

Lipsman 予想の反例

東京大学・数理科学研究科 吉野 太郎 (Taro Yoshino)
Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

概要

Lipsman はベキ零リー群が線形空間にアフィン変換として作用するとき、その作用が固有であることと (CI) 条件を満たすことが同値であると予想した。しかし、この予想には反例があり、(CI) 条件は固有より真に弱い条件であることが分かった。今回は、この反例とそこから生じた新しい問題、その問題に対する部分的な解答を紹介したい。

1 Introduction

線形空間にアフィン変換として作用するベキ零リー群について、Lipsman は次のように予想した。

Conjecture 1 (Lipsman, 1995). 単連結かつ連結なベキ零リー群 $L \subset \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ が \mathbb{R}^n に自然に作用しているとき、この作用が固有であることと、(CI) 条件を満たすことは同値である。

ここで固有とは Palais[7] によって定義された概念であり、固有な作用は良い振る舞いをする事が知られている。実際、(非コンパクトな) リー群が多様体に作用しているとき、その商空間は一般には Hausdorff にならないが、作用が固有ならば商空間は常に Hausdorff となる。さらに、固有な作用が固定点自由ならば商空間には多様体の構造が自然に入る。

しかし、コンパクト群の作用が常に固有であるのに対し、非コンパクト群の作用が固有であるか否かの判定は一般には難しい。

一方、(CI) 条件は小林俊行 [2] によって定義された概念である。それ自体にさほど意味はないが、固有性に比べて判定が容易であるという利点を持っている。

従って、仮に Lipsman 予想が正しいとすれば (つまり固有と (CI) が同値ならば)、それは作用の固有性の良い判定条件を与えたことになる。

残念なことに最近 Lipsman 予想の反例が見つかり、(CI) は固有よりも真に弱い条件であることが分かった [9]。そこで、新しく次のような問題を考えたい。

問題 A: 「固有 \iff (CI)+ α 」となる α としてどのような条件があるか。

しかし、今のところ条件 α は全く見えていない。そこで、問題 A を考える手掛かりとして、もう少し取り組み易い次のような問題を考える。

問題 A' : どのような条件下で「固有 \iff (CI)」となるか。

今回はこの問題 A' について考えたい。

2 Background

リー群 L が多様体 M に作用しているとき、この作用の固有性と (CI) 条件は次のように定義される。

Definition 2. (1) 作用が固有である。 \iff 次の写像

$$L \times M \rightarrow M \times M, \quad (l, x) \mapsto (lx, x) \quad (1)$$

が *proper* 写像 (コンパクト集合の逆像がコンパクト)。

(2) 作用が (CI) 条件をみたす。 \iff 任意の固定部分群

$$L_x := \{l \in L \mid lx = x\} \quad (x \in M) \quad (2)$$

がコンパクト。

特に、多様体 M が等質空間 G/H と表示でき、 L が G の部分群であるとき、 L と H の間には次のような面白い対称性が表れる。

Proposition 3. 次は同値。

- (1) L の G/H への作用が固有 {(CI), 固定点自由} である。
- (2) H の G/L への作用が固有 {(CI), 固定点自由} である。
- (3) (L, G, H) が固有 {(CI), 固定点自由} である。
- (4) (H, G, L) が固有 {(CI), 固定点自由} である。

ここで、リー群 G とその閉部分群 L, H に対し、三つ組 (L, G, H) が固有 {(CI), 固定点自由} であるとは次のように定義される。

Definition 4. (1) (L, G, H) が固有 $\iff G$ の任意のコンパクト集合 S に対して, $L \cap SHS^{-1}$ がコンパクト.

(2) (L, G, H) が (CI) $\iff G$ の任意の元 g に対して, $L \cap gHg^{-1}$ がコンパクト.

(3) (L, G, H) が固定点自由 $\iff G$ の任意の元 g に対して, $L \cap gHg^{-1}$ が自明 ($\{e\}$ に等しい).

Definition 4 の対称性から, Proposition 3 の (3),(4) が同値であることは容易に分かる. また, (1),(3) が同値であることは, 直接計算によって確かめられる. これによって (1),(2) が同値であるという作用の性質に関する対称性も分かる. また, 三つ組 (L, G, H) に関する固有性, (CI) 条件, 固定点自由性について, 次の基本的性質が成り立つ.

Proposition 5. (1) (L, G, H) が固有 $\implies (L, G, H)$ は (CI) 条件を満たす.

(2) (L, G, H) が固定点自由 $\implies (L, G, H)$ は (CI) 条件を満たす.

(3) L または H がコンパクトのとき (L, G, H) は常に固有である.

(4) G が単連結かつ連結なベキ零リ一群のとき,
 (L, G, H) が (CI) 条件を満たす $\iff (L, G, H)$ が固定点自由.

3 Lipsman's conjecture

これらの記号を使って, Conjecture 1 を言い替えてみる. $N(n)$ を n 次の上三角行列全体のなすベキ零リ一群とする. $L \subset \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ が単連結かつ連結なベキ零リ一群ならば, 適当に基底を取り直すことで, $L \subset N(n) \times \mathbb{R}^n$ とできる. 従って, Conjecture 1 は次のように言うこともできる.

$G := N(n) \times \mathbb{R}^n$ とその部分群 $H := N(n), L \subset G$ に対し,

問題 P_n : (L, G, H) が固有 $\iff (L, G, H)$ が (CI)

となるか?

一般に “固有 \implies (CI)” であるから, この問題の non-trivial な部分は “(CI) \implies 固有” である. さらに, Proposition 5 より, (CI) は固定点自由と言い替えてもよい.

P_2 は小林[1], P_3 はLipsman[5], P_4 は[8]により真であることが示されている。しかし, P_5 には反例が存在する[9]。この反例は次の節で構成する。 $N(5) \times \mathbb{R}^5$ は, $N(n) \times \mathbb{R}^n$ ($n \geq 5$)に自然に埋め込めることから, 結局 P_n ($n \geq 5$)は偽であることが分かる。

従って, この側面からの問題 A' への一つの解答は, 「 P_n ($n \leq 4$)は真, それ以上は偽」となる。

問題 A' に対する別の切り口として, 次のような問題を考えることもできる。

G を単連結で連結な k -step ベキ零リ一群としたとき, その連結閉部分群 $L, H \subset G$ に対して,

問題 Q_k :

$$(L, G, H) \text{ が固有} \iff (L, G, H) \text{ が (CI)}$$

となるか?

問題 P_n では G, H を指定しているが, Q_k では G がベキ零であることにのみ要請している。

Q_2 は Nasrin は [6] により真であることが示されている。

ベキ零リ一群 $N(n) \times \mathbb{R}^n$ は, n -step ベキ零であるから, 一般に

$$Q_n \Rightarrow P_n \quad (3)$$

が成り立つ。

従って, P_5 の反例はそのまま Q_5 の反例でもある。また, この反例を少しいじることで Q_4 の反例も作ることができる。つまり Q_k ($k \geq 4$)は偽である。最後に残った命題は Q_3 である。この Q_3 が真であることは Section 6 で述べる。

以上をまとめると, 問題 A' に対して現在得られている解答は次のようになる。

固有と (CI) は同値か?

P_n	
$n = 2$	YES
$n = 3$	YES
$n = 4$	YES
$n \geq 5$	NO

Q_k	
$k = 2$	YES
$k = 3$	YES
$k \geq 4$	NO

4 A counterexample to Lipsman's conjecture (P_5)

この節では, P_5 の反例を構成する. より具体的には $V = \mathbb{R}^5$, $G := N(5) \ltimes V$, $H := N(5)$ とし, G の部分群 $L \subset G$ で, (L, G, H) が (CI) 条件を満たすが, 固有とならない例を作る. \mathfrak{g} を G のリー環とし, \mathfrak{g} の元 X, Y を次のようにとる.

$$X := \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad Y := \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

このとき, X と Y は可換であり, \mathfrak{g} の部分環 \mathfrak{l} と, G の閉部分群 L を次のように定めることができる.

$$\mathfrak{l} := \{aX + bY \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad L := \{\exp(aX + bY) \mid a, b \in \mathbb{R}\}. \quad (4)$$

このとき,

1. (L, G, H) は (CI).
2. (L, G, H) は固有でない.

1 は直接計算により得られる. また, 2 は,

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e \\ f \end{pmatrix} \mid e = \pm\sqrt{3}, \quad -2\sqrt{3} \leq f \leq 0 \right\} \quad (5)$$

とおけば,

$$L \cap SHS^{-1} \quad (6)$$

は非コンパクトになり, (L, G, H) が固有でないことが分かる.

実際, (6) は非有界集合

$$\{l(a) = s_1(a)h(a)s_2^{-1}(a) \mid a \geq 1\} \quad (7)$$

を含んでいる. 但し, ここで

$$l(a) := \exp(aX - \frac{a^2}{2\sqrt{3}}Y),$$

$$s_1(a) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{a} \end{pmatrix}, \quad s_2(a) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{a} \end{pmatrix},$$

$$h(a) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^2}{2\sqrt{3}} \\ & 1 & a & \frac{1}{2}a^2 & \frac{1}{6}a^3 \\ & & 1 & a & \frac{1}{2}a^2 \\ & & & 1 & a \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

である.

5 A counterexample to Q_4

次に Q_4 の反例を作る. 記号は前の節と同じものを用いる. G のリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}(5) \times V$ の部分空間, \mathfrak{g}' を

$$\mathfrak{g}' := \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y \oplus V \quad (8)$$

で定義する. X と Y は可換であり, V は \mathfrak{g} のイデアルであることから, \mathfrak{g}' は \mathfrak{g} の部分リー環である. また, \mathfrak{g}' は 4-step ベキ零であるから, $G' := \exp(\mathfrak{g}')$ とおけば,

1. (L, G', H) は (CI).
2. (L, G', H) は固有でない.

となり, Q_4 の反例が得られる.

6 A solution to Q_3

最後に Q_3 について述べる. 具体的には次の定理が成り立つ.

Theorem 6. G を連結かつ単連結な 3-step ベキ零リー群とし, L, H をその閉部分群としたとき, (L, G, H) が固有 $\iff (L, G, H)$ が (CI)

詳しい証明は省略し, 大まかな方針を紹介する.

non-trivialな部分は, “(CI) \Rightarrow 固有”であるから, 固有でないと仮定して, (CI)でないこと示せばよい. 従って, Proposition 5の(4)より $X \in \mathfrak{l}$, $Y \in \mathfrak{h}$, $t \in G$ で,

$$X = \text{Ad}(t)Y \neq 0 \quad (9)$$

なるものがとれることを示せば十分である事が分かる.

(L, G, H) が固有でないとすると, G のコンパクト集合 S で, $L \cap SHS^{-1}$ がコンパクトにならないものがとれる. そこで, 点列 $X_i \in \mathfrak{l}$, $Y_i \in \mathfrak{h}$, $r_i, s_i \in S$ で,

$$e^{X_i} = e^{r_i} e^{Y_i} e^{-s_i} \in L \cap SHS^{-1}, \quad \|X_i\| \rightarrow \infty (i \rightarrow \infty). \quad (10)$$

となるものを取る事が出来る. Campbell-Hausdorffの公式を利用して(10)を展開した後, うまく変形すると次の式が得られる.

$$X_i = \log(e^{r_i} e^{-s_i}) + \text{Ad}(e^{\frac{1}{2}(r_i + s_i)})Y_i + \frac{1}{24}[X_i + Y_i, [Y_i, X_i]]. \quad (11)$$

ここで, 両辺を $\|X_i\|$ で割り, $i \rightarrow \infty$ とすれば, (9)に近い形が得られるが, このままでは最後の項 $\frac{1}{24}[X_i + Y_i, [Y_i, X_i]]$ が邪魔になる.

そこで, (11)において,

$$X_i \longrightarrow X_i - \frac{1}{24}\phi(X_i, x_i) \quad (12)$$

$$Y_i \longrightarrow Y_i - \frac{1}{24}\phi(Y_i, y_i) \quad (13)$$

$$\frac{1}{2}(r_i + s_i) \longrightarrow \frac{1}{2}(r_i + s_i) + \frac{1}{8}[x_i, y_i] \quad (14)$$

と各項を少しずらす事で, $\frac{1}{24}[X_i + Y_i, [Y_i, X_i]]$ を打ち消すことができ, (9)が得られる. 但し, ここで, x_i, y_i は,

$$X_i - x_i \equiv Y_i - y_i \pmod{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$$

を満たすコンパクト列であり, ϕ は次のように定義されている.

$$\phi(\alpha, \beta) := [2\alpha - \beta, [\alpha, \beta]] \quad (15)$$

参考文献

- [1] T. KOBAYASHI, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. 285 (1989), 249–263.

- [2] T. KOBAYASHI, *Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type*, Proceedings of the Conference on Representation Theory of Lie Groups and Lie Algebras held in 1990 August-September at Fuji- Kawaguchiko (ICM-90 Satellite Conference) (1992), World Scientific, Singapore/ New Jersey/London, 59–75.
- [3] T. KOBAYASHI AND S. NASRIN, *Deformation of properly discontinuous actions of \mathbb{Z}^k on $\mathbb{R}^k + 1$* , preprint.
- [4] T. KOBAYASHI, *Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces*, Mathematics Unlimited-2001 and Beyond, (eds. B. Engquist and W. Schmid), Springer Verlag (2001), 723–747.
- [5] R. LIPSMAN, *Proper actions and a compactness condition*, J. Lie Theory. **5** (1995), 25–39.
- [6] S. NASRIN, *Criterion of proper actions for 2-step nilpotent Lie groups*, Tokyo J. Math. **24** (2001), 535–543.
- [7] R. S. PALAIS, *On the existence of slices for actions of noncompact Lie groups*, Ann. of Math. **73** (1961), 295–323.
- [8] T. YOSHINO, *A solution to Lipsman's conjecture for \mathbb{R}^4* . to appear in International Mathematics Research Notices.
- [9] T. YOSHINO, *A counterexample to Lipsman's conjecture*. (preprint).