数理解析研究所講究録 1411 巻 2005 年 15-24

質量項が異なる Klein-Gordon 方程式系のエネルギー増幅現象と解の爆発

筑波大学 数学系　砂川 秀明 (Hideaki Sunagawa)
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

1 序

質量 $m_j(>0)$ をもつ Klein-Gordon 方程式が非線型項によって連立したシステム

$$(\Box + m_j^2)u_j = F_j(u, u', u''), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ j=1,\cdots,N$$

の, 小さくて滑らかなデータに対する初期値問題を考える. ここで $u=(u_j)_{1\le j\le N}$ は $\mathbb{R}^N$ に値をとる未知函数, $u'=(\partial_{t,x}^{\alpha}u_j)_{|\alpha|=1,1\le j\le N}$, $u''=(\partial_{t,x}^{\alpha}u_j)_{|\alpha|=2,1\le j\le N}$, $\Box=\partial_t^2-\Delta$, 非線型項 F_j は (u,u',u'') に十分滑らかに依存するものとし, 更に次の意味で p 次の非線型項 (但し $p\ge 2$; 整数) であるとする:

$$^{\exists}C>0,\ ^{\exists}\varsigma>0 \ \text{ s.t. } \ \sum_{j=1}^{N}|F_j(u,u',u'')|\le C(|u|+|u'|+|u''|)^p \quad \text{for} \quad |u|+|u'|+|u''|\le\varsigma.$$

以上の設定のもとで解の長時間挙動を考察する. 本稿では特に, $\{F_j\}$ と $\{m_j\}$ の組み合わせ次第で, 初期値がどんなに小さくて滑らかであっても時刻無限大において解はエネルギーノルムの意味で自由解 (非線型項を落として線型化した解) に漸近しないようにできることを, 典型的な場合を例にとって説明したい. また, その応用として解の有限時間爆発に関する結果が得られることも併せて述べたい.

本題に入る前に背景を簡単に整理しておく. Klein-Gordon 方程式を含む非線型波動方程式の解の長時間挙動の研究は 1960 年代から多くの研究者により考察され, これまでに数多くの結果が得られている. 空間次元が高いほど基本解は早く減衰することから, 小さくて滑らかなデータに対する初期値問題を考える限り, 空間次元 d と非線型項の次数 p がある程度大きいとき (Klein-Gordon の場合は $p>1+\frac{2}{d}$ のとき) には, 非線型問題の解は自由解のように振る舞うことが期待され, 実際にそれは概ね正しいことが知られている (例えば [4] の 7 章参照). 従って空間低次元で非線型項の次数が大きくない場合 ($p\le 1+\frac{2}{d}$) に注目することになる. なお, $p>1+\frac{2}{d}$ という制約は, 非常に粗い言い方をすれば, 解の各点での減衰評価とエネルギー評価を組み合わせて先験的評価式を得ようとしたときに現れる積分

$$\int_1^{\infty} t^{-\frac{d(p-1)}{2}}dt \tag{1.1}$$

の収束に関係することを注意しておく. $p \leq 1 + \frac{2}{d}$ の場合には, 期待できる解の減衰が不十分なために状況は複雑になる. 最近の研究 ([1], [11], [7], [2] 等) によって, Klein-Gordon 作用素の質量項がもたらす振動と非線型項が作り出す振動との関係が解の挙動に影響を及ぼすことが明らかになりつつあり, 両者の間にある意味での共鳴が起こらない場合[1] には, 空間低次元で非線型項の次数が大きくない場合であっても非線型問題の解は自由解のように振る舞うことが示されている. では, Klein-Gordon 作用素の質量項がもたらす振動と非線型項が作り出す振動が共鳴する場合には何が起こるのか？その問いに対するひとつの答えが, 以下に論じるエネルギーの増幅や解の有限時間爆発なのである (関連する先行研究として, [6], [8], [9], [3] を挙げておく).

色々な一般化は考えられるだろうが, 本稿では, 次のような極めて具体的な例に話を限定し, このような現象が起こるメカニズムを明らかにすることに重点をおきたい:

$$(E_1) \qquad \begin{cases} (\Box + m_0^2)u_0 = 0, & \\ (\Box + m_j^2)u_j = u_{j-1}^2 \quad (j = 1, \cdots, N), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ (u_j, \partial_t u_j)\big|_{t=0} = (f_j, g_j) \quad (j = 0, 1, \cdots, N), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

但し, f_j, $g_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. 解の存在に関しては, u_0, u_1, u_2, $\cdots$ と順番に解けるから何の問題もない. 我々の興味は $t \to \infty$ における解の振る舞いにある. 主結果は以下の通り：

定理 1. 次の (i)–(ii) を仮定する:

(i) $$m_j = 2m_{j-1} \qquad (j = 1, \cdots, N),$$

(ii) f_0 または g_0 は「恒等的に 0」ではない.

このとき, 定数 $C_1 \geq C_2 > 0$ と $T \geq 1$ が存在して, (E_1) の解について

$$C_1 t^{(2^j-1)/2} \geq \|u_j(t)\|_{E(m_j)} \geq C_2 t^{(2^j-1)/2} \quad \text{for} \quad t \geq T,\ j = 0, 1, \cdots, N$$

が成り立つ. 但し

$$\|w(t)\|_{E(m)} = \left(\frac{1}{2}\int |\partial_t w(t,x)|^2 + |\partial_x w(t,x)|^2 + m^2|w(t,x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

注意 1. 上の定理は, u_j のエネルギーノルムが丁度 $O\big(t^{(2^j-1)/2}\big)$ で増大することを主張している. これより特に, $u_1, \cdots, u_N$ はエネルギーノルムの意味で決して自由解には漸近しないことが分かる[2]. なお, 仮定 (i) が満たされないときはこのようなエネルギー増幅現象

---

[1] (1.1) との対比で言うならば,

$$\int_1^\infty \frac{e^{i\omega t}}{t} dt$$

($\omega \in \mathbb{R}$) のような積分の収束に関係する. つまり, $\omega \neq 0$ に相当する条件下では振動の効果によって非線型項の悪い部分が打ち消しあう.

[2] もし自由解に漸近するならばエネルギーは有限に留まらなくてはならない.

は起こらないということも証明できる (注意5を参照のこと).

定理1の応用として, 非線型 Klein-Gordon 方程式系の解の有限時間爆発に関する以下のような結果を得ることができる. 初期値問題

$$(E_2)\qquad \begin{cases} (\Box + m_0^2)u_0 = 0, & \\ (\Box + m_j^2)u_j = u_{j-1}^2, \quad (j = 1, \cdots, N) & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ (\Box + m_{N+1}^2)u_{N+1} = u_{N+1}^2 + G(u_N, \partial u_N), & \\ (u_j, \partial_t u_j)\big|_{t=0} = (f_j, g_j) \quad (j = 0, \cdots, N+1), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

を考える. 但し $m_j > 0$, f_j, $g_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\partial = (\partial_t, \partial_x)$.

定理 2. $N \geq 2$ とする. 次の仮定 (iii)–(v) の下, (E_2) の時間大域的古典解は**存在しない**:

(iii) $$m_j = 2m_{j-1} \qquad (j = 1, \cdots, N),$$

(iv) f_0 または g_0 は「恒等的に 0」ではない,

(v) ある定数 $c > 0$ が存在し, 任意の $(\phi, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ に対して

$$G(\phi, \psi) \geq c(|\phi|^2 + |\psi|^2).$$

注意 2. 当然, 爆発するのは u_{N+1} だけである. なお, $G \equiv 0$ に相当する単独方程式

$$(\Box + 1)u = u^2, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

は, 十分小さく且つ滑らかな初期値に対して時間大域的古典解を持つことが知られている (例えば [4] の7章参照).

注意 3. 実は, 条件 (v) は $G(\phi, \psi) \geq c|\phi|^2$ に置き換えることができる (注意6を参照のこと).

注意 4. Keel and Tao の論文 [6] の前半でも同じような例が考えられている. しかし, [6] では $m_0 = m_1 = \cdots = m_N = m_{N+1} = 1$ で F が u に関して滑らかではない場合のみが扱われていて, 証明もかなり技巧的である. [6] のアプローチでは, 定理2に相当する主張は得られているが定理1のようなエネルギーノルムの増大評価が得られるかどうかは明らかではないように思われる.

最後に, 定理の証明の方針を要約して本節を終える. 領域 $\{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid t^2 - |x|^2 > 1\}$ において

$$\tau = \sqrt{t^2 - |x|^2}, \qquad z = \tanh^{-1}(x/t)$$

によって変数変換 $(t,x)\mapsto(\tau,z)$ を行い,

$$u_j(t,x)=\frac{v_j(\tau,z)}{\tau^{1/2}}$$

によって新しい未知函数 $v_j(\tau,z)$ を導入すると, 粗く言って

$$(\partial_\tau^2+m_j^2)v_j=\frac{1}{\tau^{1/2}}v_{j-1}^2+(\text{剰余項})$$

のような常微分方程式が満たされる. この $v_j(\tau,z)$ の $\tau\to\infty$ における漸近挙動を調べることで光錐の内部での $u_j(t,x)$ の $t\to\infty$ における振る舞いが分かり, それによって所要の結論が導かれる. なお, $m_j=2m_{j-1}$ という条件と v_j の漸近挙動が関係する理由は, 周期外力による強制振動

$$\ddot{f}+\omega^2 f=\cos\Omega t$$

における共鳴 $(\omega=\Omega)$ との類似と思えば納得しやすいであろう.

2 定理1の証明

本節では5つの段階に分けて定理の証明について述べる. 特に混乱が生じる恐れがない限り, 以下では評価に現れる非負定数にはすべて同じ文字 C を用いる.

第1段

まず最初に適当な変数変換を行って扱いやすい問題に帰着させる.

領域 $\{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\mid t^2-|x|^2>1\}$ において

$$\tau=\sqrt{t^2-|x|^2},\qquad z=\tanh^{-1}(x/t)$$

によって変数変換 $(t,x)\mapsto(\tau,z)$ を行なうと, ダランベルシアンは

$$\square=\tau^{-1/2}L\tau^{1/2}$$

(ここで $\tau^{1/2}$ は掛け算作用素とみなす) と書き換えられる. 但し

$$L=\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\frac{1}{\tau^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{4\tau^2}.$$

次に

$$v_{-1}(\tau,z)\equiv 0,\qquad v_j(\tau,z)=\tau^{1/2}u_j(\tau\cosh z,\tau\sinh z)\quad(j=0,1,\cdots,N)$$

とおくと, もとの方程式系 (E_1) は

$$(L+m_j{}^2)v_j=\frac{1}{\tau^{1/2}}v_{j-1}^2,\quad(\tau,z)\in(1,\infty)\times\mathbb{R};\quad 0\le j\le N \tag{2.1}$$

と書き換えられる.

第2段

次に v_j のエネルギーを上から評価する．そのために

$$\|\phi(\tau)\|_{e(m)} = \left(\int |\partial_\tau \phi(\tau,z)|^2 + \frac{1}{\tau^2}|\partial_z \phi(\tau,z)|^2 + m^2|\phi(\tau,z)|^2 dz\right)^{1/2}.$$

によってノルム $\|\cdot\|_{e(m)}$ を導入する．このとき次が成り立つ：

補題 1. 各 $j \in \{1,\cdots,N\}$ と $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，$\tau \geq 1$ のとき

$$\|\partial_z^l v_j(\tau)\|_{e(m_j)} \leq C\tau^{(2^j-1)/2}$$

が成り立つ．

証明．この補題は，次の3つの式に注意すれば単純な帰納法によって示せる:

$$\frac{d}{d\tau}\|\phi(\tau)\|_{e(m)} \leq \frac{C}{\tau^2}\|\phi(\tau)\|_{e(m)} + C\|(L+m^2)\phi(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_z)},$$

$$\|\phi(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_z)} \leq C\sum_{k=0}^{1}\|\partial_z^k \phi(\tau)\|_{e(m)},$$

$$(L+m^2)\partial_z = \partial_z(L+m^2).$$

これら3つの式の証明は標準的であるから省略する． ∎

第3段

$$\alpha_j(\tau,z) = e^{-im_j\tau}\left(1 + \frac{1}{im_j}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)v_j(\tau,z)$$

とおいて $\alpha_j(\tau,z)$ の挙動を調べる．目標は以下の補題を得ることである．

補題 2. 各 $j \in \{0,1,\cdots,N\}$ に対して，$\tau \to \infty$ のとき $z \in \mathbb{R}$ に関して一様に

(2.2) $$\alpha_j(\tau,z) = c_j\big(\alpha(z)\big)^{2^j}\tau^{2^{j-1}-1/2} + o(\tau^{2^{j-1}-1/2})$$

が成り立つ．ここで，

$$\alpha(z) = \alpha_0(1,z) + \int_1^\infty \frac{e^{-im_0\tau}}{im_0\tau^2}\left(\partial_z^2 - \frac{1}{4}\right)v_0(\tau,z)d\tau.$$

また，c_j は次式により帰納的に定まる0でない複素数である：

$$c_j = \frac{{c_{j-1}}^2}{2(2^j-1)im_j}, \quad c_0 = 1.$$

これを示すために，まず $\alpha_j(\tau, z)$ を上から粗く評価しておく．

補題 3. 各 $j \in \{0, 1, \cdots, N\}$ と $k \in \{0, 1\}$ に対して

$$\|\partial_\tau^k \alpha_j(\tau, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C\tau^{(2^j-1)/2-k}$$

が成り立つ．

補題 3 の証明. $k = 0$ の場合は α_j の定義と補題 1 から直ちに従う．$k = 1$ の場合については，

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial \tau} = \frac{e^{-im_j\tau}}{im_j}(\partial_\tau^2 + {m_j}^2)v_j = \frac{e^{-im_j\tau}}{im_j}\left\{\frac{1}{\tau^{1/2}}(v_{j-1})^2 + \frac{1}{\tau^2}\left(\partial_z^2 - \frac{1}{4}\right)v_j\right\} \tag{2.3}$$

という関係を使えば

$$\begin{aligned}
\|\partial_\tau \alpha_j(\tau, \cdot)\|_{L^\infty} &\leq C\tau^{-1/2}\|v_{j-1}(\tau, \cdot)\|_{L^\infty}^2 + C\tau^{-2}\sum_{l=0}^{2}\|\partial_z^l v_j(\tau, \cdot)\|_{L^\infty} \\
&\leq C\tau^{-1/2}\tau^{2^{j-1}-1} + C\tau^{-2}\tau^{(2^j-1)/2} \\
&\leq C\tau^{(2^j-1)/2-1}
\end{aligned}$$

が成り立つことから分かる． ■

補題 2 の証明. まず最初に

$$(v_{j-1})^2 = \left\{(\alpha_{j-1})^2 e^{i2m_{j-1}\tau} + 2|\alpha_{j-1}|^2 + (\overline{\alpha_{j-1}})^2 e^{-i2m_{j-1}\tau}\right\}/4$$

に注意する．これを (2.3) に代入して整理すると，

(2.4)

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial \tau} = \frac{(\alpha_{j-1})^2 e^{i(2m_{j-1}-m_j)\tau}}{4im_j\tau^{1/2}} + \frac{|\alpha_{j-1}|^2 e^{-im_j\tau}}{2im_j\tau^{1/2}} + \frac{(\overline{\alpha_{j-1}})^2 e^{-i(2m_{j-1}+m_j)\tau}}{4im_j\tau^{1/2}} + \frac{e^{-im_j\tau}}{im_j\tau^2}\left(\partial_z^2 - \frac{1}{4}\right)v_j$$

が成り立つ．ここで，定理 1 の仮定 (i) より右辺第 1 項の e の肩に乗っている $i(2m_{j-1} - m_j)\tau$ は 0 になって振動が消えてしまうが他の項の振動は消えてないことに注目すると

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\alpha_j(\tau, z) - O(\tau^{2^{j-1}-3/2})\right] = \frac{\left(\alpha_{j-1}(\tau, z)\right)^2}{4im_j\tau^{1/2}} + O(\tau^{2^{j-1}-5/2})$$

が得られる[3]．従って，$1 \leq j \leq N$ に対して

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\alpha_j(\tau, z) - \alpha_j(1, z) - \frac{1}{4im_j}\int_1^\tau \left(\alpha_{j-1}(\sigma, z)\right)^2 \sigma^{-1/2} d\sigma\right| \leq C\tau^{2^{j-1}-3/2}. \tag{2.5}$$

[3]恒等式 $\frac{e^{i\omega\tau}f(\tau)}{\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{e^{i\omega\tau}f(\tau)}{i\omega\tau}\right) + \frac{e^{i\omega\tau}f(\tau)}{i\omega\tau^2} - \frac{e^{i\omega\tau}}{i\omega\tau}\frac{\partial f}{\partial\tau}$ において $f = |\alpha_{j-1}|^2$, $\omega = -m_j$ などとして，更にこの右辺に補題 3 を用いる．

一方

$$\left|\partial_\tau \alpha_0(\tau,z)\right| = \frac{1}{m_0\tau^2}\left|\left(\partial_z^2 - \frac{1}{4}\right)v_0(\tau,z)\right| \le C\tau^{-2}$$

より

(2.6) $$\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\alpha_0(\tau,z) - \alpha(z)\right| \le C\tau^{-1}$$

となる. (2.5) と (2.6) から (2.2) が従う. ■

注意 5. $m_j \neq 2m_{j-1}$ のときは右辺のすべての振動が消えないから

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\alpha_j(\tau,z) - O(\tau^{2^{j-1}-3/2})\right] = O(\tau^{2^{j-1}-5/2})$$

となり, (2.5) のかわりに

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}|\alpha_j(\tau,z)| \le C\tau^{\max\{0,2^{j-1}-3/2\}}$$

が成り立つ. 同様にして, すべての j に対して $m_j \neq 2m_{j-1}$, $m_j \neq m_{j-1}$ ならば解は増幅しないことも分かる.

第4段

もとの変数に戻って解 $u_j(t,x)$ の漸近形を導く.

補題 4. K を $\{y\in\mathbb{R}:\ |y|<1\}$ のコンパクト部分集合とする. $t\to\infty$ のとき $y\in K$ に関して一様に

(2.7) $$u_j(t,ty) = \mathrm{Re}\left[a_j(y)e^{im_jt(1-|y|^2)^{1/2}}\right]t^{2^{j-1}-1} + o(t^{2^{j-1}-1}),$$

(2.8) $$\left(\partial_t u_j\right)(t,ty) = \mathrm{Im}\left[m_j\omega_0(y)a_j(y)e^{im_jt(1-|y|^2)^{1/2}}\right]t^{2^{j-1}-1} + o(t^{2^{j-1}-1}),$$

(2.9) $$\left(\partial_x u_j\right)(t,ty) = \mathrm{Im}\left[m_j\omega_1(y)a_j(y)e^{im_jt(1-|y|^2)^{1/2}}\right]t^{2^{j-1}-1} + o(t^{2^{j-1}-1})$$

が成り立つ. ここで

$$a_j(y) = c_j(1-|y|^2)^{(2^{j-1}-1)/2}\left(\alpha\left(\tanh^{-1}(y)\right)\right)^{2^j},$$

$$\omega_0(y) = \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}},\quad \omega_1(y) = \frac{-y}{\sqrt{1-|y|^2}}.$$

証明. まず

$$T_K := \max\{(1-|y|^2)^{-1/2} \mid y \in K\}$$

とおくと, $t > T_K$ のとき

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = ty,\ y \in K\} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid t^2 - |x|^2 > 1\}$$

となることに注意する. $\alpha_j(\tau, z)$ の定義と補題2から

$$\begin{aligned} u_j(t, ty) &= \frac{1}{\tau^{1/2}} \operatorname{Re}\big[\alpha_j(\tau, z) e^{im_j\tau}\big] \\ &= \operatorname{Re}\big[c_j\big(\alpha(z)\big)^{2^j} e^{im_j\tau}\big]\tau^{2^{j-1}-1} + o(\tau^{2^{j-1}-1}) \end{aligned}$$

が成り立つ. 但し $\tau = t(1-|y|^2)^{1/2}$, $z = \tanh^{-1}(y)$, $t > T_K$, $y \in K$. これより (2.7) を得る. 同様に

$$\begin{aligned} (\partial_t u_j)(t, ty) &= \Big((\cosh z)\partial_\tau - \tau^{-1}(\sinh z)\partial_z\Big)\left(\frac{1}{\tau^{1/2}} v_j(\tau, z)\right) \\ &= \frac{\cosh z}{\tau^{1/2}}\partial_\tau v_j(\tau, z) - \frac{\cosh z}{2\tau^{3/2}} v_j(\tau, z) - \frac{\sinh z}{\tau^{3/2}}\partial_z v_j(\tau, z) \\ &= \frac{\cosh z}{\tau^{1/2}} \operatorname{Im}\big[m_j \alpha_j(\tau, z) e^{im_j\tau}\big] + o(\tau^{2^{j-1}-1}) \\ &= \operatorname{Im}\Big[m_j(\cosh z) c_j\big(\alpha(z)\big)^{2^j} e^{im_j\tau}\Big]\tau^{2^{j-1}-1} + o(\tau^{2^{j-1}-1}) \end{aligned}$$

(但し $\tau = t(1-|y|^2)^{1/2}$, $z = \tanh^{-1}(y)$, $t > T_K$, $y \in K$) となり, (2.8) が従う. (2.9) の証明も同様である. ■

第5段

補題4より, $y \in K$, $t \gg 1$ に対して

$$|\partial_t u_j(t, ty)|^2 + |\partial_x u_j(t, ty)|^2 + {m_j}^2 |u_j(t, ty)|^2 \ge {m_j}^2 |a_j(y)|^2 t^{2^j-2} - o(t^{2^j-2})$$

が成り立つから, 十分大きな t に対して

$$\begin{aligned} \|u_j(t)\|_{E(m_j)} &\ge t^{1/2}\left(\int_K |\partial_t u_j(t, ty)|^2 + |\partial_x u_j(t, ty)|^2 + m_j^2 |u_j(t, ty)|^2 dy\right)^{1/2} \\ &\ge m_j \big\|a_j\big\|_{L^2(K)} t^{(2^j-1)/2} - o(t^{(2^j-1)/2}) \\ &\ge \frac{1}{2} m_j \big\|a_j\big\|_{L^2(K)} t^{(2^j-1)/2} \end{aligned}$$

が成り立つ (最後の行で, 仮定 (ii) より $\|a_j\|_{L^2(K)} > 0$ となることを使っている). これで望んでいた評価のうち下からの評価が得られた. 上からの評価はもっと素朴にできるので省略する. ■

3 定理 2 について

定理 2 の示すために補題をひとつ用意する.

補題 6. 関数 $H(t,x)$ はある $\nu > 2, C > 0, T \geq 0, r > 0$ に対して

$$\int_T^t \int_{\mathbb{R}} H(s,x)dxds \geq Ct^\nu \qquad (t \gg T),$$

$$H(t,x) = 0 \qquad (|x| \geq t+r)$$

を満たすとする. また, $f,g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{R}$ とする. このとき,

$$\begin{cases} (\Box + m^2)v = v^2 + H(t,x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ (v, \partial_t v)|_{t=0} = (f,g) \end{cases}$$

に対する時間大域的古典解は存在しない.

この補題を示すには

$$I(t) = \int v(t,x)dx$$

が有限時間で発散することを見ればよい ([5], [6]).

上の補題と定理 1 を組み合わせれば, 定理 2 は直ちに得られる. 実際, $H = G(u_N, \partial u_N)$ とおいて T を十分大きく取ると, 仮定 (v) と定理 1 より

$$\int_T^t \int_{\mathbb{R}} H(s,x)dxds \geq c \int_T^t \|u_N(s,\cdot)\|_{E(m_N)}^2 ds \gtrsim t^{2^N} \qquad (t \gg T)$$

となって補題 6 の仮定が満たされる (但し $N \geq 2$ のとき).

注意 6. 補題 4 を用いると

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |u_N(s,x)|^2 dxds = \infty \tag{3.1}$$

を示せるので, 補題 6 を少し修正することにより, 仮定 (v) を $G(\phi,\psi) \geq c|\phi|^2$ に置き換えても定理 2 と同様の主張が得られる. しかし, (3.1) は u_N の L_x^2-ノルムの増幅を意味している訳ではない (補題 4 から L_x^2-ノルムの増幅は導かれない).

謝辞.

本稿は 2004 年 5 月 13–14 日に京都大学数理解析研究所で行なわれた勉強会「エネルギーの評価から見た波動方程式の研究」で講演させて頂いた内容をまとめたものです. この場を借りて, 主催者の肥田野久二男氏に感謝の意を表します.

References

[1] J.-M. Delort, *Existence globale et comportement asymptotique pour l'équation de Klein-Gordon quasi linéaire à données petites en dimension* 1, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4[e] série **34** (2001), 1–61.

[2] J.-M. Delort, D. Fang and R. Xue, *Global existence of small solutions for quadratic quasilinear Klein-Gordon systems in two space dimensions,* J. Funct. Anal. **211** (2004), 288–323.

[3] D. Fang and R. Xue, *Global existence and asymptotics behavior of solutions for a resonant Klein-Gordon systems in two space dimensions,* preprint, 2003.

[4] L. Hörmander, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations,* Springer Verlag, Berlin, 1997.

[5] T. Kato, *Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations,* Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 501–505.

[6] M. Keel and T. Tao, *Small data blow-up for semilinear Klein-Gordon equations,* Amer. J. Math. **121** (1999), 629–669.

[7] H. Sunagawa, *On global small amplitude solutions to systems of cubic nonlinear Klein-Gordon equations with different mass terms in one space dimension,* J. Differential Equations **192** (2003), 308–325.

[8] H. Sunagawa, *A note on the large time asymptotics for a system of Klein-Gordon equations,* Hokkaido Math. J. **33** (2004), 457–472.

[9] H. Sunagawa, *Large time asymptotics of solutions to nonlinear Klein-Gordon systems,* Osaka J. Math. (to appear).

[10] H. Sunagawa, unpublished work (Osaka Univ. RRM 2003-07).

[11] Y. Tsutsumi, *Stability of constant equilibrium for the Maxwell-Higgs equations,* Funkcial. Ekvac. **46** (2003), 41–62.