

初期時間における 2 次元オイラー方程式の解析的構造

松本 剛 (Takeshi Matsumoto)^{a,b}, Jérémie Bec^{b,c}, Uriel Frisch^b.

^a 京大院 理 物理学第一教室 (Department of Physics, Kyoto University),

^b Observatoire de la Côte d'Azur,

^c Dipartimento di Fisica, Roma "La Sapienza".

概要

周期境界条件下で有限のエネルギーをもつ滑らかな初期値 $\psi(x_1, x_2) = \cos x_1 + \cos 2x_2$ から出発したときの非圧縮 2 次元オイラー方程式の解を考える。解が複素空間にもつ特異性の性質を時刻 $t = 0$ 周辺で主に数値的に調査した。この時間帯では解析帯の幅 $\delta(t)$ は $\ln(1/t)$ に比例して減少することが示され、この性質をもとに初期時間帯での漸近解析を行うことで漸近解の振舞いを調べた。その結果、複素特異性では渦度が発散しているとの示唆が得られた。また、複素特異性が複素空間につくる解析帯の境界についても考察を行った。

1 はじめに

周期境界条件下で有限のエネルギーをもつ解析的な初期値から出発したときの非圧縮オイラー方程式の解が有限時間のうちに自発的に滑かさを失うことがあるか否かの問題は空間 3 次元の場合、未解決の問題として知られている (たとえば文献 [1] をあげることができる)。数値的にオイラー方程式が解かれ、どのような段階を経て流れが特異になるのか、あるいはどのような機構で特異になるのを回避しているのかが多数議論されている。そうした数々の議論のなかで使われる数値的方法として、analyticity strip method と呼ばれるものがある [2]。この方法は次の事実にもとづいている: 解を実空間から複素空間に解析接続したとき、有限時間で複素空間には特異性が存在する。実空間で流れが特異になるとすれば、それは複素特異性が実空間に「衝突」したものである。さらに、速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ が持つ複素特異性のうち実空間最近接のものを実空間の距離 $\delta(t)$ は速度場のフーリエ係数 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ の高波数における指数減衰から測ることができる。つまり、

$$\sum_{k \leq |\mathbf{k}| < k+1} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)| = C k^{-\alpha(t)} \exp[-\delta(t) k] \quad k \rightarrow \infty \quad (1)$$

となる。ここで C は適当な定数である。冒頭に述べた条件下で 3 次元オイラー方程式の $\delta(t)$ が計られてきた。現在までに得られている結果では $\delta(t)$ は指数的減衰しか示さない。これを見る限りでは、有限時間のうちに実空間で自発的に滑かさが失われる兆候は観察されていない [3]。

複素特異性について解析帯の幅 (width of the analyticity strip) $\delta(t)$ 以上の情報を得ることができるだろうか? 本研究では、(実空間)2 次元オイラー方程式のみを扱う。2 次元の場合実空間においては有限時間で初期条件のもっていた滑かさがうしなわれることはないが、複素空間に解を拡張するとその限りではない。また、初期条件は entire なものを使う。このとき時刻 $t = 0$ で複素特異性は複素空間無限遠にある。実空間 2 次元、時刻 $t = 0$ 周辺という条件下で、複素特異性について解析帯の幅 $\delta(t)$ 以上の情報を得ようとするのが本研究の目的である。

2 初期時間での $\delta(t)$ の振舞いと漸近方程式

2次元非圧縮オイラー方程式

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

をスペクトル法で解き、解析帯の幅が $t = 0$ 周辺でどのように減少するのかをまず調べることにする。本研究を通して使う初期条件は、流れ関数で書くと

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \cos x_1 + \cos 2x_2 \quad (4)$$

である。この初期値がもつ複素特異性は複素空間無限遠にある。

初期時刻 $t = 0$ 周辺での $\delta(t)$ の振舞いを調べる意図は、 $t = 0$ に複素特異性が複素空間無限遠にあるという情報を利用すると多少の解析が可能になる点にある。1次元非粘性バーガス方程式で初期値 $u_0(x) = -\sin x$ から出発した場合には $t \ll 1$ で解析帯の幅 $\delta(t)$ が $\delta(t) \propto \ln(1/t)$ と振舞うことが知られており、この対数則を導く解析がある [4]。初期条件 (4) の2次元オイラー方程式も同様の対数則に従えば、非粘性バーガス方程式での解析手法が応用できるだろうというわけである。

この節では2次元オイラー方程式も実際に対数則に従うことを示し、バーガス方程式に使われた解析手法を応用することで流れ関数が漸近的に従う方程式が導出されることを述べる。

2.1 初期時間での $\delta(t)$ の振舞い

解析帯の幅 $\delta(t)$ は、速度場のフーリエ係数の高波数での指数減衰から見積られる。時刻 $t \ll 1$ でオイラー方程式を解く場合、通常の倍精度では限られた波数でしかフーリエ係数が励起されていないため、 $\delta(t)$ を見積ることは難しい。そのため、ここでは多重精度計算をソフトウェア的に実装することにより、90桁の精度でスペクトル法を実行した [6]。その結果得られた速度フーリエ係数の和 $A_k^{(u)} \equiv \sum_{k \leq |k| < k+1} |\hat{u}(k, t)|$ を図1(左図)に示す。波数の大きさ k の偶奇間の振動は初期条件 (4) のもつ対称性に起因している。この偶数の k の値をつなぐことによって得られる指数減衰から見積られるものを $\delta(t)$ とみなすと、その振舞いは図1(右図)のようになる。解析帯の幅 $\delta(t)$ は対数的に減少していることがわかる。時間帯 $10^{-9} < t < 10^{-2}$ で最小二乗法を行うと $\delta(t) = (1/2) \ln(1/t) + 1$ となる。

2.2 漸近流れ関数とその方程式

初期時間で2次元オイラー方程式の解の $\delta(t)$ の振舞いは1次元非粘性バーガス方程式のそれと似通っていることがわかった。バーガス方程式に使われた解析手法 [4] の精神を2次元オイラー方程式に応用してみる。要点は、 $t \rightarrow 0$ であることと、複素座標を $z = x + iy$ とするとき、複素特異性は $|y| \rightarrow \infty$ にあることを使う2点にある。

まず最初に条件 $t \rightarrow 0$ を使うことを考える。流れ関数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ を時刻 t でテイラー展開する。

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\mathbf{x}) t^n. \quad (5)$$

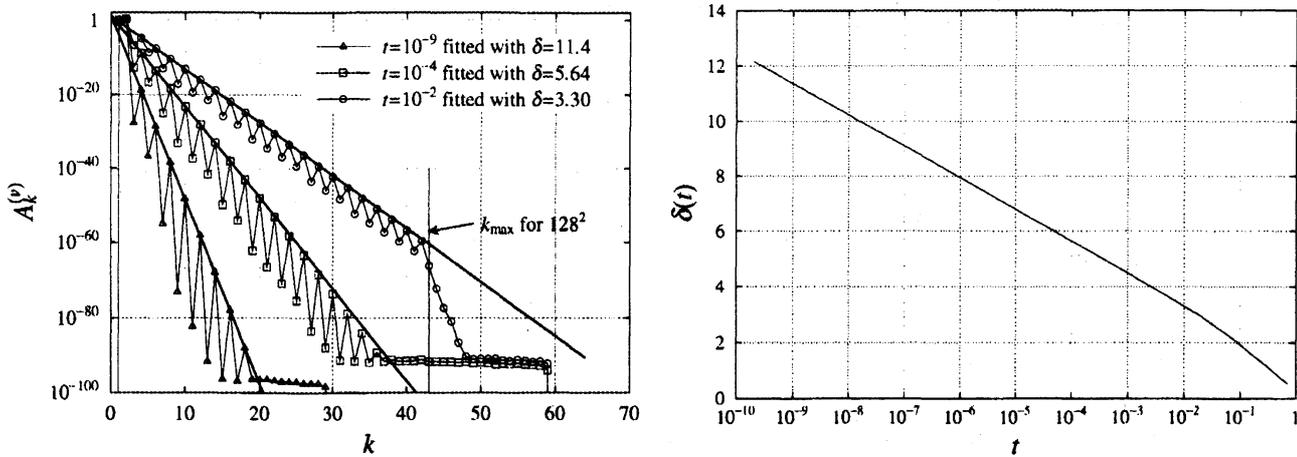


図 1: (左図) 90 桁の精度で解かれた初期時間の速度場のフーリエ係数の和 $\sum_{k \leq |k| < k+1} |\hat{u}(\mathbf{k}, t)|$ 。格子点数は $64^2, 128^2$ を用いており、それぞれの場合の時間ステップは $\Delta t = 2 \times 10^{-11}, 5 \times 10^{-6}$ (4 次ルンゲクッタ法を用いた)。最大波数 k_{\max} は 2/3 法から決まるものである。(右図) 初期時間での解析帯の幅 $\delta(t)$ ($2 \times 10^{-10} \leq t \leq 7.3 \times 10^{-1}$)。

ここで、展開の最低次の係数は初期条件 $\psi_0(\mathbf{x})$ (式 (4)) で与えられる。この表式 (5) をオイラー方程式

$$\partial_t \nabla^2 \psi = J(\psi, \nabla^2 \psi) \quad (6)$$

に代入すると $\psi_n(\mathbf{x})$ についての漸化式を得ることができる。ここで $J(f, g) = (\partial f / \partial x_1)(\partial g / \partial x_2) - (\partial f / \partial x_2)(\partial g / \partial x_1)$ である。漸化式は

$$\nabla^2 \psi_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^n J(\psi_r, \nabla^2 \psi_{n-r}) \quad (7)$$

となる。式 (5) において適当な n で打ち切ることで $t \rightarrow 0$ を利用したことになる。

さて、次に複素座標虚部について $|\mathbf{y}| \rightarrow \infty$ であることを使うために $\psi_n(\mathbf{x})$ をフーリエ級数展開する。

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_n(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} t^n. \quad (8)$$

空間座標を実空間 \mathbf{x} から複素空間 $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ に解析接続をすると

$$\psi(\mathbf{z}, t) = \psi(\mathbf{x} + i\mathbf{y}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_n(\mathbf{k}) e^{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} t^n. \quad (9)$$

となる。ここでは極限 $|\mathbf{y}| \rightarrow \infty$ を与えるものとして、 $y_1 \rightarrow +\infty, y_2 \rightarrow +\infty$ を考えることにする。このとき式 (9) で支配的になるのは、波数ベクトルの各成分が $k_1 \leq 0$ かつ $k_2 \leq 0$ である項である。このような項のみを形式的に保持して漸化式 (7) を解くことにしよう。すると初期条件は $\psi_0(\mathbf{z}) \simeq (e^{-iz_1} + e^{-2iz_2})/2$ になり、 ψ_n は以下のように表される。

$$\psi_n(\mathbf{z}) \simeq \sum_{j=0}^{n+1} \hat{\psi}_n(\mathbf{k}_n^{(j)}) e^{-i[jz_1 + 2(n+1-j)z_2]} \quad (10)$$

ここで $k_n^{(j)} = (-j, -2(n+1-j))$ である。その結果、流れ関数のテイラー展開 (5) は

$$\psi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) t^n \simeq \frac{1}{2}(e^{-iz_1} + e^{-2iz_2}) + \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n+1} \hat{\psi}_n(k_n^{(j)}) (te^{-iz_1})^j (te^{-2iz_2})^{n+1-j} \quad (11)$$

となる。

最後のステップとして、式 (11) で

$$(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = (z_1 + i \ln t, z_2 + (i/2) \ln t) \quad (12)$$

と変数変換すると以下を得る。

$$\psi(z, t) \simeq \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2}(e^{-i\tilde{z}_1} + e^{-2i\tilde{z}_2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n+1} \hat{\psi}_n(k_n^{(j)}) e^{-i[j\tilde{z}_1 + 2(n+1-j)\tilde{z}_2]} \right] \equiv \frac{1}{t} F(\tilde{z}). \quad (13)$$

変数変換 (12) は式 (11) の形から類推されるものである。意味をつけるとすれば、 $\delta(t) \propto \ln(1/t)$ より、複素特異性が実空間に近づくのと同じ速度で動く虚部座標系をとったと言えるだろう。ある点 \tilde{z}_* で $F(\tilde{z})$ が特異的になるとすれば、 $z = (\tilde{z}_{1*} - i \ln t, \tilde{z}_{2*} - (i/2) \ln t)$ において漸近流れ関数が特異的になる。この z が実空間最近接の特異点であれば解析帯の幅 $\delta(t) = \sqrt{(\text{Im}z_{1*})^2 + (\text{Im}z_{2*})^2} \propto \ln(1/t)$ ($t \rightarrow 0$) を与えることになる ($t \rightarrow 0$ で $\text{Im}\tilde{z}_1, \text{Im}\tilde{z}_2$ が有限であることを仮定している)。

この節の最後に、以上の漸近的な議論をすべて忘れてみることにする。つまり 2次元オイラー方程式の解である流れ関数が単に次の形で与えられるとする。

$$\psi(z, t) = \frac{1}{t} F(\tilde{z}), \quad (14)$$

$$\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \left(z_1 + i \ln t, z_2 + \frac{i}{2} \ln t \right) \quad (15)$$

変数は $t, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2$ を独立変数とみなす。この表式を 2次元オイラー方程式に代入すると F の方程式が

$$\left(-1 + i \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_1} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_2} \right) \tilde{\nabla}^2 F = \tilde{J}(F, \tilde{\nabla}^2 F) \quad (16)$$

ときまる。ここで $\tilde{\nabla} = (\partial/\partial \tilde{z}_1, \partial/\partial \tilde{z}_2)$ であり、 $\tilde{J}(f, g) = (\partial f/\partial \tilde{z}_1)(\partial g/\partial \tilde{z}_2) - (\partial f/\partial \tilde{z}_2)(\partial g/\partial \tilde{z}_1)$ である。両辺からでた $1/t^2$ がキャンセルして、結果の式 (16) が陽に時刻 t を含まないことに注意したい。この方程式 (16) を波数 $k_1 \leq 0, k_2 \leq 0$ に制限して解いたものが先程の漸近的議論で得られたものになっている。

次節ではこの $F(\tilde{z})$ を数値的に求めて複素特異性を調べる。

3 関数 F の複素特異性

この節では関数 F を数値的に求めて、その複素特異性の性質を調べる。

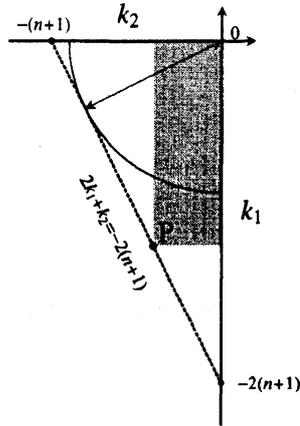


図 2: 波数空間 (k_1, k_2) 平面において漸化式 (19) 左辺のフーリエ係数 $\hat{F}(\mathbf{k})$ を計算するのに必要なフーリエ係数のある領域。図の点 P がベクトル \mathbf{k} の表す点とすると、 $\hat{F}(\mathbf{k})$ の計算に必要なフーリエ係数は影つきの部分にある格子点のものになる。

3.1 F の計算

ここからは、簡単のため、変数 \bar{z} を z と書くことにする。第 2.2 節での漸近議論を F でやりなおして、 F のフーリエ係数 \hat{F} を計算するための漸化式を最初に導出することにする。式 (13) から、 $F_n(z)$ を

$$F_n(z) = \sum_{j=0}^{n+1} \hat{F}(\mathbf{k}_n^{(j)}) e^{-i[jz_1 + 2(n+1-j)z_2]} \quad (17)$$

と定義すると、 $F(z)$ は

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) \quad (18)$$

となる。ここで $F_0(z) = (e^{-iz_1} + e^{-2iz_2})/2$ である。 $F_n(z)$ のフーリエ係数は波数空間、すなわち (k_1, k_2) 平面の第三象限内の直線 $2k_1 + k_2 = -2(n+1)$ 上の格子点にのみ存在する。さて、以上の表式に ψ_n についての漸化式 (7) をもちいて $\hat{F}(\mathbf{k})$ の漸化式を得ることができる。

$$\hat{F}(\mathbf{k}) = \frac{2}{(2k_1 + k_2 + 2)|\mathbf{k}|^2} \sum_{q_1=k_1}^0 \sum_{q_2=k_2}^0 |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2 (\mathbf{q} \wedge \mathbf{k}) \hat{F}(\mathbf{q}) \hat{F}(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad (19)$$

ここで $\mathbf{k} \wedge \mathbf{k}' = k_1 k_2' - k_2 k_1'$ で、初期条件は $\hat{F}(-1, 0) = 1/2$, $\hat{F}(0, -2) = 1/2$ である。フーリエ係数 $\hat{F}(\mathbf{k})$ の計算に必要なモードは図 2 の影をつけた部分のものだけである。(漸化式を $\hat{F}(\mathbf{k})$ で表したのは、 $\hat{F}_n, \mathbf{k}_n^{(j)}$ を使うよりも表現が簡潔になるためである。) なお、漸化式 (19) は畳み込みを含むが、ここでは高速フーリエ変換を使わずに直接計算した。

計算された $\hat{F}(\mathbf{k})$ について和

$$A_K^{(F)} \equiv \sum_{K \leq |\mathbf{k}| < K+1} |\hat{F}(\mathbf{k})| \quad (20)$$

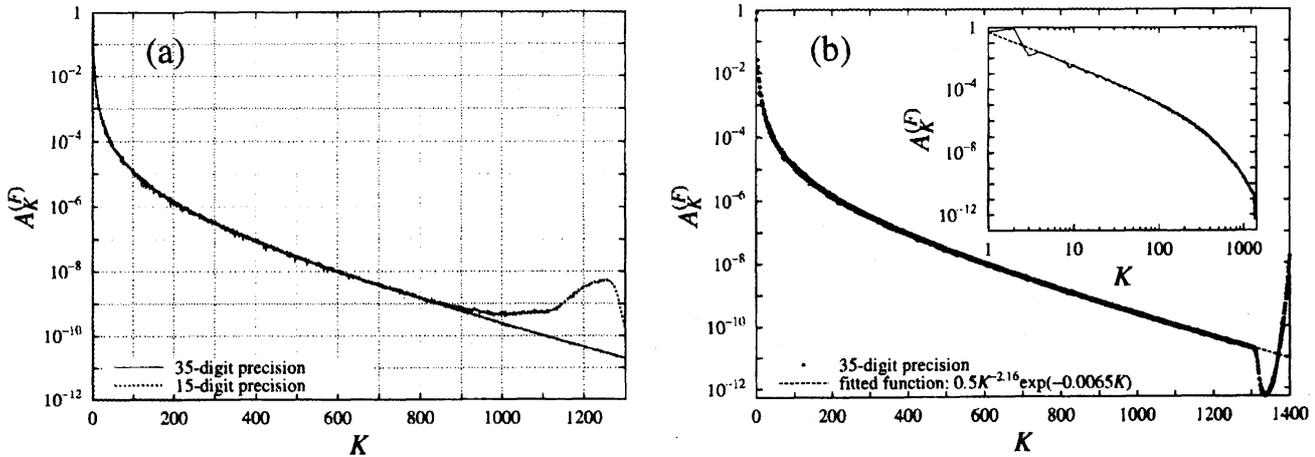


図 3: (a) 15桁精度 (倍精度) と 35桁精度で漸化式 (19) を解いたときの和 (20)。 (b) 35桁精度で漸化式 (19) を解いたときの和 (20)。挿入図は両対数での表示。

を図 3 に示す。図 3(a) にあるように 15桁精度 (倍精度) で (19) を解くと途中で計算が破綻することが判明したので 35桁精度でも計算を行った。35桁精度でもさらに高波数へ行くとやはり計算が破綻する (図 (b))。詳細は省略するが、35桁精度の場合 $|k| = 1100$ までは信頼ができそうである。得られた $A_K^{(F)}$ は高波数で指数減衰を示す。式 (1) の形で最小二乗法をおこなうと $A_K^{(F)} = 0.5K^{-2.16} \exp(-0.0065K)$ となった。これは $F(z)$ の解析帯の幅 δ について $\delta = 0.0065$ であることを示す。つまり、 $F(z) = F(x + iy)$ は $|y| = 0.0065$ のどこかに複素特異性を持つことになる。この 0.0065 という数値は小さいが、あきらかに $F(z)$ が実空間では解析的であることを示唆している。

これまで (k_1, k_2) 平面の偏角方向に和をとって δ を測ったが、和をとらずに $\hat{F}(\mathbf{k})$ の指数減衰の波数空間における方向依存性をみたものが次の図 4 である。 (k_1, k_2) 平面の第三象限の偏角 $\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$ を 50 等分して、 $\Delta\theta = \pi/100$ の扇形のなかでとった $|\hat{F}|$ の和の例のいくつかを図 4 左図に示す。全ての方向で指数減衰がみられ、 $|\hat{F}(\mathbf{k})| \propto \exp(-\delta(\theta)|k|)$ とおくことができる。この $\delta(\theta)$ を偏角 θ のグラフにすると図 4 右図になる。先程見積った 0.0065 は $\min_{\theta} \delta(\theta)$ となっている。この最小値をあたえる角度を θ_* とすると $\theta_* = 1.324\pi$ と見積ることができた。この θ_* は、それぞれの n について $|\hat{F}_n(\mathbf{k}_n^{(j)})|$ (式 (17)) が最大になる $\mathbf{k}_n^{(j)}$ を (k_1, k_2) 平面にプロットしたときの軌跡 (直線になる) の傾きから決定した。この 1.324π という「魔法数」は波数空間での幾何学などから導けると期待されるが今のところ我々は成功していない。ここで得られた $\delta(\theta)$ は後の第 3.3 節で特異性のつくる集合を見るときに重要な役割を担うことになる。

3.2 F から作られる「渦度」

ここでは関数 $F(z)$ から作られる「渦度」 $\omega(z) = -\nabla^2 F(z)$

$$\omega(z) = \omega(x + iy) = \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 \hat{F}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}} = \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 \hat{F}(\mathbf{k}) e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (21)$$

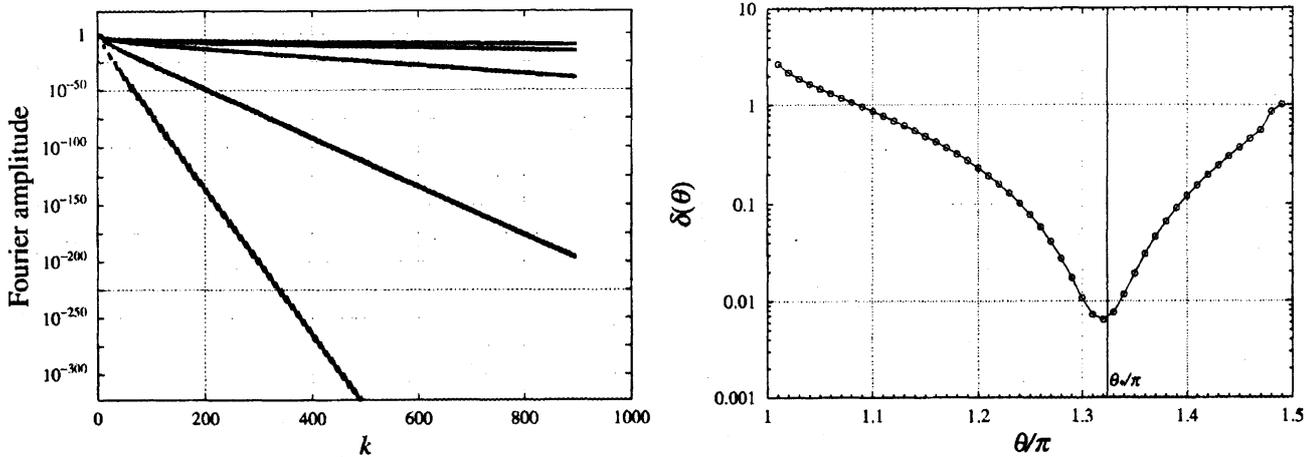


図 4: (左図) $|\hat{F}(\mathbf{k})|$ の方向依存性。(右図) (k_1, k_2) 平面での偏角 θ の関数として、 $|\hat{F}(\mathbf{k})| \propto \exp(-\delta(\theta)|\mathbf{k}|)$ で与えられる $\delta(\theta)$ 。

の振舞いを調べることにする。空間座標虚部をゼロ $\mathbf{y} = (y_1, y_2) = (0, 0)$ に制限したときの「渦度」 $\omega(x_1, x_2)$ の等高線図を図 5 に示す。(ここでフーリエ係数が $\hat{F}^*(\mathbf{k}) = \hat{F}(-\mathbf{k})$ を満たさないので実空間に制限しても「渦度」は複素数になる。) 点 $(x_1, x_2) = (\pi, \pi)$ で「渦度」が大きく変化していることがわかる(流れ場の対称性から $(\pi, 0)$ も同じ性質をもつ)。この点 (π, π) をとおり、構造に垂直な方向(これは前節の θ_* と一致する)の直線にそって「渦度」をみたものを図 6 にしめす。ここから、点 (π, π) において「渦度」は実部のみをもち、 (x_1, x_2) 平面上で「渦度」の大きさが最大になることがわかる。

この事実はフーリエ係数 $\hat{F}(\mathbf{k})$ の性質にも現れている。計算結果の $\hat{F}(\mathbf{k})$ をみると

$$(-1)^{k_1} \hat{F}(\mathbf{k}) \geq 0 \quad (22)$$

となっているのである。現在のところ (22) の成立は数値的に確かめただけで、証明は漸化式 (19) から得られていない。そのため全ての \mathbf{k} にわたって成立しているかどうかは定かではない。少なくとも、35桁精度の計算が正しい結果をあたえていると思われる $|\mathbf{k}| \leq 1100$ では (22) が成り立っている。点 $(x_1, x_2) = (\pi, \pi)$ での「渦度」を (17) と (18) を用いて定義 (21) にもどって書くと

$$\begin{aligned} \omega(\pi + iy_1, \pi + iy_2) &\equiv \omega_*(\mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n+1} |\mathbf{k}_n^{(j)}|^2 \hat{F}_n(\mathbf{k}_n^{(j)}) e^{-\mathbf{k}_n^{(j)} \cdot \mathbf{y}} e^{-i(j\pi + 2(n+1-j)\pi)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n+1} |\mathbf{k}_n^{(j)}|^2 (-1)^j \hat{F}_n(\mathbf{k}_n^{(j)}) e^{-\mathbf{k}_n^{(j)} \cdot \mathbf{y}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 (-1)^{k_1} \hat{F}(\mathbf{k}) e^{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \end{aligned} \quad (23)$$

となる。性質 (22) によれば、確かに $\mathbf{x} = (\pi, \pi)$ で一番大きくなるように和がとられていることがわかる。式 (23) を e^{y_1} と e^{y_2} の巾級数と解釈すると、係数 $|\mathbf{k}|^2 (-1)^{k_1} \hat{F}(\mathbf{k})$ が非負であるために巾級数 (23) の特異点は e^{y_1}, e^{y_2} が実数のところにある (Vivanti の定理)。つま

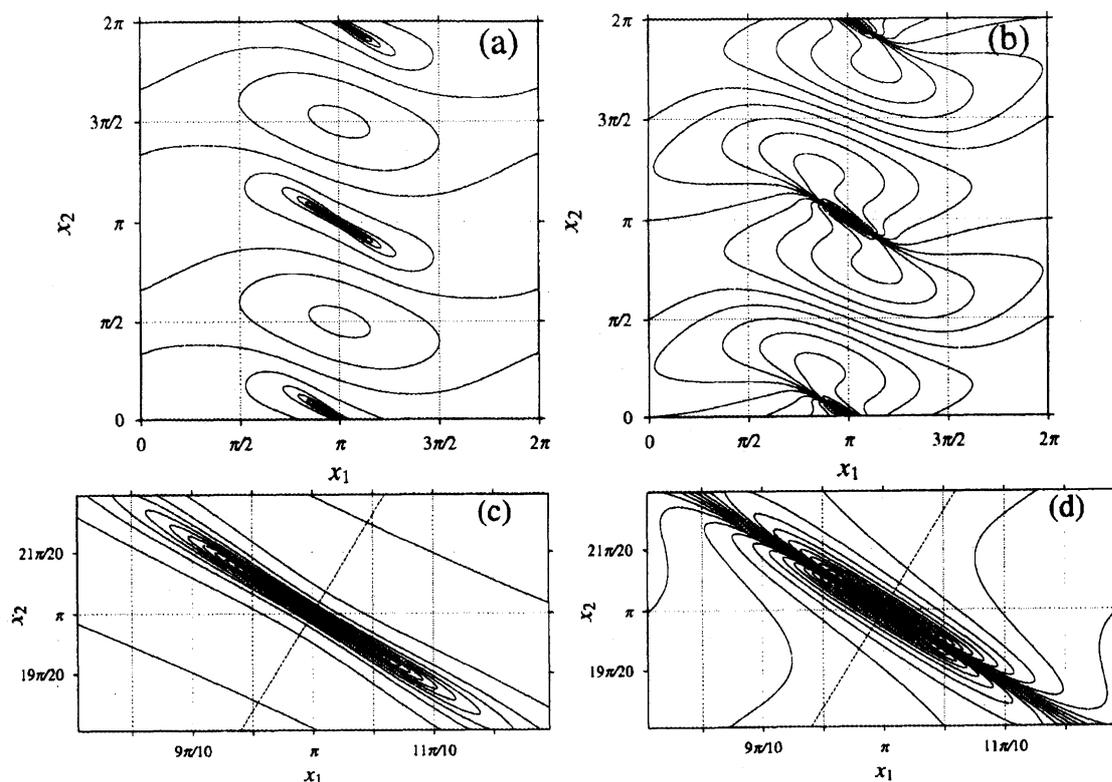


図 5: $F(\mathbf{x})$ からつくられる「渦度」 $\omega(\mathbf{x}) = -\nabla^2 F(\mathbf{x})$ の (a) 実部の等高線図 (b) 虚部の等高線図 (c) 実部の点 $(x_1, x_2) = (\pi, \pi)$ 周辺の拡大図 (d) 虚部の点 $(x_1, x_2) = (\pi, \pi)$ 周辺の拡大図

り、 F の実空間最近接の複素特異性は座標実部を $(x_1, x_2) = (\pi, \pi)$ に固定した (y_1, y_2) 平面 (ここで y_1, y_2 は実数) にあることになる。この (y_1, y_2) 平面上で「渦度」 $\omega_*(\mathbf{y})$ がどのように振舞うかをしらべることしよう。

この平面 (y_1, y_2) 上で「渦度」 ω_* の等高線を描いたものを図 7(左図) にしめす。等高線が直線に見えるのは、ここに示した y_1, y_2 の領域が非常に小さいため、もっと大きい領域にわたって等高線を書くと曲って見える。原点 $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ を通り、傾き $\tan \theta_*$ の直線にそって見た「渦度」 $\omega_*(y_1, y_2)$ を実空間最近接の特異点 $\delta(\cos(\theta_* - \pi), \sin(\theta_* - \pi))$ とその直線上の点 \mathbf{y} との距離でプロットしたのが図 7(右図) である。この図から ω_* は複素特異点に近付くにつれて距離の $-3/4$ 乗で発散することが示唆される。

3.3 特異性の作る境界

関数 $F(z)$ がどこで特異になるかを追い詰めてきた。座標実部を $\mathbf{x} = (\pi, \pi)$ と固定した平面 (y_1, y_2) で特異性が形成する解析帯の境界 (自然境界) はどのようなになっているかという問題をこの節で考えることにする

最も簡単に特異性が作る境界を構成する方法は、図 7 左図にあるような円を様々な点 \mathbf{y} を中心として描くことであろう。原点 $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ を中心とするこの円の半径はフーリエ係数

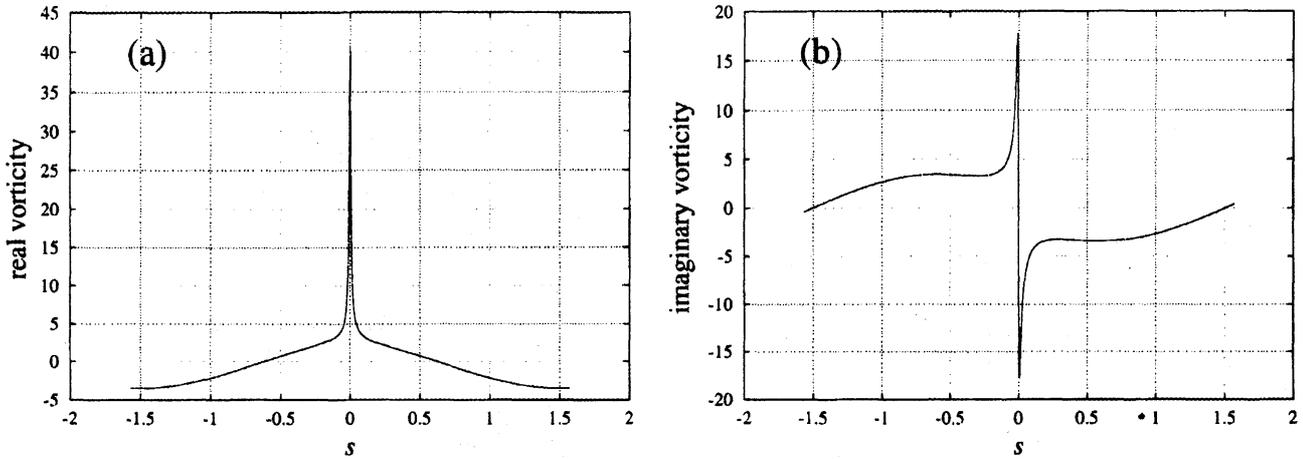


図 6: $F(\mathbf{x})$ からつくられる「渦度」 $\omega(\mathbf{x}) = -\nabla^2 F(\mathbf{x})$ の値を (x_1, x_2) 平面で、点 (π, π) を通り、最も特異な傾き ($\tan \theta_*$) をもつ直線にそって見たもの。横軸 $s = 0$ が点 (π, π) に相当する。
 (a) 実部 (b) 虚部

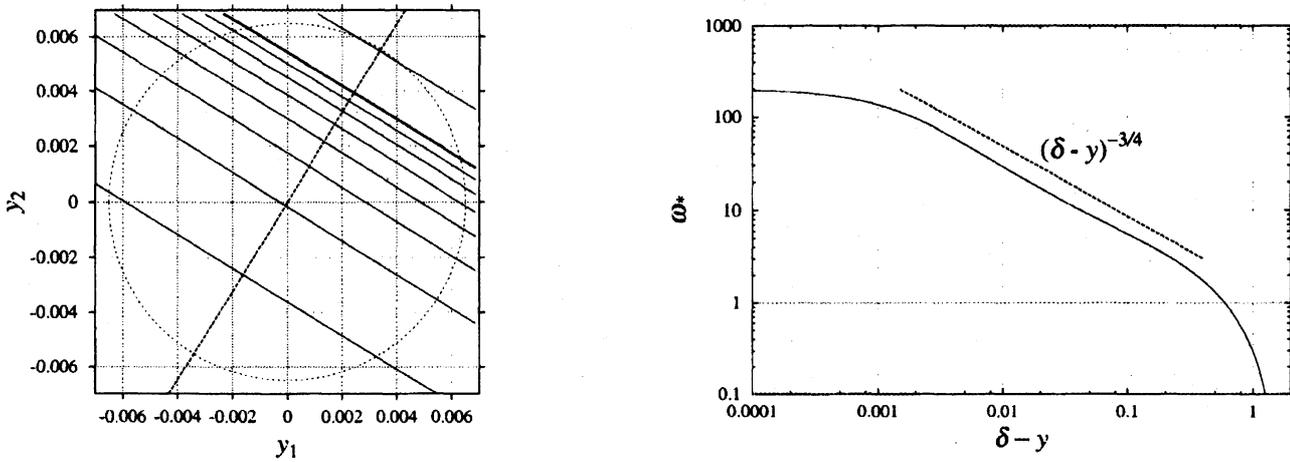


図 7: (左図) (y_1, y_2) 平面上での「渦度」 $\omega_*(y_1, y_2)$ の等高線。点線の円は原点 $(y_1, y_2) = (0, 0)$ 中心で半径 $\delta = 0.0065$ の円。等高線の値は左下から 30, 40, 50, ..., 90, 100, 200 (太線が 100)。 (右図) 原点 $(y_1, y_2) = (0, 0)$ を通り、傾き $\tan \theta_*$ の直線にそって見た「渦度」 $\omega_*(y_1, y_2)$ (この直線は左図に破線でしめされている)。横軸の $(\delta - y)$ は直線上の点 \mathbf{y} と点 $\delta(\cos(\theta_* - \pi), \sin(\theta_* - \pi))$ との距離を表す。

$|\hat{F}(\mathbf{k})|$ の指数減衰から $\delta = 0.0065$ と決定された。任意の点 $(y_1, y_2) = (h_1, h_2)$ を中心とする円については $|\exp(-h_1 k_1 - h_2 k_2) \hat{F}(\mathbf{k})|$ の指数減衰から半径 $\delta(h_1, h_2)$ がきまることになる。 (y_1, y_2) 平面上に適当な等間隔格子点 (h_1, h_2) を導入し、各点で $\delta(h_1, h_2) > 0$ となる円を描いたものが図 8 である。これらの円を便宜的に解析円とよぶことにする。解析円の包絡線として特異性のつくる境界線がうかびあがることがわかる。この境界は凸でなめらかであることが示唆される。

また、特異性のつくる境界線は第 3.1 節で計算した $\delta(\theta)$ から直接構成することも可能である。結論から述べると、 $\delta(\theta)$ が微分可能であるとき、その特異性がつくる境界線 (Y_1, Y_2) が θ の関数として

$$Y_1(\theta) = -\delta(\theta) \cos \theta + \delta'(\theta) \sin \theta, \quad (24)$$

$$Y_2(\theta) = -\delta(\theta) \sin \theta - \delta'(\theta) \cos \theta \quad (25)$$

で与えられる。この導出は以下のように行う。波数ベクトル \mathbf{k} と \mathbf{y} をそれぞれ極座標で書きなおし、 $\mathbf{k} = k(\cos \theta, \sin \theta)$, $\mathbf{y} = y(\cos \phi, \sin \phi)$ とする。これで $F(\mathbf{z})$ を表すと

$$F(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{F}(\mathbf{k}) e^{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{F}(\mathbf{k}) \exp[-ky \cos(\theta - \phi)] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (26)$$

となる。ここで $\hat{F}(\mathbf{k}) \propto k^{-\alpha(\theta)} \exp(-\delta(\theta)k)$ を (26) に代入すると

$$F(\mathbf{z}) \simeq \sum_{k, \theta} k^{-\alpha(\theta)} \exp\{-[\delta(\theta) + y \cos(\theta - \phi)]k\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (27)$$

となる。 \mathbf{y} の偏角 ϕ を固定したときに式 (27) が収束するための条件は

$$\delta(\theta) + y \cos(\theta - \phi) > 0 \quad \text{for any } \theta \quad (28)$$

である。条件 (28) を書き直すと

$$y < \frac{\delta(\theta)}{-\cos(\theta - \phi)} \quad \text{for any } \theta \text{ such that } \cos(\theta - \phi) < 0. \quad (29)$$

となる。よって \mathbf{y} の偏角 ϕ を固定したときに一番遠くまでいける距離 $Y_*(\phi)$ は以下の表式で与えられる

$$Y_*(\phi) = \inf_{\substack{\theta \\ \cos(\theta - \phi) < 0}} \frac{\delta(\theta)}{-\cos(\theta - \phi)}. \quad (30)$$

この (30) の \inf が $\theta = \theta_*$ で実現するとして \inf の中身を θ について微分したもの

$$\delta(\theta_*) \sin(\theta_* - \phi) + \delta'(\theta_*) \cos(\theta_* - \phi) = 0 \quad (31)$$

から ϕ を θ_* で表すことができる ($\phi = \theta_* + \text{Arctan}[\delta'(\theta_*)/\delta(\theta_*)] + \pi$)。あとは、 $(Y_1, Y_2) = Y_*(\phi)(\cos \phi, \sin \phi)$ であることを使い、 θ_* を θ と書き直すことで結論 (24)、(25) が得られる。図 9 に直接 $\delta(\theta)$ から式 (24)、(25) をもちいて構成した特異性のつくる曲線と解析円の包絡線との比較を示す。ここで $\delta'(\theta)$ は中心差分で近似をした。特に $y_1 = 2$ のあたりで包絡線とのずれが大きくなっているが、これは $\delta(\theta)$ が $\theta = \pi, 3\pi/2$ 周辺で精度良く求まっていないことに起因している。それ以外のところでは両者はよく一致している。なお、式 (24)、(25) の異なる導出が [7] にある。

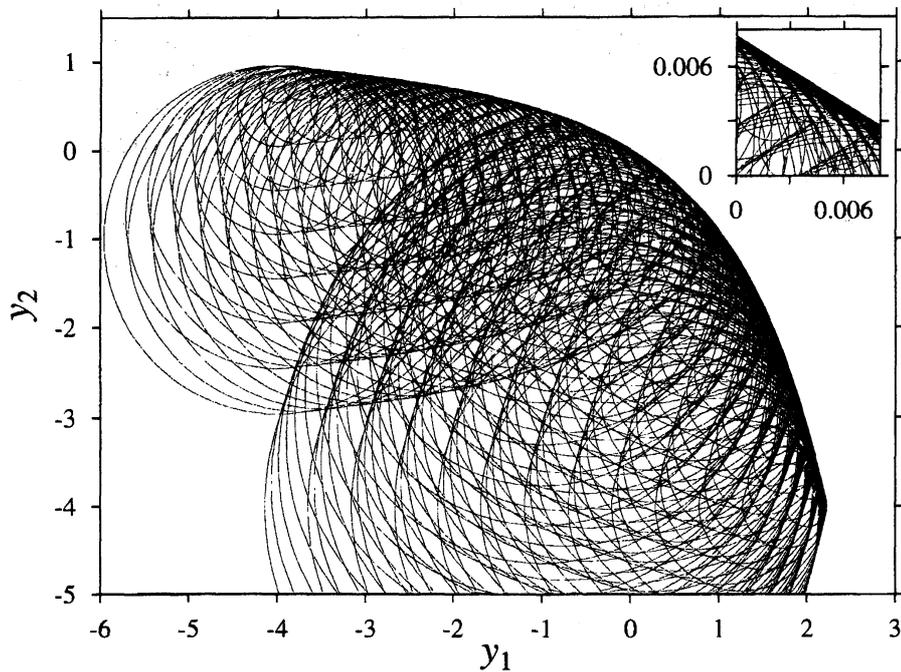


図 8: (y_1, y_2) 平面に解析円の包絡線として浮びあがった特異性がつくる境界線。ここでは 305 個の円を描いた。挿入図は原点近傍で $\delta = 0.0065$ のスケールでの拡大図。

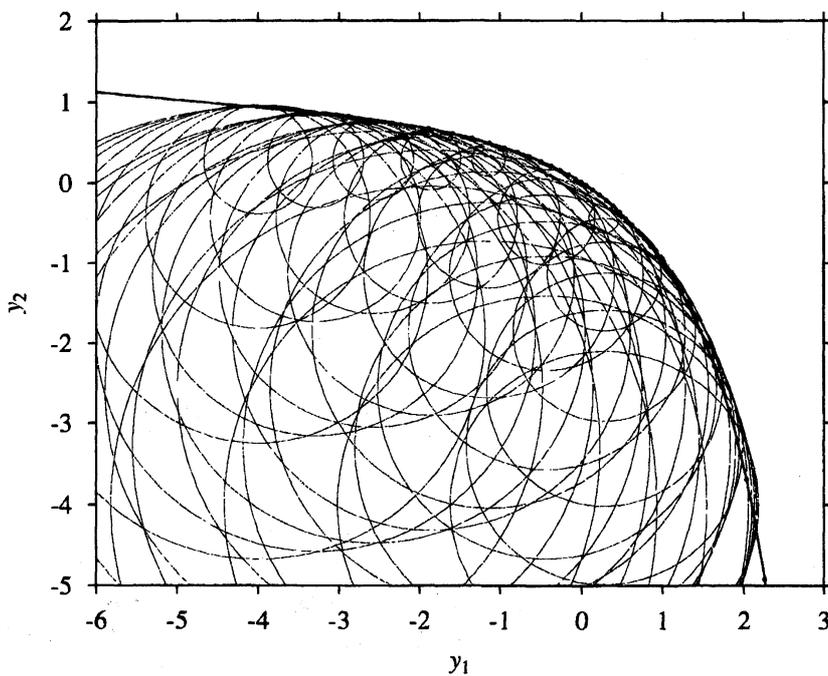


図 9: $\delta(\theta)$ から式 (24)、(25) を用いて直接構成した特異性がつくる境界線と解析円の包絡線。

4 まとめと展望

初期条件 (4) から出発する時刻 $t \rightarrow 0$ での 2 次元オイラー方程式の複素特異性について調べてきた。まず $t = 0$ 周辺では解析帯の幅が $\delta(t) \propto \ln(1/t)$ となることが示された。この事実を元にして、初期条件 (4) の対称性を利用し、 $t \rightarrow 0$ と複素座標虚部 $(y_1, y_2) \rightarrow (+\infty, +\infty)$ の両極限のもとでの漸近的な流れ関数 $F(z)/t$ を導入して、 $F(z)$ の複素特異性の性質を調べた。そこでは「渦度」 $-\nabla^2 F$ が複素特異性で発散しているとの示唆を得た。また、対称性から $F(z) = F(x + iy)$ の特異性は $x = (\pi, \pi)$ 上にあり、 (y_1, y_2) 平面での特異性の作る境界線が解析円の包絡線として構成できることと $\delta(\theta)$ の情報から構成できることを示した。特異性の作る境界線は凸でなめらかであるとおもわれる。この事実を多変数関数論の諸定理と結び付ける作業を現在行っている。

特に特異性の作る境界線を構成する方法は、この問題だけでなく一般の問題に応用できるものである。我々は現在 2, 3 次元オイラー方程式への応用をすすめているところである。最後になるが、第 2.2 節でおこなった議論は初期条件の影響を直接被っているので多数の波数をもつ一般の初期条件の場合へは簡単に応用できないことを述べておく。

謝辞

本研究は文科省科学研究費補助金 (若手研究 (B), 課題番号 1574023) の補助をうけた。また、数値計算の一部は京大基礎物理学研究所の計算機システムを利用した。

参考文献

- [1] A.J. Majda and A.L. Bertozzi, *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [2] C. Sulem, P.-L. Sulem, and H. Frisch, Tracing complex singularities with spectral methods, *J. Comput. Phys.* **50**, 138–161 (1983).
- [3] U. Frisch, *Turbulence, the Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [4] U. Frisch, The analytic structure of turbulent flows, in *Proceed. Chaos and statistical methods*, Sept. 1983, Kyoto, Y. Kuramoto, ed. pp. 211–220, Springer (1984).
- [5] U. Frisch, T. Matsumoto and J. Bec, Singularities of Euler flow? Not out of the blue! *J. Stat. Phys.* **113**, 761–781 (2003).
- [6] D.H. Bailey, A fortran-90 based multiprecision system, RNR Technical Report RNR-94-013 (1995). <http://crd.lbl.gov/~dhbailey/>も参照されたい。
- [7] T. Matsumoto, J. Bec and U. Frisch, The analytic structure of 2D Euler flow at short times *Fluid Dyn. Res.* in press (2004) (nlin.CD/0310044).