

Existence of a non-trivial periodic weak solution to an asymptotically linear wave equation

東京理科大学理学研究科 田中 視英子
Graduate School of Mathematics, DC3
Faculty of Science
Tokyo University of Science

1 序

本稿では、次の空間 1 次元の非線形波動方程式 (WE) の非自明な周期解 (弱解) の存在について報告する:

$$(WE) \quad \begin{cases} \square u(x, t) = h(x, t, u(x, t)), & (0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & (t \in \mathbb{R}), \\ u(x, t + 2\pi) = u(x, t), & (0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

ここでは、次の意味で非線形項 $h(x, t, \xi)$ が ξ に関して、原点と無限遠方で asymptotically linear な場合:

$$g_0(x, t, \xi) := h(x, t, \xi) - b_0 \xi = o(|\xi|) \quad (\xi \rightarrow 0) \text{ uniformly in } (x, t)$$

$$g_\infty(x, t, \xi) := h(x, t, \xi) - b \xi = o(|\xi|) \quad (|\xi| \rightarrow \infty) \text{ uniformly in } (x, t)$$

を考える。このとき方程式 (WE) は自明解 $u = 0$ を持つが、非自明解の存在は non-resonant case ($b_0 \notin \sigma(\square)$) の場合には、過去に変分法によって、ほとんど $h(x, t, \xi)$ の ξ に関する単調性という条件だけで示されている (cf. [1], [2], [3]). 一方, resonant case ($b_0 \in \sigma(\square)$) の場合には $b_0 \in \sigma(\square)$ の固有空間の存在によって (WE) に対応する汎関数の挙動が複雑になり, non-resonant な場合に比べて弱い結果しか得られていない。実際, resonant case では上の g が有界という条件の下で非自明解の存在が示されているのみである (cf. [1], [2], [3]). 本稿では, resonant case において g が非有界であっても例えば, $g(x, t, \xi) = \xi^\alpha \text{sgn} \xi$ ($0 < \alpha < 1, |\xi|$ 十分大) であるような場合にも非自明解が存在することを示す。

また, 方程式 (WE) に対応する汎関数の Palais-Smale 条件について, [2] では非線形項 $h(x, t, \xi)$ が ξ に関して strong monotonicity を満たす場合に, 任意の有界な $(PS)_c^*$ 列が強収束部分列を持つことが示されている。ところが我々が考察したい asymptotically linear な場合では, $b_0 = 0$ のとき $h(x, t, \xi)$ は strongly monotonic とはならないので [2] の結果は適用出来ない。しかし, $(PS)_c^*$ 列の収束条件の代わりに Bartsch and Ding [1] により導入された $(WPS)_c^*$ 条件を考えることにより, $b_0 = 0$ の場合も同時に解の存在を示すことが出来る ($(PS)_c^*$ 列と $(WPS)_c^*$ 条件の定義は次ページを参照)。本稿にお

ける証明の方針は, [1] による local linking と (WPS)* 条件を用いた方法を改良することによってなされる. ここで, 証明は gradient flow によって不変な領域をうまく構成することがポイントとなる.

本稿では, 第2節において local linking と有限次元部分空間列を用いる, 臨界点の存在に関する新しい結果を報告する. また, 汎関数が偶関数である場合に, Krasnoselskii genus を用いた (WPS)*_c 条件の場合の臨界点の存在を示す. 第3節では第2節の結果を用いて, (WE) の非自明な弱解の存在についての結果を報告する.

2 臨界点の存在に関する abstract theory

この節を通して, E は Hilbert 空間とし, Φ は E 上で定義される C^1 級汎関数とする. さらに, E の有限次元部分空間の列 E_n として次を満たすものを考える.

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots \subset E, \quad E = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}.$$

また, P_n を E から E_n への直交射影とする.

次に本稿の結果のキーとなる, Bartsch and Ding [1] により導入された (WPS)* 条件について述べる.

定義 2.1. ((WPS)*_c 条件)

- (1) $u_j \in E_{n_j}$ で, $n_j \rightarrow \infty$, $\Phi(u_j) \rightarrow c$, $P_{n_j}(\nabla\Phi(u_j)) \rightarrow 0$ (as $j \rightarrow \infty$) を満たすとき, $\{u_j\}_j$ を (PS)*_c 列であるという.
- (2) 任意の (PS)*_c 列が, $\Phi(u) = c$ を満たすような Φ の臨界点 $u \in E$ に弱収束する部分列を持つとき, Φ は (WPS)*_c 条件を満たすという.

2.1 local linking 条件と臨界点の存在

過去にいろいろと local linking と minimax theorem を使って臨界点の存在が示されているが, ここで local linking の定義を述べておく.

定義 2.2. (local linking)

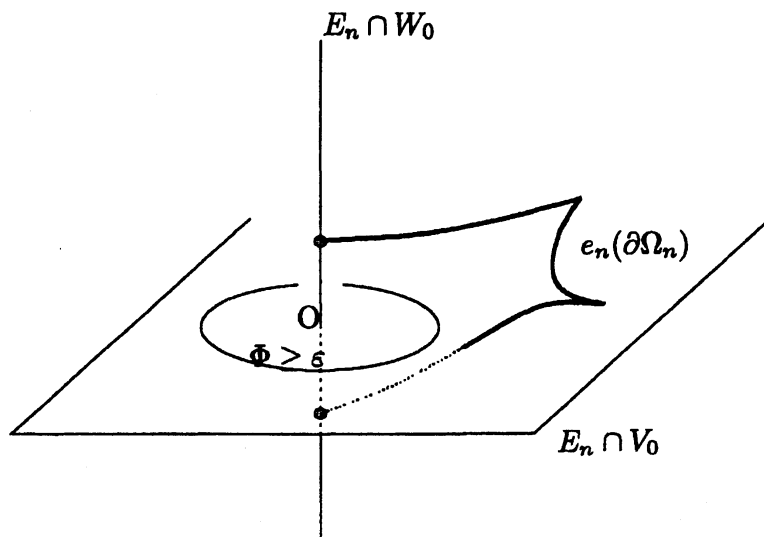
- (1) $E = V_0 \oplus W_0$ と直交直和分解され, ある $r > 0$ が存在して以下を満たすとき, Φ は (V_0, W_0) に関して原点で local linking を持つという.

$$\begin{cases} \Phi(u) \geq 0 & (\forall u \in B_r V_0), \\ \Phi(u) \leq 0 & (\forall u \in B_r W_0). \end{cases} \quad (1)$$

ここで, $B_r V_0 := \{u \in V_0 : \|u\| \leq r\}$, $B_r W_0 := \{u \in W_0 : \|u\| \leq r\}$ である.

- (2) Φ が (V_0, W_0) に関して原点で local linking を持ち, さらに, (1) を満たす $r > 0$ と, ある $\varepsilon > 0$ が存在して次を満たすとき, Φ は (V_0, W_0) に関して原点で strong local linking を持つという.

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \varepsilon && \text{on } \partial B_r V_0, \\ \Phi(u) &\leq -\varepsilon && \text{on } \partial B_r W_0. \end{aligned} \quad (2)$$



本小節では粗く言って, $(WPS)_c^*$ 条件と local linking 条件から臨界点の存在を導く定理を述べるが, 詳しい証明は [4], [6] に任せて, その原型となる結果を説明する. Φ が (V_0, W_0) に関して原点で strong local linking を持つ場合について考える.

$\varepsilon > 0, r > 0$ は (2) を満たすものとし, $\Omega_n := [0, 1] \times (B_r W_0 \cap E_n)$ とする. 仮に各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $e_n \in C(\partial\Omega_n, E_n)$ で $e_n(0, \cdot) = id$, $\Phi_n \circ e_n(t, \cdot) < 0$ for $t > 0$ を満たす写像が構成できたとする (図参照). ここで, $\Phi_n := \Phi|_{E_n}$ である. また各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\Gamma_n := \{\gamma \in C(\Omega_n, E_n) \mid \gamma|_{\partial\Omega_n} = e_n\},$$

$$c_n := \inf_{\gamma \in \Gamma_n} \max_{u \in \Omega_n} \Phi_n(\gamma(u))$$

と定義する. 各 E_n が有限次元であることに注意すると degree を用いた議論により

$$B_r(V_0 \cap E_n) \cap \gamma(\Omega_n) \neq \emptyset \quad \text{for every } \gamma \in \Gamma_n$$

を示すことができ, $c_n \geq \varepsilon > 0 = \max_{u \in \Omega_n} \Phi(u)$ を得ることができる. このとき, minimax method より $c_n + 1/n \geq \Phi_n(v_n) \geq c_n - 1/n$, $\|\nabla \Phi_n(v_n)\| \leq 1/n$ を満たす $v_n \in E_n$ の存在がわかる.

さらに n に依存しない $R > r$ が存在して $\sup_{(t,u) \in \partial\Omega_n} \|e_n(t,u)\| \leq R$ for all n を満たせば, $\varepsilon \leq c_n \leq M := \sup\{\Phi(u) \mid \|u\| \leq R\}$ を得ることができる. このとき, $\{v_n\}$ のある部分列はある $c \in [\varepsilon, M]$ に対して $(PS)_c^*$ 列となり, Φ が $(WPS)_c^*$ 条件を満たしていれば Φ の非自明な臨界点が存在することになる.

以上から証明のポイントはこのような条件を満たす e_n の構成をすることとなる.

次に, abstract theory を紹介するために必要となる条件を述べることにする.

条件

- ($\Phi 1$) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して, Φ は $(WPS)_c^*$ 条件を満たす.
 ($\Phi 2$) Φ は任意の有界集合上で有界.
 ($\Phi 3$) ある直交直和分解 $E = V_0 \oplus W_0$ が存在して, Φ は次のうち1つを満たす.
 (1) Φ は (V_0, W_0) に関して原点で strong local linking を持つ.
 (2) Φ は (V_0, W_0) に関して原点で local linking を持ち, ある $r > 0$ に対して $B_{2r}E$ 中の任意の $(PS)_0^*$ 列は強収束部分列を持つ.
 ($\Phi 4$) $E = V_\infty \oplus W_\infty$ と直交直和分解され, 次の仮定 (i) ~ (iii) を満たす $\lambda \geq 0$, $\delta > 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ が存在する: ただし, $u = w_\infty + v_\infty$ ($w_\infty \in W_\infty, v_\infty \in V_\infty$) とする.

$$(i) \left\langle \nabla \Phi(u), v_\infty - \lambda \delta^2 \frac{w_\infty}{\|w_\infty\|^{2-2\lambda}} \right\rangle > 0 \quad (\text{if } \|v_\infty\| = \delta \|w_\infty\|^\lambda, \|v_\infty\| \geq R_1),$$

$$(ii) \langle \nabla \Phi(u), v_\infty \rangle > 0 \quad (\text{if } \|v_\infty\| \geq \delta \|w_\infty\|^\lambda, \|v_\infty\| \geq R_1),$$

$$(iii) \Phi(u) < 0 \quad (\text{if } \|v_\infty\| \leq \delta \|w_\infty\|^\lambda, \|w_\infty\| \geq R_2).$$

注意 2.3. 仮定 ($\Phi 4$) は非常に複雑であるが, (WE) に対応する汎関数 Φ について, 上に説明した写像 e_n の存在を示すために用いられるものである. また, ($\Phi 4$) は次のようにある領域が Φ の pseudo gradient vector field の生成する flow に関して不変であることを意味している. ($\Phi 4$) の仮定のもとで, $R \geq R_1$ に対して

$$U_1^R := \{(v_\infty, w_\infty) \in V_\infty \oplus W_\infty \mid \|v_\infty\| < \max\{\delta \|w_\infty\|^\lambda, R\}\},$$

$$U_2^R := \{(v_\infty, w_\infty) \in V_\infty \oplus W_\infty \mid \|v_\infty\| > \max\{\delta \|w_\infty\|^\lambda, R\}\},$$

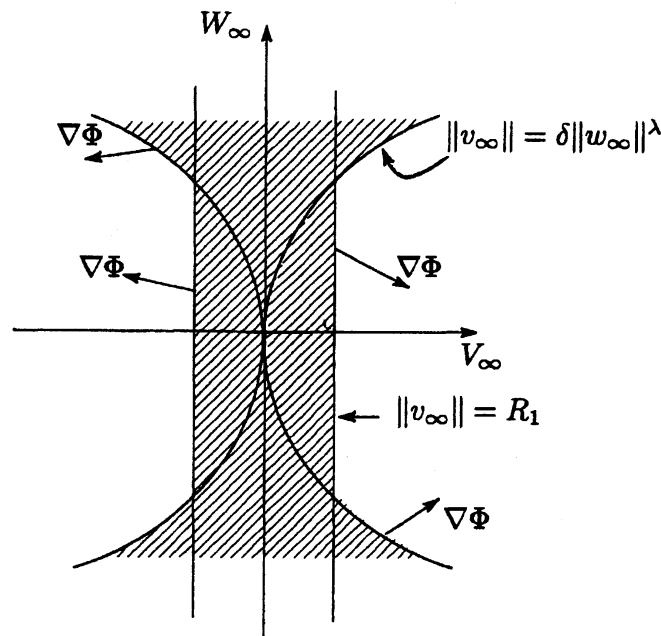
と定義する. また, Φ の代わりに ($\Phi 4$) の (i) と (ii) を満たすような局所リプシッツ連続な pseudo gradient vector field V を構成することができる. (構成の仕方は [4] を参照, pseudo gradient vector field の定義については [5] を

参照.) この V に対して以下のコーシー問題の maximal solution を $\eta(t, u)$ と書くことにする.

$$\begin{cases} \frac{d\eta(t, u)}{dt} = -V(\eta(t, u))/\|V(\eta(t, u))\|, \\ \eta(0, u) = u \in \tilde{E} := \{u \in E : \nabla\Phi(u) \neq 0\}. \end{cases}$$

また, 上のコーシー問題で $-V$ の代わりに V としたときの maximal solution を $\xi(t, u)$ と書くことにする.

このとき, U_1^R は任意の $u \in U_1^R \cap \tilde{E}$ に対して $\eta(t, u) \in U_1^R$ (for all $t \geq 0$) が成り立つ. また U_2^R については, 任意の $u \in U_2^R \cap \tilde{E}$ に対して $\xi(t, u) \in U_2^R$ (for all $t \geq 0$) が成り立つ. つまり U_1^R は V の生成する flow に関して negatively invariant であり, U_2^R は V の生成する flow に関して positively invariant である. ここで, $U_1^{R_1}$ は下図における斜線部である.



定理 2.4. ([4], [6]) Φ は $(\Phi 1) \sim (\Phi 4)$ を満たし, さらに,

$$E_n = (E_n \cap V_0) \oplus (E_n \cap W_0) = (E_n \cap V_\infty) \oplus (E_n \cap W_\infty) \quad (n \in \mathbb{N})$$

かつ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\dim E_n \cap V_\infty - \dim E_n \cap V_0| > 0. \quad (3)$$

を満たすとする. このとき Φ は非自明な臨界点を持つ.

注意 2.5. 定理 2.4 における仮定のもとで, 次元条件 (3) は次のうちどちらか一つが成り立つことと置き換えることができる.

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ \dim(W_\infty \cap E_n) - \dim(W_0 \cap E_n) \} &> 0, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \{ \dim(V_\infty \cap E_n) - \dim(V_0 \cap E_n) \} &> 0 \end{aligned}$$

2.2 汎関数が偶関数のときの臨界点の存在に関する abstract theory

次に, Φ が even であるときの定理を紹介する. この結果は Krasnoselskii genus を用いて $(WPS)_c^*$ の場合にも一般の (PS) 条件と同様の結果が得られることを示している.

条件

($\Phi 0$) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, Φ_n は任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して (PS) 条件を満たす. ただし, $\Phi_n := \Phi|_{E_n}$ である.

定理 2.6. ([6]) $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ は even で, ($\Phi 0$), ($\Phi 1$), ($\Phi 3$) を満たすとする. さらに, ある部分空間 V_∞ が存在して $-M := \inf_{V_\infty} \Phi > -\infty$ かつ, 次元条件

$$k := \limsup_{n \rightarrow \infty} [\dim E_n \cap W_0 - \dim E_n \cap W_\infty] > 0$$

を満たすとする. ただし, $W_\infty := V_\infty^\perp$ である. また,

$$E_n = (E_n \cap V_0) \oplus (E_n \cap W_0) = (E_n \cap V_\infty) \oplus (E_n \cap W_\infty) \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たすとする. このとき, Φ は少なくとも k 個の非自明な臨界点のペアを $\Phi^{-1}((\infty, 0])$ に持つ.

定理 2.6 の略証 Φ が ($\Phi 3$) の (1) を満たす場合について略証を述べる. Φ が $\Phi^{-1}((\infty, 0])$ に有限個の臨界点しか持たないと仮定してよい. また仮定から $\dim(E_{n_j} \cap W_0) = k + \dim(E_{n_j} \cap W_\infty)$ をみたす狭義単調増加な列 $\{n_j\}_j \subset \mathbb{N}$ がとれる. このとき $1 \leq l \leq k$, $j \in \mathbb{N}$ に対して, 以下を定義する.

$$\Sigma_j^l := \{ A \subset E_{n_j}; \text{compact}, A = -A, \infty > i(A) \geq \dim(E_{n_j} \cap W_\infty) + l \},$$

$$c_j^l := \inf_{A \in \Sigma_j^l} \max_{u \in A} \Phi(u).$$

ここで, $i(A)$ は $A \in \Sigma := \{ A \subset E; A \text{ is closed}, A = -A \}$ に対して定義される Krasnoselskii genus である (定義については [5] を参照). このとき, $-M \leq c_j^1 \leq \dots \leq c_j^k \leq -\varepsilon$ が示せる. ここで, $\varepsilon > 0$ は仮定 ($\Phi 3$) の (1) か

ら得られるものである。また、仮定 $(\Phi 0)$ からよく知られた議論により、各 c_j^l ($1 \leq l \leq k$) は Φ_{n_j} の臨界値であることがわかる。さらに、部分列を考えることにより $c_j^l \rightarrow c^l$, $c^l \in [-M, -\varepsilon]$ ($1 \leq l \leq k$) と仮定してよいので、 $(WPS)_c^*$ 条件より、各 c^l は Φ の臨界値であることがわかる。

一方、今 Φ は $\Phi^{-1}((\infty, 0])$ に有限個の臨界点しか持たないと仮定していることと $(WPS)_c^*$ 条件から、実は

$$c^l \neq c^{l'} \quad (l \neq l')$$

を示すことができる。このことから、 Φ は k 個の異なる負の臨界値を持つことがわかり証明が終わる。

3 波動方程式 (WE) の周期解の存在

次の空間一次元の波動方程式を考える。

$$(WE) \quad \begin{cases} \square u(x, t) = h(x, t, u(x, t)), & (0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & (t \in \mathbb{R}), \\ u(x, t + 2\pi) = u(x, t), & (0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

この節を通して、非線形項 $h: [0, \pi] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対しては以下のような仮定をする;

(h1) h は連続で、 $h(x, t + 2\pi, \xi) = h(x, t, \xi)$ ($(x, t, \xi) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}^2$),

(h2) h は ξ に関して単調増加で、 $h(x, t, \xi) \neq 0$ ($\xi \neq 0$),

(h3) ある $b_0 \geq 0$, $b > 0$ が存在し、次を満たす:

$$g_0(x, t, \xi) := h(x, t, \xi) - b_0 \xi = o(|\xi|) \text{ as } \xi \rightarrow 0 \text{ uniformly in } (x, t),$$

$$g(x, t, \xi) := h(x, t, \xi) - b \xi = o(|\xi|) \text{ as } |\xi| \rightarrow \infty \text{ uniformly in } (x, t).$$

3.1 空間と汎関数の設定

$u \in L^2(Q)$ に対してフーリエ級数展開

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_{kj} \sin jx e^{ikt}$$

with $\overline{u_{kj}} = u_{-kj}$ for all j, k とし、次のようにノルムと空間 E を定義する。

$$\|u\|_E := \sum_{j \neq |k|} |j^2 - k^2| |u_{kj}|^2 + \sum_{j=|k|} |u_{kj}|^2,$$

$$E := \{u \in L^2(Q) \mid \|u\|_E < \infty\}.$$

E は以下の内積によって Hilbert 空間となる。

$$(u, v)_E := \sum_{j \neq |k|} |j^2 - k^2| u_{kj} \overline{v_{kj}} + \sum_{j=|k|} u_{kj} \overline{v_{kj}},$$

ここで u_{kj}, v_{kj} はそれぞれ u, v のフーリエ級数の係数である。さらに E の閉部分空間 E^0, E^\pm を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} E^+ &:= \{u \in E \mid u_{kj} = 0 \text{ for all } (k, j) \text{ with } j > |k|\}, \\ E^- &:= \{u \in E \mid u_{kj} = 0 \text{ for all } (k, j) \text{ with } j < |k|\}, \\ E^0 &:= \{u \in E \mid u_{kj} = 0 \text{ for all } (k, j) \text{ with } j = |k|\}. \end{aligned}$$

さらに P^\pm をそれぞれ E^\pm への直交射影とする。このとき、 E 上の C^1 級汎関数 Φ を

$$\begin{aligned} \Phi(u) &:= \frac{1}{2} \int_Q (u_x^2 - u_t^2) dx dt - \int_Q H(x, t, u) dx dt \\ &= \frac{1}{2} (\|P^+ u\|^2 - \|P^- u\|^2) - \Psi(u), \end{aligned}$$

と定義する。ここで

$$H(x, t, \xi) := \int_0^\xi h(x, t, s) ds, \quad \Psi(u) := \int_Q H(x, t, u) dx dt,$$

であり Ψ は $h(x, t, \xi)$ が ξ に関して単調増加であることから凸であることが分かる。さらに、この Φ の臨界点が (WE) の弱解になっていることがわかる。また、定理 2.4 を適用するために空間 E の有限次元部分空間 E_n を以下のように定義する。

$$E_n := \text{span} \{ \sin jx \sin kt, \sin jx \cos kt \mid 0 < j \leq n, |k| \leq n \}.$$

注意 3.1.

1. Nonresonant case ($b \notin \sigma(\square)$) の場合、任意の $(PS)_c^*$ 列は有界であることが示される。
2. [1] において、 Ψ の凸性と E^\pm から L^2 への埋め込みがコンパクトであることより、 Φ について、任意の $(PS)_c^*$ 列が有界であることが $(WPS)_c^*$ 条件を満たすための十分条件であることが示されている。
3. 非線形項 h が (h2) の代わりに strong monotonicity;

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } (h(x, t, \xi) - h(x, t, \eta)) (\xi - \eta) \geq \varepsilon (\xi - \eta)^2 \text{ for all } x, t, \xi, \eta$$

を満たす場合は Kryszewski and Szulkin [2] において、任意の有界な $(PS)_c^*$ 列は強収束部分列を持つことが示されている。

3.2 非線形項に関する条件と諸結果

次のような条件を考える。

(C1) g は有界で、 $G(x, t, \xi) \rightarrow +\infty$ (as $|\xi| \rightarrow \infty$) uniformly in (x, t) ,

(C2) 次の (a1) か (a2) が成り立つ様な定数 $0 < \alpha \leq \beta < 1$, $\beta - \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$, $c_1, c_2 > 0$, $d_1, d_2 \geq 0$ が存在する:

$$(a1) \quad |g(x, t, \xi)| \leq c_1 |\xi|^\beta + d_1, \quad G(x, t, \xi) \geq c_2 |\xi|^{\alpha+1} - d_2 |\xi|$$

$$(a2) \quad |g(x, t, \xi)| \leq c_1 |\xi|^\beta + d_1, \quad G(x, t, \xi) \leq -c_2 |\xi|^{\alpha+1} + d_2 |\xi|$$

(C3) ある $\delta > 0$ が存在して $G_0(x, t, \xi) \geq 0$ ($|\xi| \leq \delta$) を満たす.

(C4) ある $\delta > 0$ が存在して $G_0(x, t, \xi) \leq 0$ ($|\xi| \leq \delta$) を満たす.

ここで,

$$G(x, t, \xi) := \int_0^\xi g(x, t, s) ds, \quad G_0(x, t, \xi) := \int_0^\xi g_0(x, t, s) ds$$

である.

この条件を用いることにより以下のことが分かる.

注意 3.2.

1. resonant case の場合には, (C1) or (C2) が満たされる場合に, 任意の $(PS)_c^*$ 列は有界であることが示される.

2. local linking に関しては, [1] で以下のように成り立つことが示されている.

補題.[1, lemma 5.4.] $b_0 = 0$ とする. このとき Φ は (V_0, W_0) に対して原点で strong local linking を持つ. ただし, $V_0 := E^+$, $W_0 := E^0 \oplus E^-$ である.

補題.[1, lemma 5.6.] $b_0 > 0$ とする. このとき Φ は以下のそれぞれの場合に次の (V_0, W_0) に対して原点で local linking を持つ:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad V_0 := X_0^+, \quad W_0 := X_0^- \quad (\text{if } b_0 \notin \sigma(\square)) \\ (2) \quad V_0 := X_0^+ \oplus X_0^0, \quad W_0 := X_0^- \quad (\text{if (C4) holds}) \\ (3) \quad V_0 := X_0^+, \quad W_0 := X_0^0 \oplus X_0^- \quad (\text{if (C3) holds}) \end{array} \right.$$

ここで,

$$X_0^+ := \left\{ w \in E : w(x, t) = \sum_{j^2 - k^2 > b_0} u_{kj} \sin jxe^{ikt} \right\},$$

$$X_0^0 := \left\{ w \in E : w(x, t) = \sum_{j^2 - k^2 = b_0} u_{kj} \sin jxe^{ikt} \right\},$$

$$X_0^- := \left\{ w \in E : w(x, t) = \sum_{j^2 - k^2 < b_0} u_{kj} \sin jxe^{ikt} \right\}.$$

である.

3. $b_0 > 0$ の場合は, $\Psi(u) \geq a\|u\|_{L^2}^2$ ($\|u\|_{L^2}$ 十分小) を満たす $a > 0$ の存在がいえるとに注意することにより, 原点が孤立した臨界点であれば, 原点のある近傍に含まれる任意の $(PS)_0^*$ 列は原点に強収束することが示される. すなわち, 上の結果と併せることにより Φ は条件 $(\Phi 3)$ を満たすことがわかる.

次を定義する:

$$X^+ := \left\{ u \in E : u(x, t) = \sum_{j^2 - k^2 > b} u_{kj} \sin jx e^{ikt} \right\},$$

$$X^0 := \left\{ u \in E : u(x, t) = \sum_{j^2 - k^2 = b} u_{kj} \sin jx e^{ikt} \right\},$$

$$X^- := \left\{ u \in E : u(x, t) = \sum_{j^2 - k^2 < b} u_{kj} \sin jx e^{ikt} \right\}.$$

このとき, 以下の条件 $(\Phi 4)$ に関する結果が示される.

補題.[4] 非線形項 h は $(h1) \sim (h3)$ を満たすとし, さらに $(C2)$ を仮定する. このとき, 次の (i), (ii) が成り立つ.

- (i) $(C2)$ で $(a1)$ が成り立つとき, Φ に対して $V_\infty := X^+$, $W_\infty := X^- \oplus X^0$ として $(\Phi 4)$ が成り立つ.
- (ii) $(C2)$ で $(a2)$ が成り立つとき, $-\Phi$ に対して $V_\infty := X^-$, $W_\infty := X^+ \oplus X^0$ として $(\Phi 4)$ が成り立つ.

3.3 解の存在

$b_0 \in \mathbb{R}$ に対して, 次のように定義する:

$$b_0^+ := \max\{\lambda \in \sigma(\square); \lambda < b_0\}, \quad b_0^- := \min\{\lambda \in \sigma(\square); \lambda > b_0\}.$$

第2節の定理 2.4 を本節で上に定義した Φ に適用して次の結果が得られる.

定理 3.3. h は $(h1) \sim (h3)$ を満たすとする. 以下の $(A1) \sim (A4)$ のうち一つが成り立てば (WE) は非自明な弱解を持つ.

- (A1) $b_0 \notin \sigma(\square)$, $b \notin \sigma(\square)$ and $b \notin [b_0^-, b_0^+)$;
- (A2) $b_0 \in \sigma(\square)$, $b \notin \sigma(\square)$ かつ, 次のうちどちらかが成り立つ:
 - (1) $b \notin [b_0, b_0^+)$ and $(C3)$;
 - (2) $b \notin [b_0^-, b_0)$ and $(C4)$;
- (A3) $b_0 \notin \sigma(\square)$, $b \in \sigma(\square)$ かつ, 次のうちどちらかが成り立つ:

- (1) $b \notin [b_0^-, b_0]$ and (C1) or (a1) of (C2);
- (2) $b \notin [b_0, b_0^+]$ and (a2) of (C2);
- (A4) $b_0 \in \sigma(\square)$, $b \in \sigma(\square)$ かつ, 次のうちどれか一つが成り立つ:
 - (1) (C3), $b_0 \neq b$ and (C1) or (a1) of (C2);
 - (2) (C3), $b_0^+ \neq b$ and (a2) of (C2);
 - (3) (C4), $b_0^- \neq b$ and (C1) or (a1) of (C2);
 - (4) (C4), $b_0 \neq b$ and (a2) of (C2);

定理 3.3 の結果は, (A1) ~ (A4) の条件を満たすときに, 3.1 節で定義された Φ が定理 2.4 の仮定を満たすことを示すことによって得ることができる. 第 2 節 の定理 2.4 の汎関数に関する仮定のチェックは 3.1 節と 3.2 節による議論により行われるが, 次元条件の確認は (A1) ~ (A4) のそれぞれの場合においての, b と b_0 の大小関係によって容易に確認することができる.

3.4 非線形項 $h(x, t, \xi)$ が ξ に関して奇関数の場合の解の存在

非線形項 $h(x, t, \xi)$ が ξ に関して奇関数である場合, 第 2 節 の定理 2.6 を適用して以下の結果が定理 3.3 の結果と同様にして得られる.

定理 3.4. h は (h1) ~ (h3) を満たすとし, さらに $h(x, t, \xi)$ が ξ に関して奇関数であると仮定する. このとき, 以下の (A1) ~ (A4) のうち一つが成り立てば (WE) は少なくとも k 個の組の非自明な弱解を持つ. ただし, k は以下のそれぞれの場合によって与えられている $k = \#K_i$ である.

- (A1) $b_0 \notin \sigma(\square)$, $b \notin \sigma(\square)$ and $b \notin [b_0^-, b_0^+]$ with $k = \#K_1$ (if $b < b_0^-$), $k = \#K_5$ (if $b \geq b_0^+$);
- (A2) $b_0 \in \sigma(\square)$, $b \notin \sigma(\square)$, かつ, 次のうちどちらかが成り立つ:
 - (1) $b \notin [b_0, b_0^+]$ and (C3) with $k = \#K_3$ (if $b < b_0$), $k = \#K_5$ (if $b_0^+ \leq b$);
 - (2) $b \notin [b_0^-, b_0]$ and (C4) with $k = \#K_1$ (if $b < b_0^-$), $k = \#K_6$ (if $b_0 \leq b$);
- (A3) $b_0 \notin \sigma(\square)$, $b \in \sigma(\square)$, かつ, 次のうちどちらかが成り立つ:
 - (1) $b \notin [b_0^-, b_0]$ and (C1) or (a1) of (C2)
with $k = \#K_1$ (if $b < b_0^-$), $k = \#K_7$ (if $b_0 < b$);
 - (2) $b \notin [b_0, b_0^+]$ and (a2) of (C2)
with $k = \#K_2$ (if $b < b_0$), $k = \#K_5$ (if $b_0^+ < b$);
- (A4) $b_0 \in \sigma(\square)$, $b \in \sigma(\square)$, かつ, 次のうちどれか一つが成り立つ:
 - (1) (C3), $b_0 \neq b$ and (C1) or (a1) of (C2)
with $k = \#K_7$ (if $b_0 < b$), $k = \#K_3$ (if $b < b_0$);
 - (2) (C3), $b_0^+ \neq b$ and (a2) of (C2)
with $k = \#K_4$ (if $b < b_0^+$), $k = \#K_5$ (if $b_0^+ < b$);
 - (3) (C4), $b_0^- \neq b$ and (C1) or (a1) of (C2)
with $k = \#K_1$ (if $b < b_0^-$), $k = \#K_8$ (if $b_0^- < b$);

(4) (C4), $b_0 \neq b$ and (a2) of (C2)

with $k = \#K_2$ (if $b < b_0$), $k = \#K_6$ (if $b_0 < b$);

ここで,

$$\begin{aligned} K_1 &:= \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid b < j^2 - k^2 < b_0\}, & K_5 &:= \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid b_0 < j^2 - k^2 < b\}, \\ K_2 &:= \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid b \leq j^2 - k^2 < b_0\}, & K_6 &:= \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid b_0 \leq j^2 - k^2 < b\}, \\ K_3 &:= \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid b < j^2 - k^2 \leq b_0\}, & K_7 &:= \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid b_0 < j^2 - k^2 \leq b\}, \\ K_4 &:= \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid b \leq j^2 - k^2 \leq b_0\}, & K_8 &:= \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid b_0 \leq j^2 - k^2 \leq b\}. \end{aligned}$$

である.

参考文献

- [1] T. Bartsch and Y. H. Ding, *Critical-Point Theory With Applications To Asymptotically Linear Wave And Beam Equations*, Differential and Integral Equations **13**(2000), 973–1000.
- [2] W. Kryszewski and A. Szulkin, *An Infinite Dimensional Morse Theory with Applications*, Trans. Amer. Math. Soc., **349**(1997), 3181–3234.
- [3] S. J. Li and A. Szulkin, *Periodic Solutions for a Class of Nonautonomous Wave Equations*, Differential and Integral Equations, **9**(1996), no. 6, 1197–1212.
- [4] S. Miyajima and M. Tanaka, *Application of local linking to asymptotically linear wave equations with resonance*, preprint.
- [5] M. Struwe, "Variational Methods", Springer-Verlag, New York, 1999.
- [6] M. Tanaka, *Application of local linking to asymptotically linear wave equations with resonance II*, preprint.