子が見える. 図はその最短特異点解消の dual graph である.



黒丸は  $C$  の strict transform, 白丸の  $E_i$  は  $i$  回目の blow-up により得られた

例外曲線, 丸を結ぶ線分は両端の丸が表す曲線が1点で交わることをそれぞれ意味する. この例では8回目までの blow-up のプロセス  $\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_8$  を特異点解消の第一段階とよばれている.

### 3 平面曲線の特異点の log canonical threshold

上の例のように既約解析曲線  $C$  において,  $Ch(C)$  が  $(\mathbb{A}^2, C)$  の最短特異点解消を決める. したがって,  $Ch(C)$  がわかれば  $lct(C)$  が決まる. 実はもっと強いことがいえる. 井草準一氏は, [1] で  $(m; n)$  を第一 Puiseux 対にもつ既約解析曲線の L.C.T. が  $lct(C) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$  であることを示した. たとえば, 例1, 例3において  $lct(C)$  は,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ,  $\frac{1}{24} + \frac{1}{87} = \frac{37}{696}$  である. この結果から既約解析曲線の L.C.T. が第一 Puiseux 対にのみ依存することがわかる. では, 解析的に可約な場合は L.C.T. がいったい何に依存するのだろうか. その間に答えるのが次の定理である.

**定理 4** ([4])  $C_j = (f_j = 0)$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) を曲線  $C = (f := \prod_{j=1}^r f_j^{\alpha_j} = 0)$  の既約成分,  $(m_j, n_j)$  を  $C_j$  の第一 Puiseux 対,  $I_{ij} = I_P(C_i, C_j)$  を  $C_i, C_j$  の  $P = (0, 0)$  における交点数とする.

このとき,  $lct(C)$  は  $(m_j, n_j), I_{ij}$ , および  $\alpha_j$  にのみ依存する.

この定理は, 解析的に可約な曲線に対しても特異点解消のプロセスの第一段階とよばれるものを定義し,  $lct(C)$  がそのプロセスの第一段階によって決まることを証明することにより得られる.

実は, 平面曲線の L.C.T. のとり得る値の集合が  $\mathcal{T}_2 = \left\{ \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{k}{m} + \frac{l}{n}} \mid m, n \in \mathbb{N}, k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, -m \leq k - l \leq n \right\}$  となることは既にわかっている (cf. [4]).  $\mathcal{T}_2$  がわかっているからといって, ここにでてきている  $m, n, k, l$  が曲線の特異点のどのような情報からくるかは今の所わかっていない. が,  $f := x^k y^l (x^m + y^n) = 0$  の L.C.T. が  $lct(f) = \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{k}{m} + \frac{l}{n}}$  ( $-m \leq k - l \leq n$  のとき) であることやその他いくつかの例を考えると, 例外的な場合を除くと, 曲線  $C = (\prod_{j=1}^r f_j^{\alpha_j} = 0)$  の既約成分の中に1つ根幹となるものがあり, その第一 Puiseux 対が  $m, n$  に, それ以外の既約成分と根幹成分との交わり方が  $k, l$  の部分に反映されて,  $lct(C)$  が定まっていると予想している. 実際, 2つの成分からなる場合は,  $C = (f_1 f_2 = 0)$  で  $(f_1 = 0), (f_2 = 0)$  の第一 Puiseux 対が  $(m; n), (m'; n')$ ,  $P$  での交点数を  $I$  とすると,  $m^2, m'^2, I$  の大小を比較することにより上記で根幹成分がわかる.

## 参考文献

- [1] J. IGUSA, *On the first terms of certain asymptotic expansions*, Complex and algebraic geometry, Iwanami Shoten (1977), 357–368.
- [2] J. KOLLÁR, *Singularities of Pairs*, Proceeding of Symposia in Pure Math. **62**, AMS. (1997), 221–287.
- [3] J. KOLLÁR, *Rational and Nearly Rational Varieties*, Cambridge University Press (2004).
- [4] T. KUWATA, *On log canonical thresholds of reducible plane curves*, Amer.J.Math. (1999), 701–721.
- [5] V. SHOKUROV, *3-fold log flips*, Izv.Russ.A.N.Ser.Mat. **56** (1992), 105–203.