

偏心二円筒間流れにおける短時間での混合効率の指標について

京大・情報 川添博史 (Hiroshi Kawazoe)

京大・情報 船越満明 (Mitsuaki Funakoshi)

京大・情報 金子 豊 (Yutaka Kaneko)

Graduate School of Informatics, Kyoto University

1 序論

流体が混合する仕組みを解明することは、化学工業や食品工業をはじめとする広い分野にわたって重要である。これらの分野においては、粘性の高い流体をできるだけ少ないエネルギーで、短時間かつ一様に混合させることが望まれる。しかし、混合の仕組みを完全に理解するような一般的な理論は未だ確立されていないのが現状である。なぜなら、2次元非定常流および3次元流において流体粒子にはカオスと呼ばれる非常に不規則で複雑な振る舞いが可能になるからである。本研究においてカオスという言葉は、近接する2つの流体粒子が時間とともに指数関数的に離れていくような振る舞いのことを指す。流体粒子のカオス的な振る舞いは、比較的単純な流れにおいても可能となることが知られている。一般に工学への応用を考えると、システムのカオス的な振る舞いは未来予測を困難にするため、しばしば好ましくない性質としてとらえられがちである。しかしながら混合問題を考える上では、カオス的に振る舞う流体要素は速やかに系の広い領域に広がっていくことが期待されるため、混合問題においてはカオスを積極的に利用することが可能であると言える。

本研究では、2次元の周期的な流れの代表的な例といえる偏心二円筒間流れを題材に選ぶ。この流れは、両円筒のゆっくりした回転の下で速度場が解析的に与えられることが知られており^[1]、また実験も可能であるという理由から多くの研究がなされている^[2]。

本研究の目的は、2次元周期流における流体の短時間における混合の仕組みを調べ、混合の効率を評価する方法を考察することである。特に、ポアンカレ写像の不安定周期点の安定多様体・不安定多様体に注目し、これらの幾何学的な特徴が、流体要素の混合および変形とどのような関連性を持っているかを詳しく調べる。

まず2章では、系の速度場およびその時間変化を特徴付けるいくつかのパラメータを導入し、流体粒子の位置の時間変化の計算法について説明する。3章ではまずポアンカレプロットによる混合の評価法について述べ、その後でポアンカレ写像と写像の不安定周期点の安定多様体・不安定多様体を導入する。そして偏心二円筒間流れについてそれらの計算結果を示し、その幾何学的構造と流体要素の混合効率との間の関連性について考察する。4章では、物質線の時間発展を計算する方法について説明し、安定多様体・不安定多様体の曲率と、短時間における流体要素の変形との間の関連性について考察する。5章は結論である。

2 偏心二円筒間流れ

偏心二円筒間流れによる流体の混合を考える。偏心二円筒は、図1のように表される。直角座標 (x_1, x_2) において、 $(0, 0), (-d, 0)$ を中心とする円をそれぞれ外円筒と内円筒の壁面とする。外円筒および内円筒の半径をそれぞれ R_{out}, R_{in} とする。この二円筒の半径比 α と 離心率 ϵ を次のように定義する。

$$\alpha = \frac{R_{in}}{R_{out}}, \quad (1)$$

$$\epsilon = \frac{d}{R_{out} - R_{in}}. \quad (2)$$

α および ϵ は、0と1の間の値をとるパラメータである。

二円筒間の環状の領域に、非圧縮性粘性流体を配置する。二円筒は交互に周期的な回転を行い、それによって円筒間の流体は運動を行う。ここで、外円筒および内円筒の回転の量を表すパラメータとして、 T_{out}, T_{in} を導入する。これらは、1周期の時間 T での外円筒および内円筒の回転数を表す。例えば、 $T_{out} = 1.0$ ならば、1周期の時間で外円筒がちょうど反時計回りの方向に 2π の角度だけ回転することを表している。また、二円筒の回転角速度を $\Omega_{out}(t), \Omega_{in}(t)$ と表す。ここで t は時間を表す。二円筒は交互に周期的な回転をするので、 $\Omega_{out}(t), \Omega_{in}(t)$ は例えば図2のような形をした関数である。

軸方向に関して速度場の変化がないものと仮定する。このとき、流れ関数 $\psi(x_1, x_2, t)$ を用いて、2次元流の速度 \mathbf{u} の (x_1, x_2) 方向成分 (u_1, u_2) を、

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (3)$$

のように定めることができる。ここで、円筒の回転角速度およびその時間変化が小さいと仮定すると、粘性の効果に対して流体の慣性の効果を見捨てることのできる。既

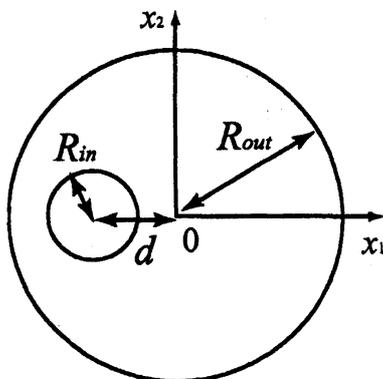


図 1: 偏心二円筒

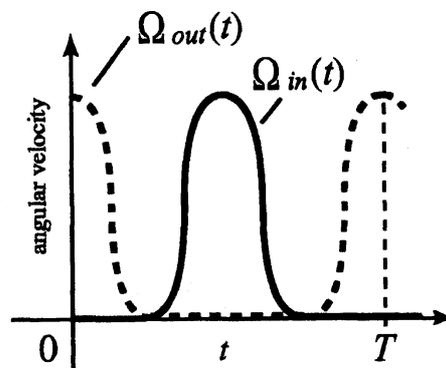


図 2: $\Omega_{out}(t), \Omega_{in}(t)$ の例

にある研究によると、このような仮定の下で、流れ関数 ψ が解析的に与えられることが知られている^[1]。 ψ の具体的な形はここでは省略する。流体粒子の位置 (x_1, x_2) の時間変化は、

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (4)$$

で示される連立常微分方程式の初期値問題の解として、数値計算により求めることができる。数値積分には、Runge-Kutta-Verner 5,6 階法を用い、 10^{-14} の精度で計算を行った。

半径比 α 、離心率 ϵ 、外円筒および内円筒の回転数 T_{out}, T_{in} は、流体粒子の運動を特徴付ける重要なパラメータである。本研究においては、特に断らない限り、 $\alpha = 0.3, \epsilon = 0.4$ に固定しておく。さらに、長さおよび時間は、それぞれ R_{out} および T で無次元化したものを用いる。

3 安定多様体・不安定多様体の構造と混合効率

3.1 ポアンカレプロット

ポアンカレプロットを用いることで、2次元周期流による流体の長時間における混合の性質を調べることができる。ポアンカレプロットは、流れ領域内に置いた比較的少数の流体粒子の、長時間にわたる軌跡を計算し、1周期ごとの位置をすべて重ね合わせて表示することで得られる。本研究では外円筒が1周期分のちょうど半分だけ回転した時刻でプロットを行う。図3は、 $T_{out} = 1.0, T_{in} = 1.0$ に固定し、(a) $\epsilon = 0.4$ および (b) $\epsilon = 0.6$ の際のポアンカレプロットを示している。対称軸上に20個の流体粒子を置き、1000周期に渡って動かした。

図を見ると、異なった振る舞いを示す2種類の粒子が存在することが確認できる。片方の粒子は、流体領域内で閉曲線を形成するように動く。一般的に、このような粒子によって占められる領域のことを規則領域と呼び、この領域中の粒子はそれぞれ決まった1つの閉曲線上だけを規則正しく動くため、規則領域内では流体の混合は効率よく進まない。図では、(a)の外円筒近く、および(b)の内円筒の右側に規則領域が存在していることが分かる。また、一方では、流体領域内を不規則に動く存在する粒子が確認できる。これらの粒子によって占められる領域はカオス領域と呼ばれ、この中の粒子はこの領域内をくまなく運動する。このため、カオス領域内では流体の混合が効率よく進むことが期待される。さらに、この2種類の領域の間では、互いに粒子の移動は起こらない。つまり、カオス領域に置かれた粒子は決して規則領域に入り込むことはなく、規則領域に置かれた粒子は常に規則領域にとどまったままである。ゆえに、規則領域とカオス領域とが共存した状況では、混合の効率はよくないといえる。以上のように、ポアンカレプロットでは、系の大域的な混合の様子を知ることができる。しかしながら、ポアンカレプロットによる方法には、短時間における混合の効率を調べ

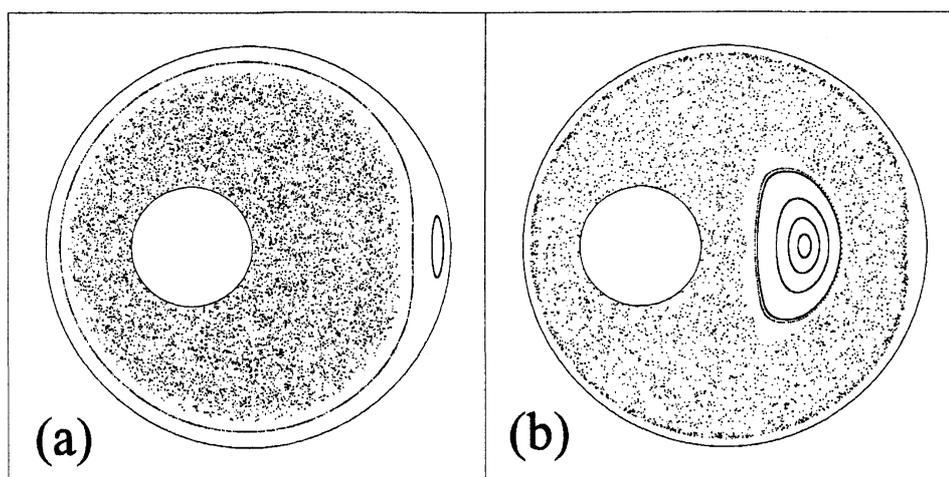


図 3: ポアンカレプロット $T_{out} = 1.0, T_{in} = 1.0$, (a) $\epsilon = 0.4$, (b) $\epsilon = 0.6$

ることができないという欠点がある。実際の混合装置においては、短時間での混合の効率も重要な点であり、それゆえ、ポアンカレプロットでは混合の効率を十分に表現し切れていない。

なお、以下では、流れ領域のほぼ全域がカオス領域となるようなパラメータを選んで調べる。

3.2 ポアンカレ写像の周期点とその安定多様体・不安定多様体

流れ領域内に置かれた流体粒子の位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ から、その粒子の1周期後の位置への写像を考える。この写像をポアンカレ写像と呼び、 $f(\boldsymbol{x})$ と書く。この写像によって、2次元の時間離散的な力学系を定めることができる。写像 f の周期点は、以下の方程式の解として定義される。

$$f^n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}. \quad (5)$$

ここで、 $f^n(\boldsymbol{x})$ とは、写像 f を n 回繰り返すことを意味する。ある点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p$ が、 $n = m$ において式 (5) の解となり、かつ、すべての $n < m$ において解とならないとき、点 \boldsymbol{x}_p を f の m 周期点と呼ぶ。特に1周期点のことを固定点とも呼ぶ。流れ領域内の様々な点を初期点とする Newton 法によって、これらの周期点を探索することができる。

次に、ある点 \boldsymbol{x} に対して、 n 周期におけるヤコビ行列 $\Phi_n(\boldsymbol{x})$ を以下の式を満たすような 2×2 の行列として定義する。

$$d\boldsymbol{x}(n) = \Phi_n \cdot d\boldsymbol{x}(0). \quad (6)$$

ここで、 $d\boldsymbol{x}(0)$ は初期時刻における流体の微小線要素を表し、 $d\boldsymbol{x}(n)$ はその n 周期後を表す。流体の非圧縮性より $\text{div} \boldsymbol{u} = 0$ が言えるので、 $\det \Phi_n = 1$ が成り立つ。従っ

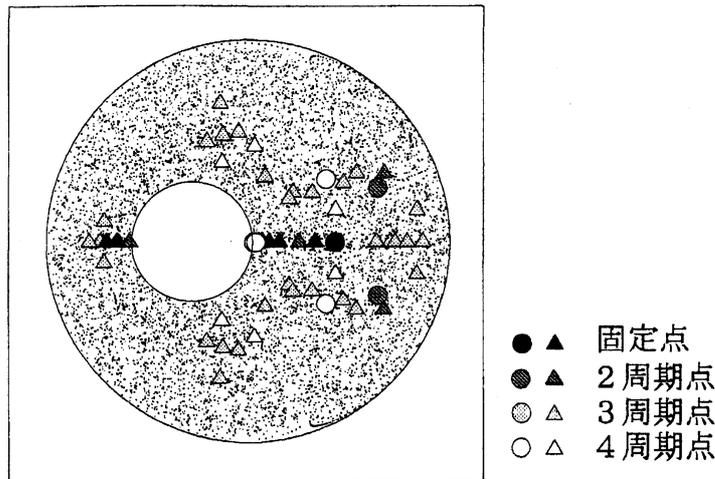


図 4: 4 周期までの周期点 $T_{out} = 1.0, T_{in} = 6.0$

て、ヤコビ行列 $\Phi_n(\mathbf{x})$ の固有値を $\lambda_{n,u}, \lambda_{n,s}$ と書くと、(ただし、 $|\lambda_{n,s}| \leq 1 \leq |\lambda_{n,u}|$ とする) これらの間には $\lambda_{n,u}\lambda_{n,s} = 1$ の関係が成立することが言える。また、固有値 $\lambda_{n,u}$ と $\lambda_{n,s}$ に対応する単位長さの固有ベクトルを、それぞれ、 $\mathbf{v}_{n,u}$ と $\mathbf{v}_{n,s}$ とする。

各周期点は、その点におけるヤコビ行列 $\Phi_m(\mathbf{x}_p)$ の固有値 $\lambda_{m,u}, \lambda_{m,s}$ によって、安定(楕円型)周期点および不安定(双曲型)周期点に分類することができる。これらの固有値が互いに共役な複素数である場合、 $|\lambda_{m,s}| = |\lambda_{m,u}| = 1$ が言えるので、 \mathbf{x}_p は安定である。 \mathbf{x}_p 近くの流体粒子は、写像 f^m を繰り返し作用させると、 \mathbf{x}_p の周りで閉曲線を描くように振る舞う。一方、これらの固有値が互いに異なる実数である場合、 $|\lambda_{m,u}| > 1$ が言え、従って \mathbf{x}_p は不安定である。ここで $\mathbf{v}_{m,s}$ および $\mathbf{v}_{m,u}$ の方向を、それぞれ、安定方向、不安定方向と呼ぶ。 \mathbf{x}_p 近くの流体粒子は、写像 f^m を繰り返すことで、双曲線を描くように動く。この流体粒子は安定方向に沿って \mathbf{x}_p へ近づき、不安定方向に沿って \mathbf{x}_p から離れていく。また \mathbf{x}_p 近くの流体は、 m 周期後に、安定方向に沿って $|\lambda_{m,s}|$ 倍に押し縮められ、不安定方向に沿って $|\lambda_{m,u}|$ 倍に引き伸ばされる。一般に、流体が強い引き伸ばしを受けるということは効率のよい混合のために利点となると期待される。従って、大きな $|\lambda_{m,u}|$ を持つ不安定周期点が存在するような状況では、混合が速やかに進むと考えられる。

図 4 は、パラメータが $T_{out} = 1.0, T_{in} = 6.0$ の場合に対して求めた、4 周期までの周期点である。円が安定周期点、三角形が不安定周期点を表している。図にはポアンカレプロットを重ねて表示している。図によると、安定周期点に比べて不安定周期点の方がずっと多く、不安定周期点は流れ領域の比較的広い範囲に散らばって存在していることが分かる。

次に、不安定 m 周期点から求められる安定多様体・不安定多様体を定義する。安定多様体 W^s および不安定多様体 W^u は、以下の式で定義される。

$$W^s = \{ \mathbf{x} : \lim_{l \rightarrow \infty} f^{lm}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_p \}, \quad (7)$$

$$W^u = \{x : \lim_{l \rightarrow \infty} f^{-lm}(x) = x_p\}. \quad (8)$$

W^s 上から出発した流体粒子は、写像 f^m を繰り返すことによって、漸近的に x_p へ近づく。また同様に、 W^u 上から出発した流体粒子は、写像 f^{-m} のもとで漸近的に x_p へ近づく。 W^u を計算するためには、 x_p を中心とする小円上に多数の流体粒子を配置し、隣り合う流体粒子間に適当な補間を行いながら写像 f^m を繰り返すことで、近似的に得ることができる。 W^s についても同様に、小円上の多数の流体粒子に写像 f^{-m} を繰り返すことで計算することが可能である。ここで、 W^s および W^u は無限長の集合であるため、上記の方法はその一部分のみを求めることになる。そこで x_p を中心とする小円の半径を δ 、写像 f^{-m} および f^m の繰り返した回数を k と表し、 W^s と W^u の一部として $S_{k,\delta}$ と $U_{k,\delta}$ を定義する。ここで k は m の倍数となるようにする。 $S_{k,\delta}$ 、 $U_{k,\delta}$ は、それぞれ k 周期後、 $-k$ 周期後に、 x_p を中心とする半径 δ の円の内部に入り込むような集合である。

図5に、図4と同じパラメータに対して求めた $S_{k,\delta}$ および $U_{k,\delta}$ の例を示す。 $k = 4, \delta = 1 \times 10^{-4}$ である。図中の四角形は、 $S_{k,\delta}$ および $U_{k,\delta}$ の基となる固定点の位置を示している。図を見れば分かるように、 $S_{k,\delta}$ は $U_{k,\delta}$ を上下反転させた形を示している。これは、逆写像 f^{-1} が、両円筒を f の場合と逆の方向に回転させることによって得られるためである。また、図6には、四角形で示した様々な周期点に対して求めた $S_{k,\delta}$ を示している。この図での周期点はすべて固定点である。十分大きな k に対して、これらの $S_{k,\delta}$ の構造は互いによく似ている。従って、以下では、1周期あたりの引き伸ばしの倍率 $|\lambda_{m,u}|^{1/m}$ が最も大きい x_p のみに対して $S_{k,\delta}$ を求めることにする。

不安定固定点 x_p の近くでの円形の流体要素の振る舞いを、図7に示す。この流体要素は、 x_p に基づく W^s 上にその中心がある。図に示すように、写像を繰り返すことで、流体要素は W^u に沿って引き伸ばされ、 W^s に沿う方向に押し縮められながら x_p に近づく。このように、 $|\lambda_{m,u}|^{1/m}$ の比較的大きな不安定 m 周期点の、比較的小きな k に対する $S_{k,\delta}$ に沿った領域では、流体要素は短い時間の間に強い引き伸ばしを受けることが期待される。このことを確認するために、異なる初期位置から出発した流体の小塊の変形の様子を計算した。結果を図8に示す。図8(a)と(c)は、 $k = 4, \delta = 1 \times 10^{-4}$ に対する $S_{k,\delta}$ の上に、小塊の初期位置を四角形で示している。初期の小塊は半径0.001の円形である。その4周期後の姿をそれぞれ図8(b)と(d)に示した。図を見ると、 $S_{k,\delta}$ の近くである(a)から出発した小塊の方が、4周期後により強い引き伸ばしを受けていることが分かる。

3.3 最大有限時間リアプノフ指数と $S_{k,\delta}$ の密度分布

上で述べた関係をより定量的に調べるために、この節では、最大有限時間リアプノフ指数の分布を計算し、 $S_{k,\delta}$ の分布との比較を行う。最大有限時間リアプノフ指数は、流れ領域内の任意の点において定められる。各点に対し、微小線分を様々な方向に配置したときの、 n 周期での最大の引き伸ばし率を Λ_n と書く。 Λ_n は、 n 周期における

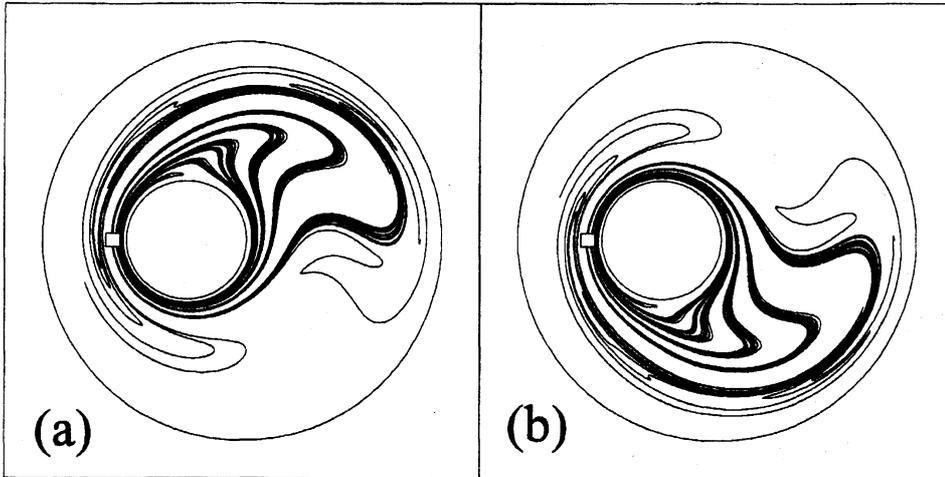


図 5: $S_{k,\delta}, U_{k,\delta}$ の例 $T_{out} = 1.0, T_{in} = 6.0, k = 4, \delta = 1 \times 10^{-4}$

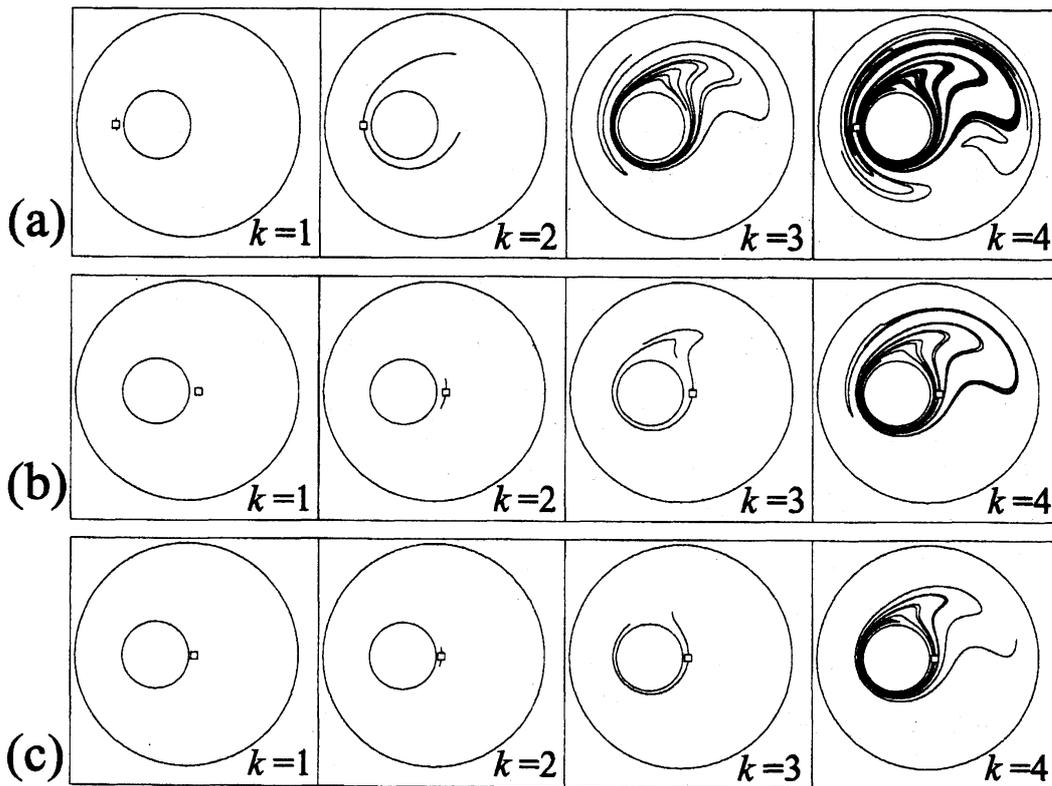


図 6: 様々な周期点に対する $S_{k,\delta}$ $T_{out} = 1.0, T_{in} = 6.0, \delta = 1 \times 10^{-4}$

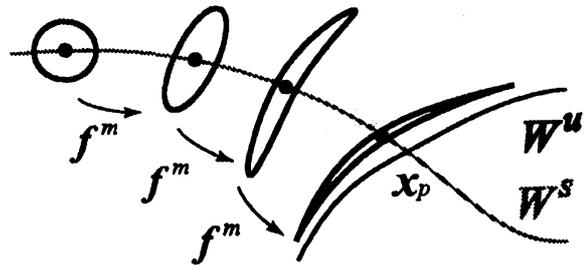


図 7: x_p 近くでの流体粒子の振る舞い

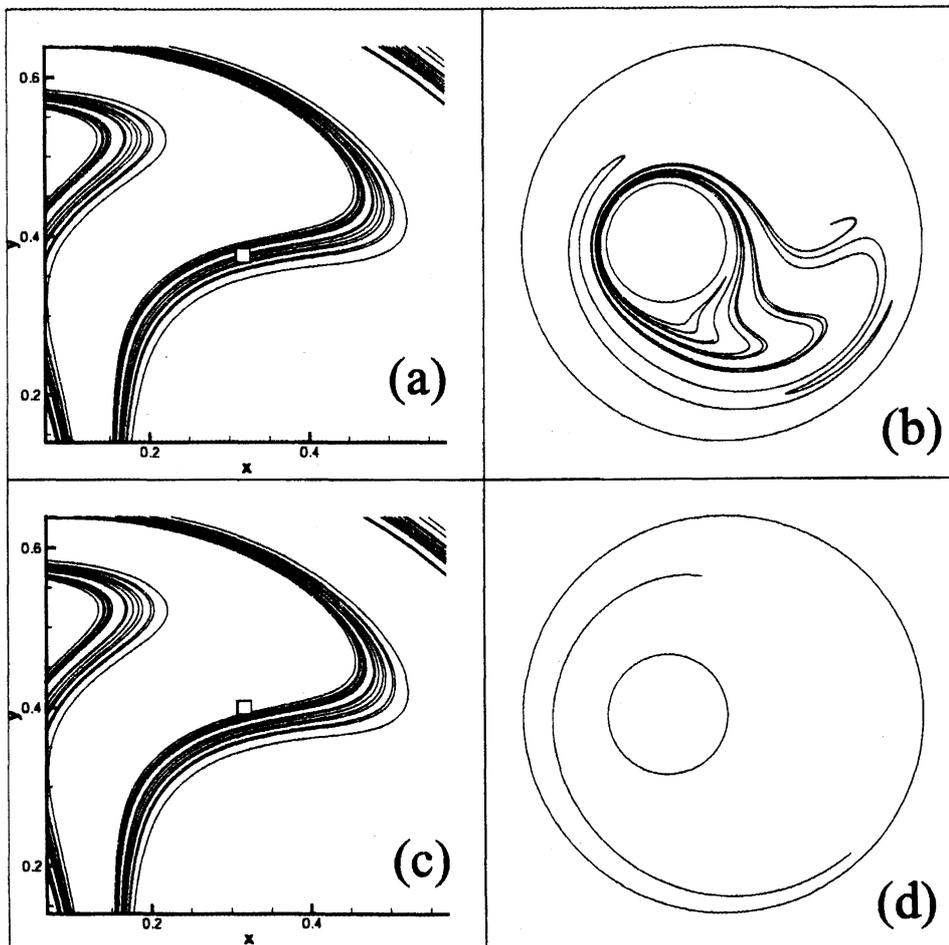


図 8: 流体の小塊のシミュレーション $T_{out} = 1.0, T_{in} = 6.0$

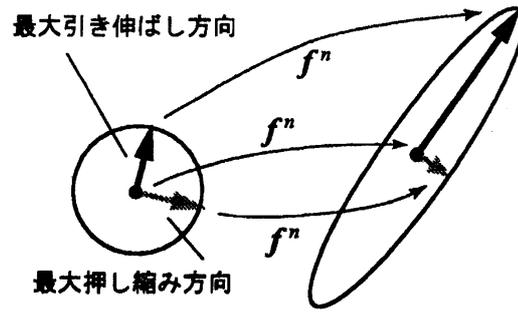


図 9: 最大引き伸ばし方向と最大押し縮み方向

ヤコビ行列 Φ_n を用いて計算することができ、Cauchy-Green テンソル $C_n = \Phi_n^T \Phi_n$ の固有値の大きい方の平方根に等しい。最大の引き伸ばし率を示す方向 (最大引き伸ばし方向) は、この固有値に対応する C_n の固有ベクトルの方向に等しい。(図 9 を参照。) また、 C_n のもう一方の固有ベクトルの方向を最大押し縮み方向と呼ぶ。この方向は n 周期で微小線分の長さが最も短くなるような方向であり、最大引き伸ばし方向と直角をなす。その押し縮みの倍率は $1/\Lambda_n$ で与えられる。最大引き伸ばし率 Λ_n を用いて、 n 周期における最大有限時間リアプノフ指数 $\mu_{n,max}$ は、以下のように定義される。

$$\mu_{n,max} = \frac{1}{n} \ln \Lambda_n. \quad (9)$$

つまり、最大有限時間リアプノフ指数 $\mu_{n,max}$ は、1 周期あたりでの線要素の最大引き伸ばし率に対応する値である。

流れ領域内の様々な点に対して計算した $\mu_{n,max}$ の値を、図 10 に示す。図を見ると、 n が大きくなるにつれて、 $\mu_{n,max}$ の最大値が小さくなる傾向にあることがわかる。また、 n が大きくなるにつれて、 $\mu_{n,max}$ の値の大きな箇所の分布が、図 6 に示した $S_{k,\delta}$ のよく通過する箇所の分布に近くなっていることが分かる。

上記の対応をより定量的に検証するために、 $S_{k,\delta}$ の密度分布を考える。なお以下では $k = 4$ に固定する。 $S_{k,\delta}$ の密度分布は、流れ領域を多数のセル (小領域) に分割し、各小領域に対し $S_{k,\delta}$ の通過する頻度を計算することで得られる。以下にその手順を示す。

1. 流れ領域を $N_c = 28000$ 個のセルに分割する。
2. i 番目のセルに対し、 $S_{k,\delta}$ を構成する曲線が何回通過するかを数え、それを T_i とする。
3. i 番目のセルに対する $S_{k,\delta}$ の密度分布 F_i を、以下のように計算する。

$$F_i = T_i / \sum_{j=1}^{N_c} T_j. \quad (10)$$

図 11 は、様々な δ に対する $S_{k,\delta}$ の密度分布を示している。図を見ると、十分大きな δ に対し、 $S_{k,\delta}$ の密度分布が互いによく似ていることが分かる。

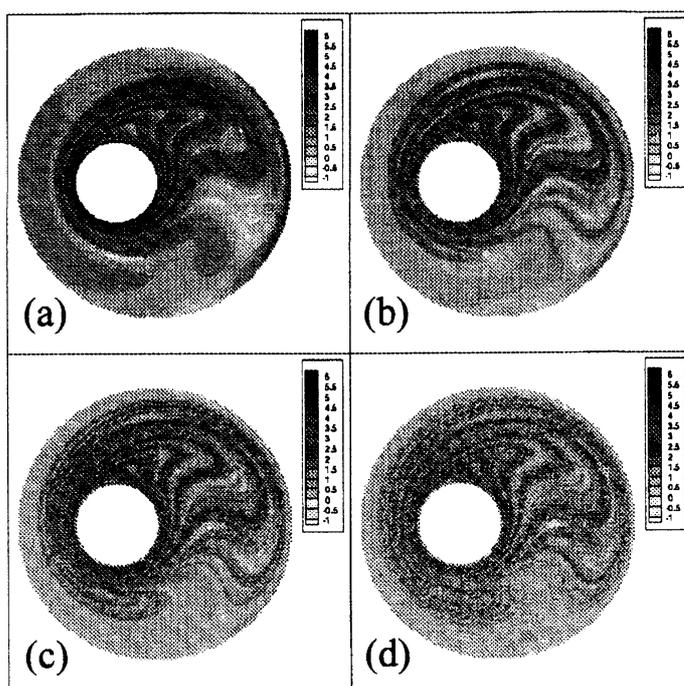


図 10: 最大有限時間リアプノフ指数 $\mu_{n,max}$
 (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$

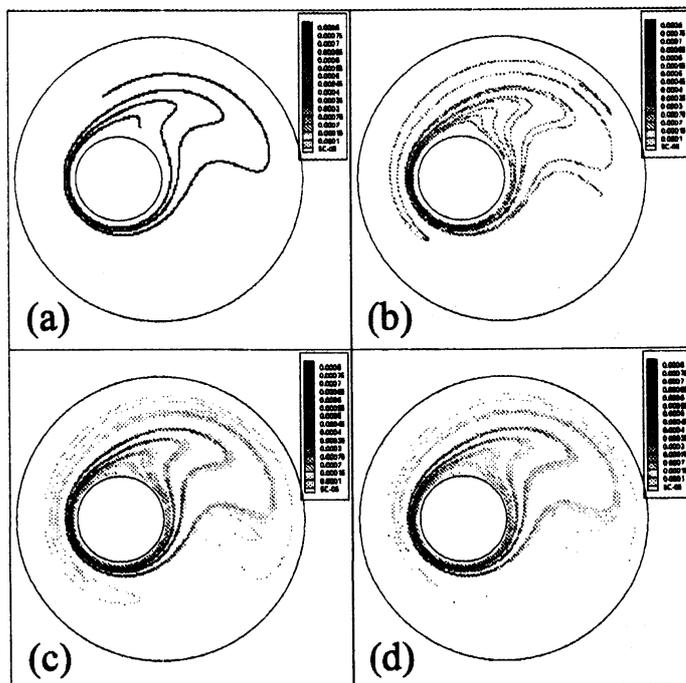


図 11: $S_{k,\delta}$ の密度分布
 (a) $\delta = 5 \times 10^{-7}$, (b) $\delta = 5 \times 10^{-6}$, (c) $\delta = 5 \times 10^{-5}$, (d) $\delta = 5 \times 10^{-4}$

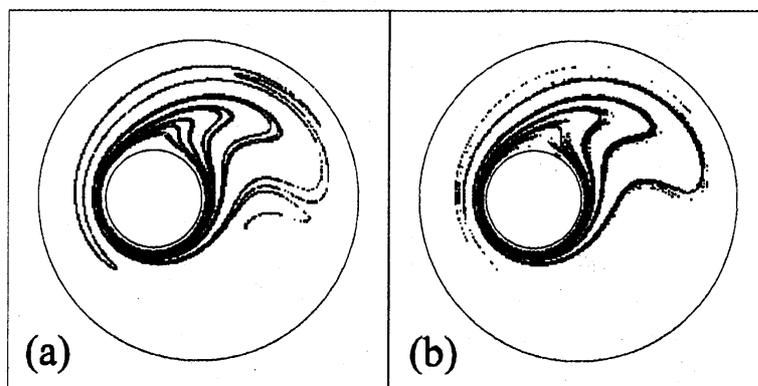


図 12: F_i の値の大きなセル (a) $\delta = 1 \times 10^{-5}$, (b) $\delta = 5 \times 10^{-4}$

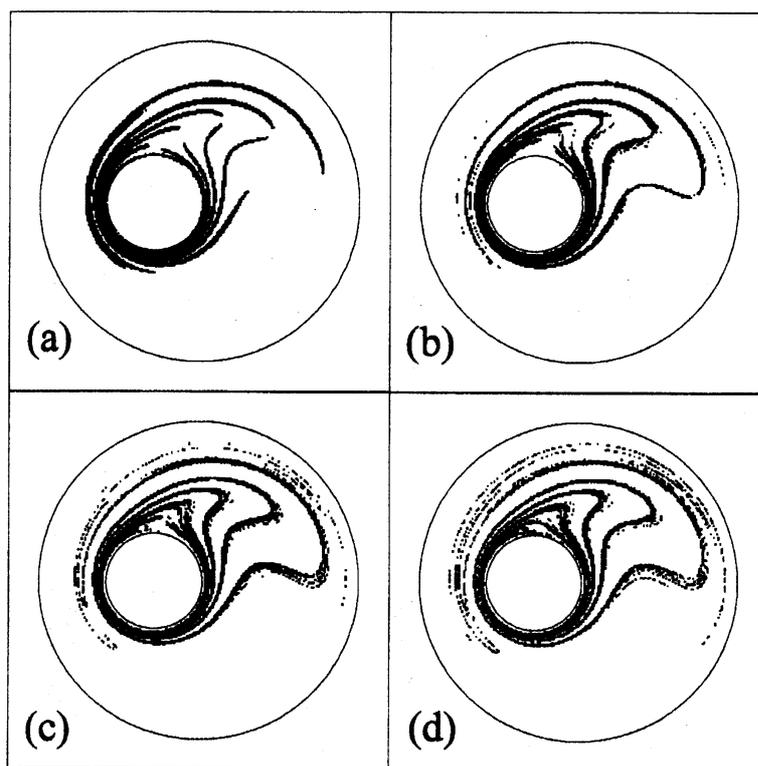


図 13: L_i の値の大きなセル (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$, (d) $n = 4$

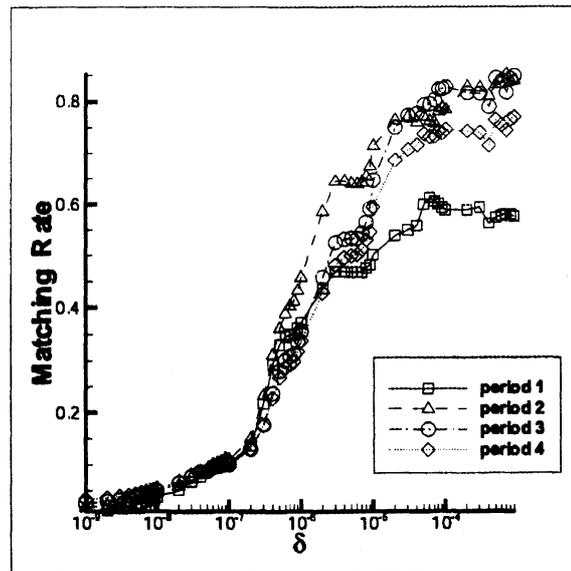


図 14: F_i と L_i の一致率

次に、上で定めた各セルにおいて、セル内のいくつかの点で $\mu_{n,max}$ を計算する。そして i 番目のセルに対し、これらの $\mu_{n,max}$ の値の平均を取ったものを L_i と呼ぶ。図 12、13 は、このようにして計算した F_i と L_i のうち、それぞれ値の大きな約 10% のセルを示している。2 程度より大きな n に対し、図 13 で示したセルの分布は互いに似ており、また F_i の値の大きいセルの分布にもよく似ていることが分かる。これらの分布の対応関係を定量的に調べるために、図 12 と図 13 の両方において選択されたセルの個数を数える。そして図 12 で示したセルの個数のうち、そのようなセルの個数の割合を一致率と定義する。図 14 は、様々な δ に対して得られる $S_{k,\delta}$ の密度分布と、4 周期までの $\mu_{n,max}$ の分布から計算した一致率を示したものである。 $\mu_{n,max}$ の周期が 2 以上のとき、十分大きな δ に対して一致率が高い値を示している。つまり十分大きな δ に対し、 $S_{k,\delta}$ の分布密度の高い箇所と、2 以上の n に対する $\mu_{n,max}$ の値の大きい箇所とがよく一致しているということを意味する。

以上の結果を確認するために、3 つの異なる位置から出発した流体の小塊の、1~4 周期後の位置のシミュレーション結果を図 15 に示す。図 15 の左側には小塊の初期位置が四角形で示されており、 $k=4, \delta=1 \times 10^{-4}$ に対する $S_{k,\delta}$ を重ねて表示している。3 つのシミュレーションのうち、(a) で示した小塊は、3 つの中で最も F_i の値の高いセルに初期配置した。また (c) は、3 つの中で最も F_i の値の低いセルに初期配置した。図を見ると、流体の受ける引き伸ばしの強さと $S_{k,\delta}$ の分布密度がよく対応していることが分かる。以上より、十分な長さの $S_{k,\delta}$ が求められたならば、その分布密度の高い領域を求めることで、流体粒子が強い引き伸ばしを受けるような場所を見積もることができると言える。

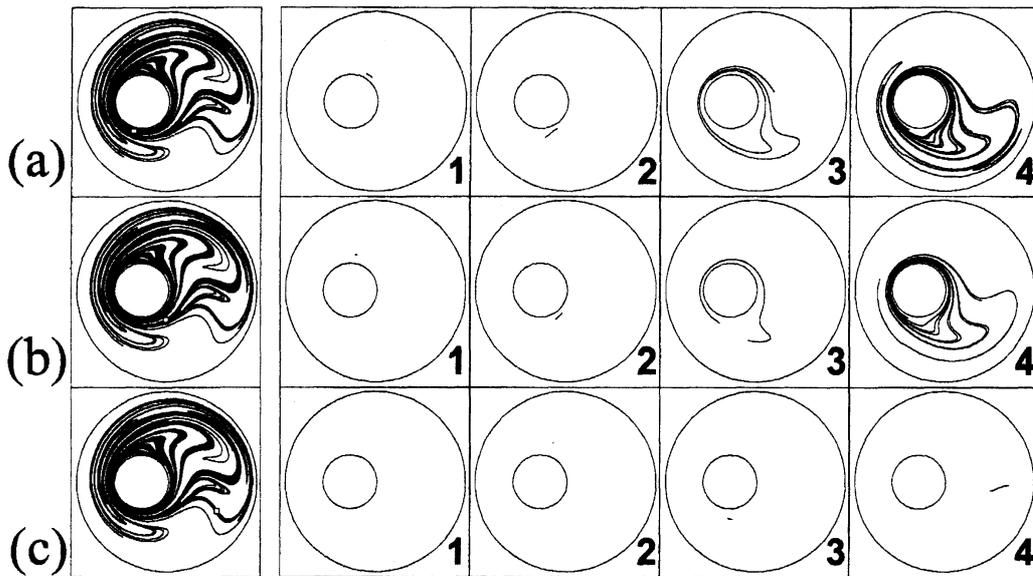


図 15: 流体の小塊のシミュレーション

4 物質線の時間発展

この章では、流れ領域内に置かれた物質線の時間発展について述べる。数値計算による結果に基づき、物質線の引き伸ばし率と曲率との間の関連性について調べる。また、安定多様体・不安定多様体の形状と、流体要素の変形と引き伸ばしとの関連性についても調べる。

4.1 物質線の時間発展を決める方程式

以下の式で表現されるような、流れ領域内の物質線 (例:2 流体の境界線) を考える。

$$\mathbf{r} = (x_1(q, t), x_2(q, t)). \quad (11)$$

ここで q は、物質線に沿った無次元弧長パラメータである。このとき、物質線の接ベクトルは、 $\mathbf{l} = \partial \mathbf{r} / \partial q$ で与えられる。また、 \mathbf{l} の q に関する微分を、 \mathbf{l}' と書く。物質線の曲率ベクトル \mathbf{k} は、以下で定義される。

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{l}'}{|\mathbf{l}|^3}. \quad (12)$$

\mathbf{l} および \mathbf{l}' を求めるには、以下の式

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (13)$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (14)$$

$$\frac{d\mathbf{l}'}{dt} = (\mathbf{l}' \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{l} \mathbf{l} : \nabla \nabla \mathbf{u}, \quad (15)$$

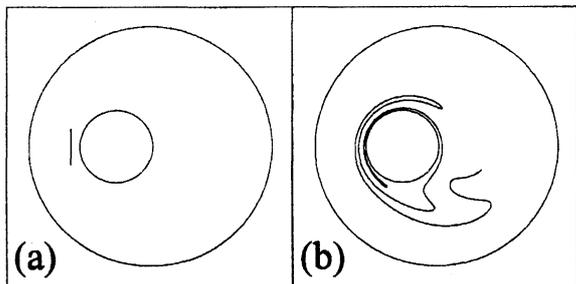


図 16: (a) 物質線の初期位置 (b) 3 周期後

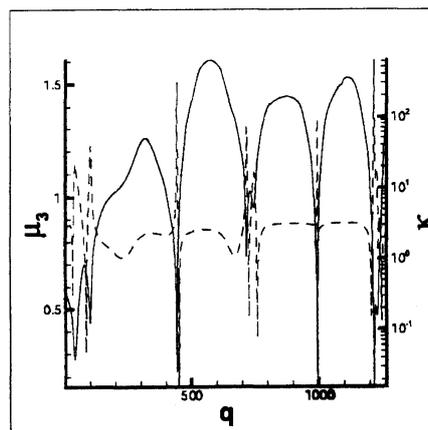


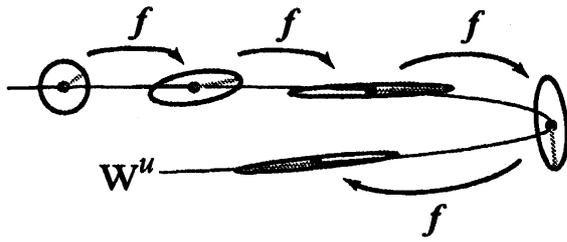
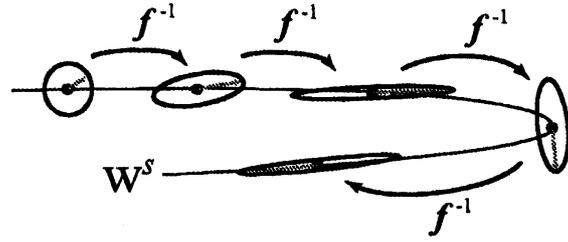
図 17: μ_3 と κ の関係

を $t=0$ から任意の時間まで数値積分することで得られ、さらにそこから曲率 $\kappa = |k|$ を計算することができる。ここで、式 (15) の右辺第 2 項の第 i 成分は、 $(ll : \nabla \nabla u)_i = \sum_{j,k=1}^2 l_j l_k \partial u_i / \partial x_j \partial x_k$ である。さらに、上記の数値積分の際に l の初期値を単位ベクトルとして $t=0$ から $t=n$ まで計算すれば、 n 周期での物質線の微小要素の引き伸ばし率および有限時間リアプノフ指数 μ_n は、それぞれ、 $|l|$ および $\mu_n = \frac{1}{n} \ln |l|$ から計算することができる。

4.2 流体要素の変形と W^s, W^u の曲率

物質線の時間発展の例を図 16 に示す。パラメータは $T_{out} = 1.0, T_{in} = 1.0$ である。物質線は多数の点の集合で近似している。隣り合う点の間隔が 0.01 以上になった際に新しい点の補間を行った。図を見ると、3 周期の後で物質線の形状は、 W^u の形状に近くなるのが分かる。また、物質線の各微小線要素に対して、3 周期での有限時間リアプノフ指数 μ_3 と曲率 κ の関係を図 17 に示す。図 17 において、実線は μ_3 、破線は κ を示している。図を見ると、 μ_3 が極小値をとる位置と、 κ が極大値をとる箇所との間に、よい対応関係があることがわかる。このような振る舞いは他の研究においても知られている^[3]。このことはつまり、物質線が折れ曲がって曲率が大きくなったとき、物質線は極めて小さい引き伸ばししか受けないか、あるいは押し縮められるということを意味している。

以上で述べた、物質線の曲率の大きな箇所で引き伸ばしが小さいこと、および物質線が漸近的に W^u の形状を示すという 2 つのことから考えると、次のことが予想される。つまり、写像 f のもとで W^u の曲率の大きな箇所に入り込んだ流体要素は、 W^u に垂直な方向に引き伸ばしを受けると予想される。通常、流れ領域の多くを占める W^u の曲率の小さな箇所においては、流体要素は W^u に沿った方向に引き伸ばしを受ける。しかし、 f のもとで流体要素が W^u の曲率の大きな箇所に入り込んだとすると、この流体要素は、この写像の間で W^u と垂直な方向に引き伸ばされてしまうことになる。

図 18: W^u 上の流体要素の振る舞い図 19: W^s 上の流体要素の振る舞い

(図 18 を参照) つまり、 W^u の曲率の大きな箇所において、流体要素の引き伸ばしの効率が一時的に悪くなる可以说ができる。

また、逆写像 f^{-1} を考えることにより、上記の推測を安定多様体 W^s に対しても同様に用いることが可能である。 W^s の曲率と正の時間での引き伸ばしの関係は、 W^u と負の時間での引き伸ばしの関係と同様であるため、上記の議論の W^u および f を、それぞれ W^s および f^{-1} で置き換えることができる。従って、 f^{-1} のもとで流体要素が W^s の曲率の大きな箇所に入り込んだとすると、この流体要素は、この写像の間で W^u と垂直な方向に引き伸ばされてしまうことになる。(図 19 を参照) さらに、このことを正の時間の向きでとらえ直すならば、 W^s の曲率の大きな箇所から流体要素が f のもとで出発するとき、この流体要素は W^s に平行な方向に引き伸ばしを受けることになる。この方向は、流れ領域の多くを占める W^s の曲率の小さい箇所では受ける引き伸ばしの方向とは垂直な方向である。

図 20 は、3つの異なる位置から出発した円形の流体要素のシミュレーション結果である。これらの流体要素は図の黒線で示されており、その中心は $S_{k,\delta}$ ($k=4, \delta=5 \times 10^{-6}$) 上にある。 $S_{k,\delta}$ は図の灰色の線で示されている。また、3つのシミュレーション図のうち、(a) は初期時刻において $S_{k,\delta}$ の曲率の大きい箇所に配置しており、(b) および (c) は曲率の小さい箇所に配置している。各周期に対し3つの図は同じスケールで表示してある。1周期後の図を見ると、(a) の流体要素は他の (b) および (c) と比較して、それほど引き伸ばしが小さいわけではない。しかし、このとき (a) の流体要素は、その中心を通過する $S_{k,\delta}$ とほとんど平行な方向を向いており、次の2回目の写像の後には3つの中で最も引き伸ばしが悪くなっている。しかし、この2回目の写像における最大引き伸ばし率は、(a)、(b)、(c) でほとんど同じである。従って、 W^s の曲率の大きい箇所から出発した流体要素に対しては、1回目の写像で受けた引き伸ばしの方向と、2回目の写像で受けた引き伸ばしの方向とが一致せず、引き伸ばしの効果が相殺されてしまう結果となる。つまり、このことにより引き伸ばしの効率が減少する。

以上より次のことが言える。 f のもとで、流体要素が W^s の曲率の大きな箇所から出発したとき、あるいは W^u の曲率の大きな箇所に入り込んだとき、この流体要素は次の写像で、好ましくない方向に引き伸ばされることになる。従って、このような箇所は、短時間での効率のよい混合を図る上で初期位置としてふさわしくない場所である可以说ができる。これは、混合装置の中に液滴状の添加剤を注入し、短時間で混合させるような状況に応用できる可能性がある。液滴を注入する初期位置としてふ

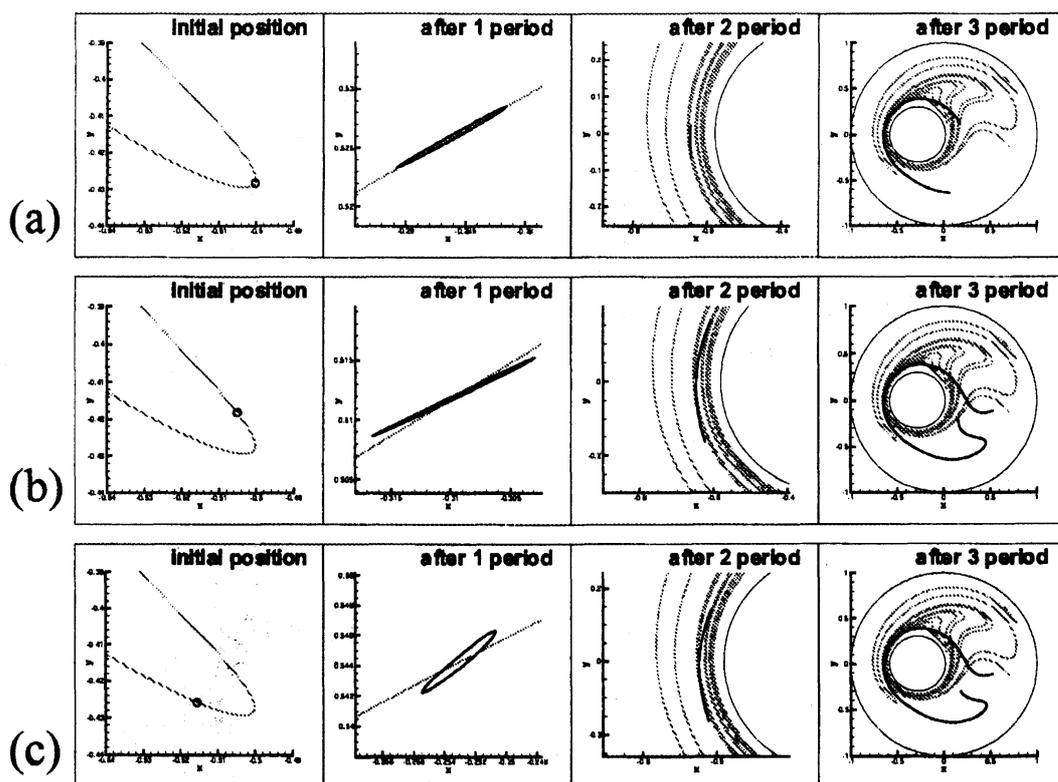


図 20: 流体要素のシミュレーション

さわしくない場所に関する情報は、混合装置を設計する上で利点となるかもしれない。

流れ領域の中からそのような箇所を抜き出すために、 W^u および W^s の曲率場を計算する。まず流れ領域に一樣に多数の流体の微小線要素を配置する。各位置で微小線要素は、十分大きな周期における最大引き伸ばし方向を向いている。各線要素に対して式(13),(14),(15)を数値積分し、線要素の曲率を得る。適当な周期の後で、この曲率の値は、その終わりの位置の近傍を通過する W^u の曲率の値を近似的に与えることが知られている^[4]。従って、この曲率の値を各線要素の終わりの位置にプロットすることで W^u の曲率場を構成することができる。また、 W^u と W^s の対称性より、 W^s に対する同様の曲率場は W^u の曲率場を上下反転させることにより求めることが可能である。図 21(a) はこのようにして得られた W^u の曲率場を示している。また、図 21(b) は W^s の曲率場の中で特に曲率の大きな箇所 ($\kappa > 100$) を抜き出して表示したものである。同様に図 21(c) は W^u の曲率の大きな箇所 ($\kappa > 100$) を 1 周期分巻き戻したものを示している。両者を重ね合わせて表示したのが図 21(d) である。この図で示した箇所を、引き伸ばしの効率が悪くなる場所とみなすことができる。

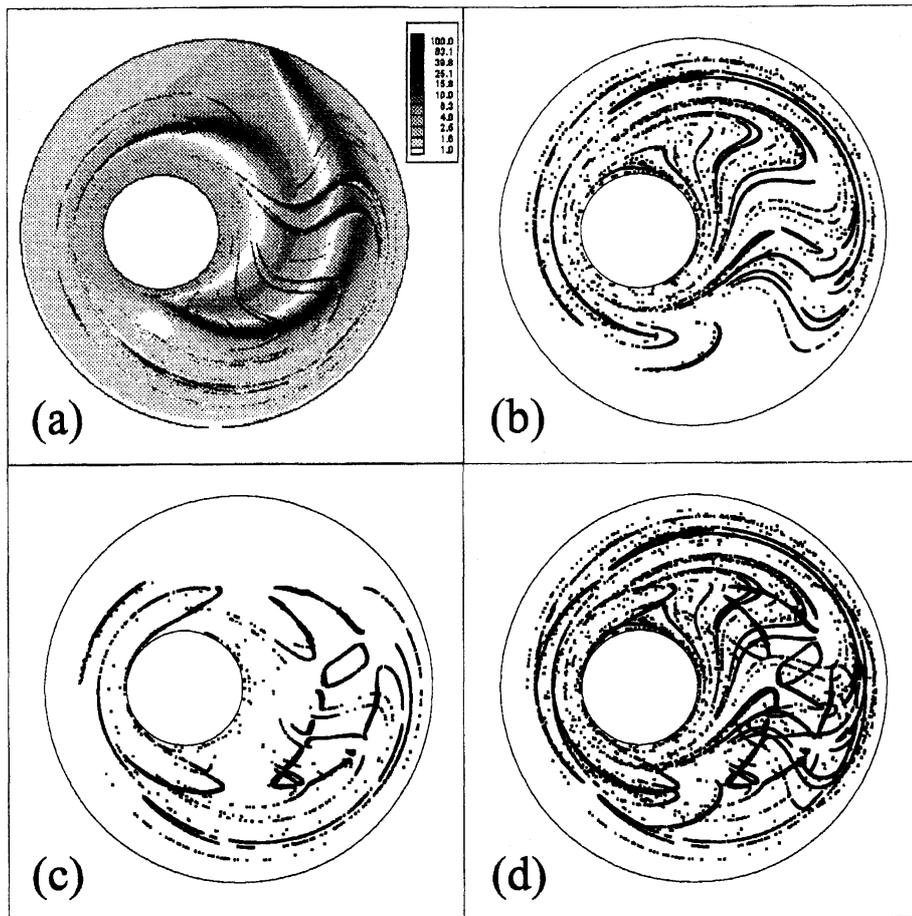


図 21: W^s, W^u の曲率場

5 結論

偏心二円筒間の2次元周期流において、短時間での流体要素の変形、および混合効率の評価法について調べた結果、以下のことが分かった。

- ポアンカレ写像 f の不安定周期点の安定多様体の一部 $S_{k,\delta}$ を調べることにより、 $S_{k,\delta}$ の分布密度の大きな箇所において、流体要素が短時間で効率的な引き伸ばしを受ける。
- 安定多様体 W^s および不安定多様体 W^u の曲率を調べることにより、 W^s の曲率の大きな箇所から出発した流体要素は、その次の写像において W^s に平行な方向に引き伸ばされ、また、 W^u の曲率の大きな箇所に入り込んだ流体要素は、その写像において W^u に垂直な方向に引き伸ばされる。このような写像の間に、引き伸ばしの効率が一時的に悪くなる。

参考文献

- [1] B.Y.Ballal and R.S.Rivlin, "Flow of a Newtonian fluid between eccentric cylinders: inertial effects," *Archs. Rat. Mech. Anal.*, **62** 237-294 (1977).
- [2] J.Chaiken, R.Chevray, M.Tabor and Q.M.Tan, "Experimental study of Lagrangian turbulence in a Stokes flow," *Proc. R. Soc. Lond. A*, **408** 165-174 (1986).
- [3] M.Liu and F.J.Muzzio, "The curvature of material lines in chaotic cavity flows," *Phys. Fluids*, **8** 75-83 (1996).
- [4] S.Cerbelli, J.M.Zalc, F.J.Muzzio, "The evolution of material lines curvature in deterministic chaotic flows," *Chem. Eng. Sci.*, **55** 363-371 (2000).
- [5] J.M.Ottino, "The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport," Cambridge University Press, Cambridge (1986).