数理解析研究所講究録 1407 巻 2004 年 60-62

有限単純群の素数グラフ

熊本大学・自然科学　八牧宏美 (Hiroyoshi Yamaki)†
Dept. of Math., Kumamoto Univ.

G を有限群とする．G の位数を割り切る素数の集合 $\pi(G)$ を頂点集合、相異なる 2 頂点 p, r は位数 pr の巡回群が存在するときに辺で結んで出来るグラフを G の素数グラフと呼び $\Gamma(G)$ で表す．$\Gamma(G) = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cdots \cup \Delta_m$、ただし Δ_i は連結成分とし Δ_i の頂点集合を π_i とする．G が偶数位数のときは $2 \in \pi_1$ とする．もっとも基本的な結果の一つは Williams と Suzuki による次の定理である．

定理 1. G を有限単純群とすると $\Delta_i (i \geq 2)$ は完全グラフとなる．

定理 1 は定理 2 の系である．

定理 2. G を有限単純群とすると孤立巾零ホール π_i- 部分群 $(i \geq 2)$ が存在する．

Williams は有限単純群の分類を用いてこの定理を証明したが、Suzuki によって分類を用いない証明が与えられた．Suzuki の証明の後半部分は Chigira によってかなり改良された．定理 2 の「巾零」は有限単純群の分類を応用すれば「可換」とすることが出来る．すぐに気が付く問題は

問題． G を有限単純群とするとき Δ_1 が完全グラフとなる G を分類せよ．すなわち、全ての連結成分が完全グラフとなる有限単純群を分類せよ．

最近 Lucido-Moghaddamfar はこの問題を分類定理を用いて解決した．Atlas より

補題 1. 散在群で Δ_1 が完全グラフとなるものは $M_{11}, M_{22}, J_1, J_2, J_3, HS$.

交代群 A_n に対しては $n \geq p \geq n/2$ となる素数 p が $n \geq 60$ となると 6 個以上存在することから

補題 2. 交代群 A_n で Δ_1 が完全グラフとなるものは $n = 5, 6, 7, 9, 12, 13$.

ここでは A 型の単純群について Lucido-Moghaddamfar に沿って述べたい．$G = A_n(q) = L_{n+1}(q)$ とする．$|G| = \prod_{i=1}^{n} q^{n(n+1)/2}(q^{i+1}-1)d^{-1}$ である．ただし $d = (n+1, q-1)$ である．G の極大トーラスを T とすれば

$$|T| = \prod_{i=1}^{k}(q^{s_i}-1)$$

ただし $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ は $n+1$ の分割である．整数 x の素因数の集合を $\pi(x)$ で、G の元の位数の集合を $\pi_e(G)$ であらわす．つぎの Zigmondy の補題が重要である．

†Supported in part by Grant-in-Aid for Scientific Research (C; No.14540034), Japan Society for the Promotion of Science.

補題 3. q, n を自然数で $q \geq 2$, $n \geq 3$ かつ $(q,n) \neq (2,6)$ とする．このとき $\pi(q^n-1)$ の元 q_n で $q_n \notin \pi(q^j-1)$ $(2 \leq j \leq n-1)$ となるものが存在する．

$n \geq 5$ のとき．$\Gamma(G)$ が非連結となるのは次の場合である．ただし p は 5 以上の素数．π_1 は次の通りである．q が偶数ならば、$A_{p-1}(q)$, $p \geq 5$, $\pi_1 = \pi(2\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-1))$ あるいは $A_p(q)$, $(q-1)|(p+1)$, $\pi_1 = \pi(2(q^{p+1}-1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-1))$．$q$ が奇数ならば、$A_{p-1}(q)$, $\pi_1 = \pi(q\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-1))$ あるいは $A_p(q)$, $(q-1)|(p+1)$, $\pi_1 = \pi(q(q^{p+1}-1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-1))$．$q_t$ を Zigmondy の補題の性質を満たす q^t-1 を割る素数とする．$q_{n-1}, q_{n-2} \in \pi_1$ となる．$(q,n) \neq (2,7),(2,8)$ とする．Δ_1 は完全グラフなので $q_{n-1}q_{n-2} \in \pi_e(G)$ のはずである．x を位数が $q_{n-1}q_{n-2}$ となる G の元とすれば x を含む極大トーラスが存在する．しかし $n \geq 5$ ならば $(n-1)+(n-2) \geq n+2$ である．従って x を含む極大トーラスが存在しない．$(q,n) = (2,7),(2,8)$ のときはそれぞれ $31, 17 \in \pi_1$, $73, 127 \in \pi_1$ となって Δ_1 は完全グラフとはならない．

$n=4$ のとき．$q_4, q_3 \in \pi_1$ であるが $q_4q_3 \notin \pi_e(G)$．従って Δ_1 は完全グラフではない．

$n=3$ のとき．$q_4 \in \pi_1$ である．$b \in L_4(p^f)$、$o(b) = q_4$ とする．$a \in L_4(p^f)$, $o(a) = p$, $ab = ba$ とすると、$\pi(<b>) \subseteq \pi(SL_2(q))$．これは $o(b) = q_4$ に矛盾する．従って p と q_4 は辺で結ばれない．すなわち Δ_1 は完全グラフではない．

$n=2$ のとき．$\pi_e(G)$ の極大元の集合を $\mu(G)$ であらわす．$d=(3,q-1)$, $q=p^f$ とする．p が奇素数のとき、

$$\mu(L_3(q)) = \{q-1, p(q-1)/3, (q^2-1)/3, (q^2+q+1)/3\}, \quad d=3$$

$$\mu(L_3(q)) = \{p(q-1), q^2-1, q^2+q+1\}, \quad d=1.$$

$p=2$, $n>2$ のとき、

$$\mu(L_3(q)) = \{4, q-1, 2(q-1)/3, (q^2-1)/3, q^2+q+1)/3\}, \quad d=3$$

$$\mu(L_3(q)) = \{4, 2(q-1), q^2-1, q^2+q+1\}, \quad d=1.$$

q を奇数とする．$\pi_1 = \pi(q)\cup\pi(q+1)\cup\pi(q^2-1)$ より $p \in \pi_1$．任意の $r \in \pi(q+1)$, $r \neq 2$ に対して r は p と結ばれない．従って Δ_1 が完全グラフとなるには $\pi(q+1) = \{2\}$ となることが必要十分である．すなわち $L_3(q)$, $q = 2^k-1$ である．$q = 2^k$ とする．任意の $r \in \pi(2^k+1)$ に対して r は 2 とは結ばれない．従って $L_3(4)$ に限る．

$n=1$ のとき．q が偶数ならば $\pi_1 = \{2\}$．q を奇数とする．$\pi_1 = \pi(q-1)$ または $\pi_1 = \pi(q+1)$ となるので Δ_1 は完全グラフである．

$G = B_n(q) = P\Omega_{2n+1}(q)$, $n \geq 3$ のときは極大トーラスの位数が

$$\prod_{i=1}^{k}(q^{r_i}-1)\prod_{j=1}^{m}(q^{s_j}+1).$$

ただし $\{r_1, r_2, \cdots, r_k, s_1, s_2, \cdots, s_m\}$ は n の分割となることに注意すればよい．

他の型の群も同様にして半単純極大トーラスに注目し補題 3 を用いることによって処理出来る．Lucido-Moghaddamfar の主定理は

定理 3. Δ_1 が完全グラフとなる有限単純群は $A_5, A_6, A_7, A_9, A_{12}, A_{13}$,$L_2(q), q > 3, L_3(q)$, q: Mersenne 素数, $L_3(4)$, $Sz(2^{2m+1}), S_4(q), G_2(3^k), U_3(q)$, q: Fermat 素数, $S_6(2), U_4(2)$, $U_4(3)$, $U_6(2)$, $O_8^+(2)$, ${}^3D_4(2)$, $M_{11}, M_{22}, J_1, J_2, J_3, HS$.

この定理は有限群 G の元の位数の集合 $\pi_e(G)$ から G を決定するとき、あるいは G が可解群となるか否かを判定するとき、に応用できる.