

バルハン砂丘群の ネットワーク形成とサイズ分布

Network formation and size distribution of barchan dunes

寺田 昌弘 (Masahiro Terada)

西森 拓 (Hiraku Nishimori)

大阪府立大学大学院 工学研究科

Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University

1 はじめに

日本人が砂丘と聞いて初めに思い浮かべるのは鳥取砂丘が一番多いと思われる。実際、日本には、乾燥地帯にあるような大規模な沙漠地帯に発展する内陸性砂丘は無いが、鳥取砂丘に代表される海岸砂丘や、局所的な河畔砂丘や湖畔砂丘はいたるところに発展している。そして、日本の海岸砂丘や世界の砂丘地帯の周辺では中世から飛砂災害の防止のため、あるいは農地利用のために防砂林などで砂丘の移動・拡大を阻止してきた。その一方で、鳥取砂丘のように砂丘を観光資源とする地域では周辺の植生によって砂丘が徐々に侵食されていくというような深刻な事態も起きている。また、都市利用がなされてきた砂丘地帯における建造物に対しては、外部刺激による地盤の液状化などが問題になっている。このような深刻な砂丘制御問題について、我々は、もっと多くの知識を持つべきだと思われる。

現在では、砂丘研究の主流であった地形学者の観測に基づく定性的研究に加え、非線形物理学者による数理模型を使った定量的研究も本格化してきている。その中でも岩盤の上の乾燥砂層が薄く、1方向からの風が卓越して吹いているような沙漠地帯に存在する三日月型のバルハン砂丘というものが、砂丘研究の格好の対象となっている [1, 2, 3]。バルハンの形成の数理模型として多くのものが提案され改良されてきたが [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]、これらの多くは単独のバルハンの形成過程や移動過程を取り扱ってきたものであり、自立型砂丘^{*1}を考えたものが殆どだった。しかし、これまでの研究で、自立型砂丘は、長時間、安定(定常な形を保持)して存在することが難しいということが判っている。また、バルハンを群れとして扱うのが妥当であると思われる理論研究・実験研究も行われている。

そこで、我々は、今回、各個別のバルハンを孤立した系とは見なさず、成長過程や定常状態に関しても近隣の砂丘と砂のやり取りをしながら相互に影響しあっていると考え、砂丘の相互依存性について探っていくことにした。その結果、数値計算・理論解析(平

*1 本文においては、「自立型砂丘」とは、「孤立した砂丘が自分で粒子を保持しながら定常な形を形成して移動していくような砂丘」の意味

均場近似) ではまだ説明されていなかった [13, 14]、実際の砂丘地帯で見られる「風向きに沿った方向のサイズの一様化」を再現することに成功した。

2 モデル

我々は、まず、バルハン砂丘は三日月型の尖った部分(ホーン)からしか砂の流出がないという観測事実に基づき、三日月型のバルハンを、両端からしか砂の流出のない一本の棒に置き換えたモデル「2次元棒状モデル」を提案する。(図1を図2のように置き換える。)

さらに、一個一個のバルハン(棒状モデル)に対して

- 各砂丘の移動
- 速度の異なる隣接砂丘間の衝突合体
- 砂粒の流れによる近接した砂丘間の相互作用

を考慮して動力学を構成する。

以下、2次元棒状モデルについて話を進める。

前提として、砂丘には風上側から順に番号が割り当てられるものとする。

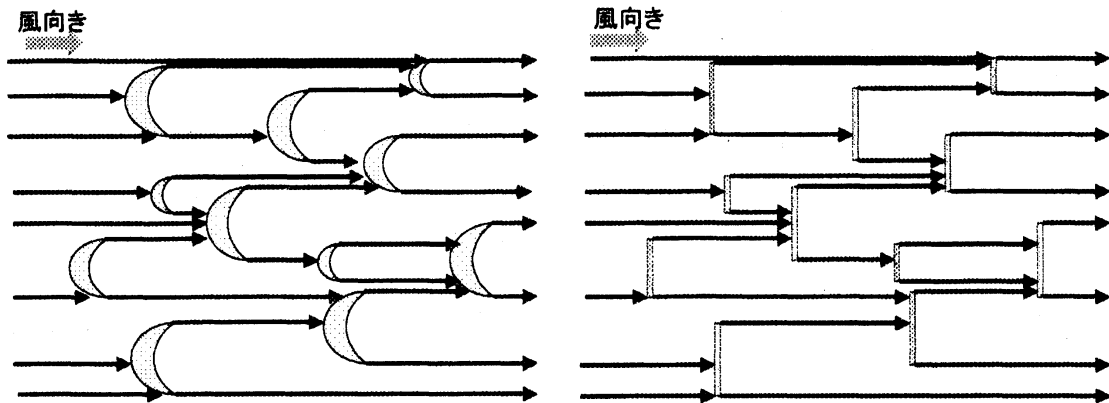


図1 通常のバルハン砂丘

図2 2次元棒状モデル

ただし、図は上から見たもので、図の矢印は砂の流れを表す。

2.1 砂丘の移動

バルハンは高さ(H)に応じた速度(\bar{v})で移動することが知られている。典型的なサイズの砂丘では、おおよそ高さに反比例した速度で移動する。これは各砂丘の質量(H^3)と各砂丘表面を移動する砂の総量(H^2)の比が、おおよそ $1/H$ に比例していることに起因する。今回のモデルでは、いくつかの観測報告をもとに

$$\bar{v}(H) = A + \frac{B}{H+C} \quad (1)$$

という関係を用いる。ここで、 A, B, C は正の定数である。

ここで、バルハン砂丘の概形は大小どれも相似形であり、常に砂丘の高さ (H) と砂丘のサイズ^{*2}(W) が一対一対応していると仮定すると、式 (1) の関係は

$$v(W) = A + \frac{B}{aW + C} \quad (2)$$

のようになる。ただし、 $v(H) = v(W)$ で a は正の定数。

2.2 砂丘の衝突合体

異なる砂丘間の相互作用として i) 衝突合体による直接的な相互作用、ii) 砂の流入流出を通じた間接的なやりとりを考慮する。まず、衝突合体であるが、式 (2) のダイナミクスに従い 2 次元平面状を異なった速度の砂丘が移動する。その際、風上側 (i 番目) の砂丘が風下側 (j 番目) の砂丘に追いつき、かつ、砂丘同士が接触する (砂丘を表す棒が接触する) ときに衝突合体が起こる。このとき、衝突合体前の i 番目の砂丘に含まれる砂の質量を $M_i (i = 1, 2, \dots, N)$ として、

$$\text{砂丘が接触した場合} \quad M_i \leftarrow M_i + M_j \quad (3)$$

という書き換え操作を行う。ただし、左辺は合体後の i 番目の砂丘に含まれる質量である。同時に、衝突合体した砂丘より風下側の砂丘についても番号の付け替え、

$$M_j \leftarrow M_{j+1} \quad (4)$$

を行う。(今、 j 番目の砂丘が合体により消えたため j 番目以降の番号が繰り上がる。)

2.3 異なる砂丘間の砂のやりとり

次に間接的な相互作用であるが、各砂丘は単位時間に頂上の高さに応じた量 $\tilde{J}(H)$ の砂を風下に排出し、この砂は、排出された点から見て風下側にある最初の砂丘によってく吸収されるものとする。また、各砂丘は 2 つのホーンから均等に $\tilde{J}(H)/2$ ずつ砂を排出しているとする。

従って、流れ込んでくる砂の総量と流出量の関係から以下の式が成り立つ。(図 3 参照)

$$\frac{dM_i}{dt} = \sum \tilde{J}(H_k)/2 - \tilde{J}(H_i) \quad (5)$$

ここで、

$$\tilde{J}(H) = (q_0 + \alpha H)(1 - T_E) \quad (6)$$

*2 本文において、「砂丘サイズ」とは、各砂丘におけるホーンの間隔、即ち横幅のことである (2 次元棒状モデルでは棒の長さに相当)。図 3 参照

右側の第一括弧内は、高さ H の砂丘頂上での砂の流量である (q_0 は砂丘のない平らな地面上での砂の流れ。 α は正定数) [7, 10]。第二括弧内の記号 T_E は「捕獲率 (trap efficiency)」と呼ばれるもので、砂丘頂上を通過した砂がその後、同じ砂丘の風下側斜面に捕獲される割合である [1, 7, 9]。十分サイズの大きい砂丘では頂上を通過した砂のほぼ全てが風下側に捕獲され $T_E = 1$ となる。一方で、砂丘が小さくなるにつれて捕獲率は 0 に向かう。この事実を元に今回は $T_E(H) = \frac{1+\tanh(\beta H)}{2}$ (β は正定数) とモデル化した。

また、砂丘の高さと質量は一対一の対応、 $M = \gamma H^2$ (γ は砂粒の空間充填率と砂の密度の積。) になっているものと仮定すると式 (5) の関係は

$$\frac{dM_i}{dt} = \sum J(M_k)/2 - J(M_i) \quad (7)$$

のように書き換えられる。ただし、 $\bar{J}(H_i) = J(M_i)$ であり、観測事実から $M \propto W^{2.4}$ である。また、高さが砂丘として存在しうる下限限界値 H_{MIN} 以下、もしくは質量が下限値 M_{MIN} 以下になった i 番目の砂丘は自動的に、 $i+1$ 番目の砂丘に吸収されることにする。

以上の操作を繰り返し、系の時間発展を見る。

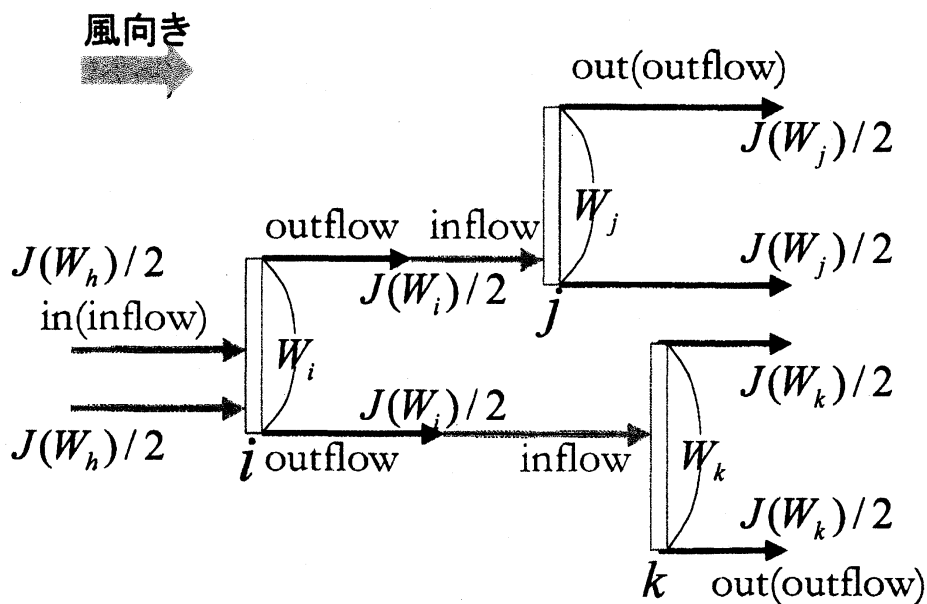


図3 2次元棒状モデルでの砂のやり取りの模式図

3 シミュレーション

上のモデルに従って数値計算を実行した。今回調べたものは、初期条件分布に依存した砂丘群のサイズ分布の時間発展である。初期条件として、下限 W_{min} と上限 W_{max} の間に一様ランダムにサイズ分布した砂丘群を用意し、これらを2次元の硬く侵食ができない地面の上に縦横それぞれ一様ランダムな位置に配置した。そして、風に対して平行な方向と垂直な方向に周期境界条件を用いて、その時間発展を観察・計測した。図4は、その時間発展の様子を示している。

十分時間が経過した後のサイズの分布をみると、定常状態になった。ここで、いつ定常状態になったのかということについて言及しておく、図5より、**timestep150**万回以上で砂丘の数は変化していないので、**timestep170**万回で定常状態に達したとみなしても妥当であると思われる。

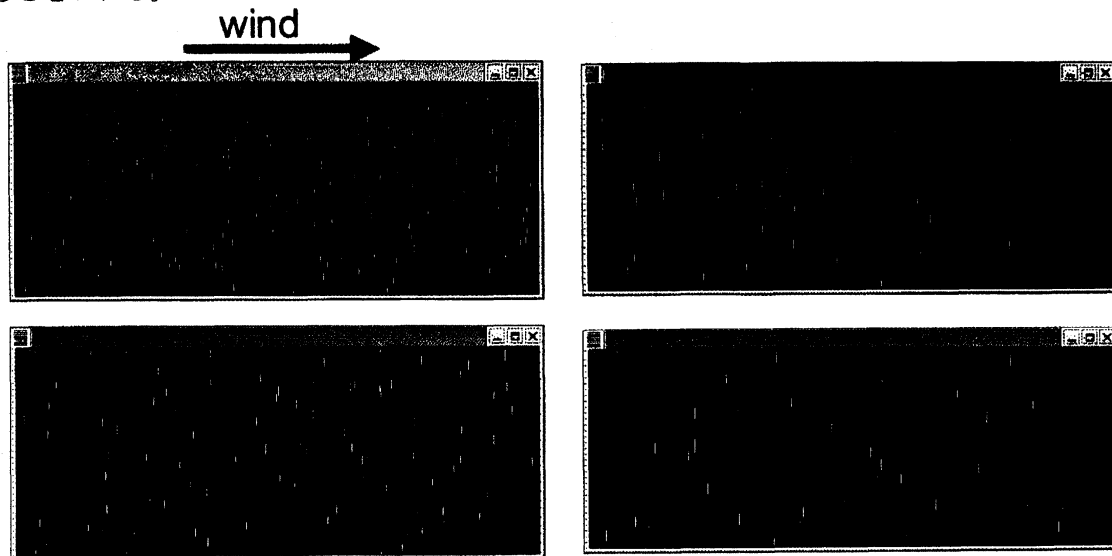


図4 バルハン砂丘の時間発展の様子
左上、左下、右上、右下の順に時間発展している。

4 結果

図6は定常状態に達した時の砂丘の状態である。実線で書かれているのが砂丘であり、それらを繋ぐ細い点線は砂丘が、ある砂丘から流れ出た砂が、どの砂丘に流れ込んでいるかを視覚的に表したものである。実際は、真中にある太い実線より左側が実在している砂丘なのだが、周期境界条件により回り込んで流れる砂を見やすくする為、同じモノを右側に配置した。さらに、砂丘の砂のやり取りによる繋がりを実線で書き、代わりに砂丘を点線に置き換えたものが図7である。注目すべき事柄は、砂丘の繋がりを表す線が系全体に及ばず完全に

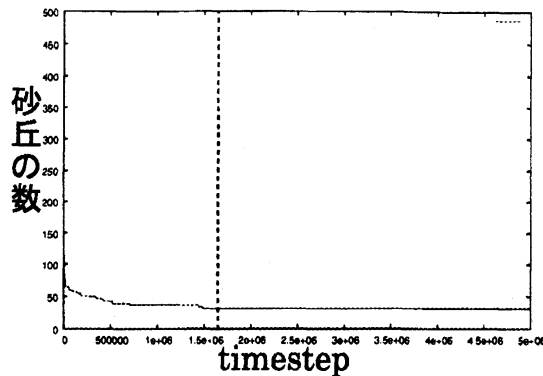


図5 全体の砂丘の数

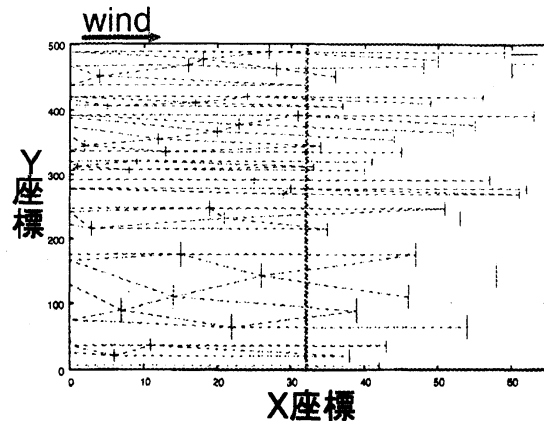


図6 定常状態における砂丘の状態

切れている箇所があるということである。図7の太い実線は、それらの繋がりの切れ目を表している。つまり、この太い実線で区切られた領域の中で砂丘同士は互いに砂をやり取りして繋がっているが、この実線を超えた範囲では互いに影響を与えず独立に存在しているということなのである。

我々は、この実線で区切られた範囲の中での砂丘の繋がりをネットワークと呼ぶことにする。従って、この図の中にあるような砂丘群は、互いに独立な幾つかのネットワークグループから成り立っているということである。

図8は独立したネットワークの数の時間発展を見たもので、先程述べたように定常状態の判定を行った170万回以降は変動がなく、定常状態の指標にもなる。また、150万回以前に見られる振動は、砂丘のネットワークグループが切れたり結合したりしていることを表す。この状態については、図13や図14でも検証できる。(この節の後半に説明。)

次に、図9と図10は、それぞれ質量平均と砂丘サイズ平均の時間推移で170万回以降は一定になっている。これもまた定常状態になったという証拠である。150万回付近における強い揺れは、先程述べた砂丘のネットワークがついたり離れたりしていた状態から完全に分離して、各砂丘ネットワーク内で均一化が起きて再び落ち着く為であると思われる。また、図11と図12は、それぞれ質量分散と砂丘サイズ分散の時間推移であり、定常状態になっても0にならないのは、各砂丘ネットワークグループでは均一化が起きて分散は0になっているが、ネットワークグループ同士では独立なため均一化が起きない為である。しかし、一定になっているのは、定常状態になった証拠である。150万回における大きな振動は先程の平均に関しての揺れの時に述べた内容と同じ理由からである。

最後に、図13と図14は、図7における下から3つ目と4つ目のネットワークグループでの分散の時間発展をそれぞれ表したものである。これを見比べると判るように、120万回

過ぎの時点で、この2つは分離しネットワーク3は均一化し分散が0になるが、ネットワーク4はネットワーク5(図7における下から5個目のネットワーク)と着いたり離れたりを繰り返すため、振動している。そして、150万回過ぎで完全に分離し、均一化する。これは、図8で見た150万回でのネットワークの数の増減をまさに表している。

これらのことから確実に言えるのは、各々のネットワークは互いに独立であるが、その内部ではサイズに関して均一化が進んでいるということである。

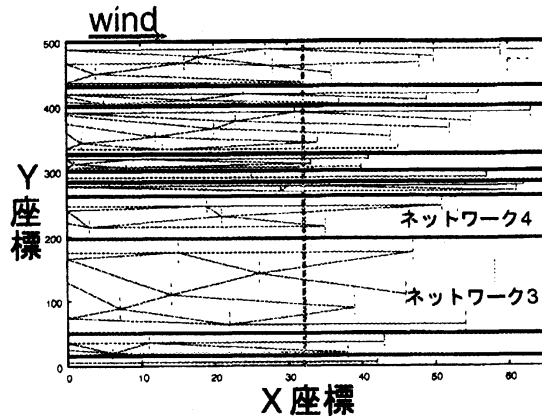


図7 定常状態における砂丘の繋がり

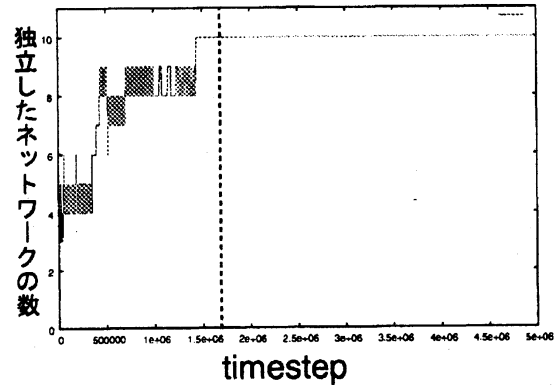


図8 独立したネットワークの数

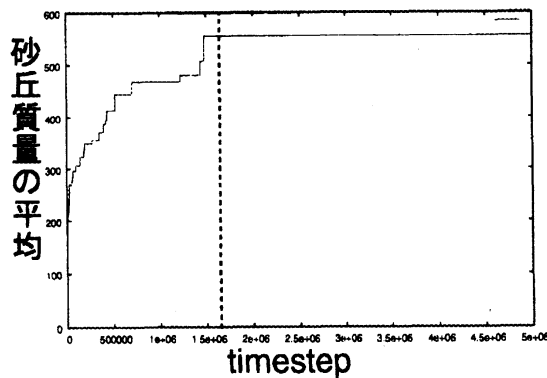


図9 質量平均の時間推移

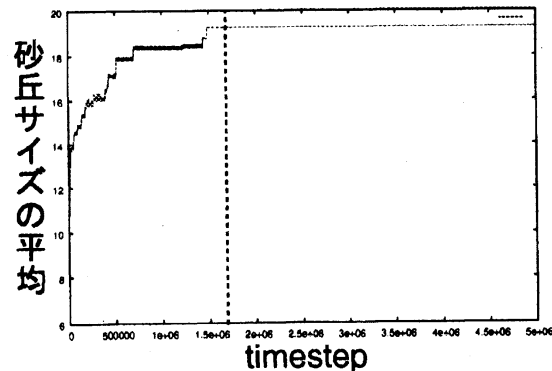


図10 砂丘サイズ平均の時間推移

5 解析

では、ここで何故、均一化が起こるのかについて、そのメカニズムについて考えたいと思う。まず、砂丘サイズを W として、考えやすいように平均場近似の場合を考える。平均場近似の場合、砂の流入量は砂丘サイズに比例し(必ず原点を通る)、流出量は別の流体近似計

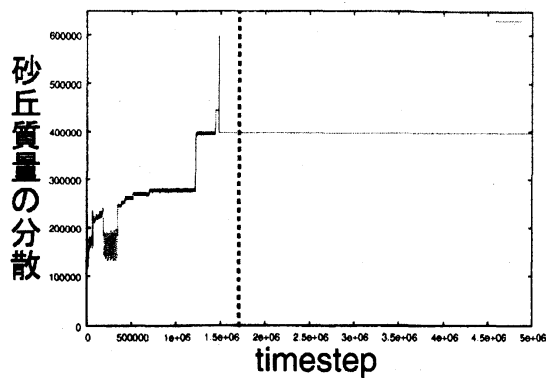


図 11 質量分散の時間推移

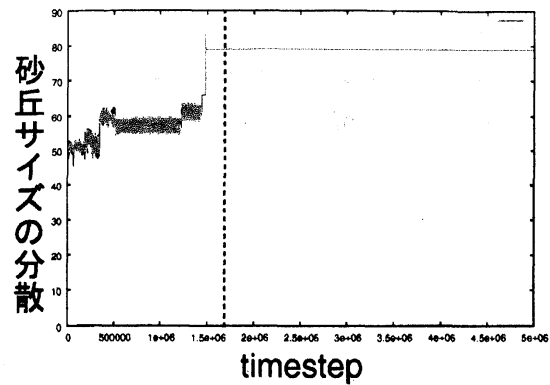


図 12 砂丘サイズ分散の時間推移

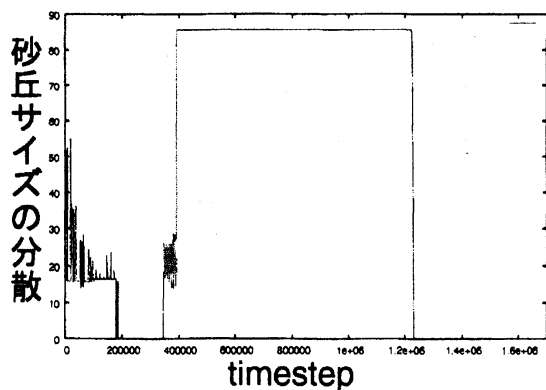


図 13 ネットワーク 3 の砂丘サイズの分散

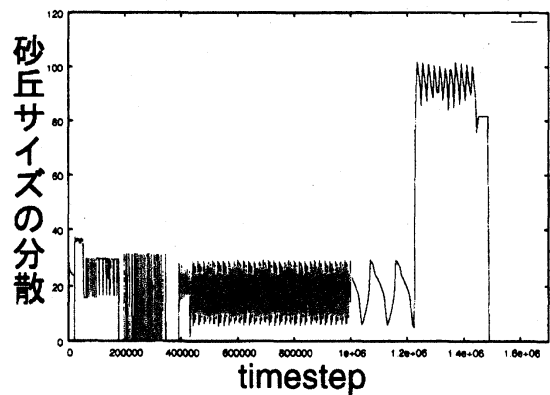


図 14 ネットワーク 4 の砂丘サイズの分散

算より、砂丘サイズに対して一次関数的に増えていく(式(6)参考)。従って、必ず、

$$\text{流入量 (inflow)}: \quad \alpha W$$

$$\text{流出量 (outflow)}: \quad \alpha W + \beta$$

の関係を満たすような in(inflow) と out(outflow) の関係になっている筈である(図 15)。

しかし、このような in と out の関係では、図 15 の矢印が示す通り、固定点があったとしても、それは不安定である。従って、安定な定常状態(固定点)を持つ為には、少なくとも固定点の周りで(局所的に)、in と out のグラフの傾きが図 15 の場合と逆転していなければならない(図 16)。ただし、outflow は流体近似計算から決まっているので、変わるとすれば inflow だけである。

ところで、実際、どのように砂が流入しているのかと考える。バルハンはホーンからしか砂が流出していかないので、風に対して垂直な平面を取ったとき、その平面を瞬間的に通過する砂の場所は飛び飛びになっている。従って、図 17 を見れば判るように、ある 1 つ

の砂丘に注目して、砂丘サイズを大きくしていった場合、風上から流れてくる1筋の砂をキャッチした状態から、さらにサイズを大きくしていったとしても、次に別の流れてくる砂をキャッチするまでは砂の流入量は一定に保たれるのである。このことから砂の流入量は砂丘サイズに対して階段関数的に増えていくものと見なされる。また、大域的には原点を通らなければならないということを踏まえれば、inflowは、図18のような形になっていなければならないということが想像できる。

また、実際、数値計算によって定常状態になる直前の各砂丘サイズにおける流入量/流出量の様子を計測したところ、砂丘サイズと流入量/流出量の関係は、局所的に水平方向に移動し、流出量と流入量がつりあうところまで収束していた(図19)。これは、提案した流入量/流出量のグラフ(図18)の妥当性がある程度表していると思われる。さらに、図17や図18における ΔW の値は、流れてくる砂を受け取る間隔であり、その値は手前にある砂丘サイズに依存している。従って、砂丘群の中で砂丘が交互にズレて存在していることを考慮すれば、 ΔW は平均砂丘サイズの1/2になっていると予想されるが、このデータ解析については、まだ途中である。

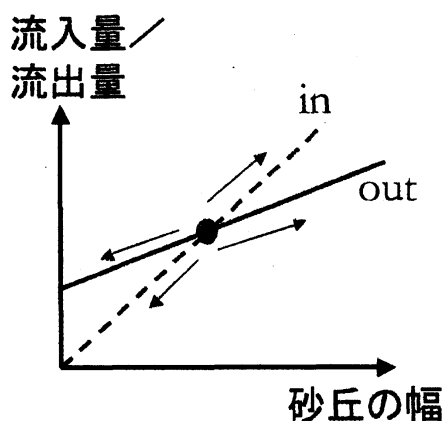


図15 砂丘サイズにおける流入量/流出量

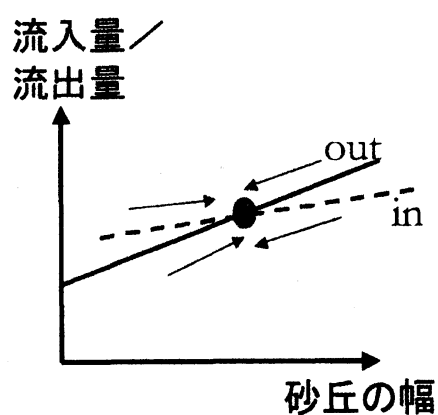


図16 安定になるための流入量/流出量の条件

6 まとめ

以上、今回の研究において、孤立砂丘群は互いに砂を供給し合いながら、衝突合体を経て、相互依存する繋がりを持ったグループ(ネットワーク)を形成していることを示した。そしてさらに、人為的な操作(砂丘を加えたり、取り除いたりという操作)がない場合、安定砂丘群は幾つかの独立なネットワークグループから構成されるということを示すと共に、その各々のネットワークグループ内で、砂丘のサイズの均一化が起こっているということを示した。

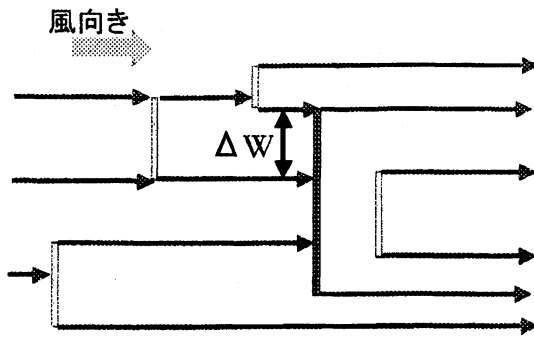


図 17 ある砂丘がキャッチする砂の量

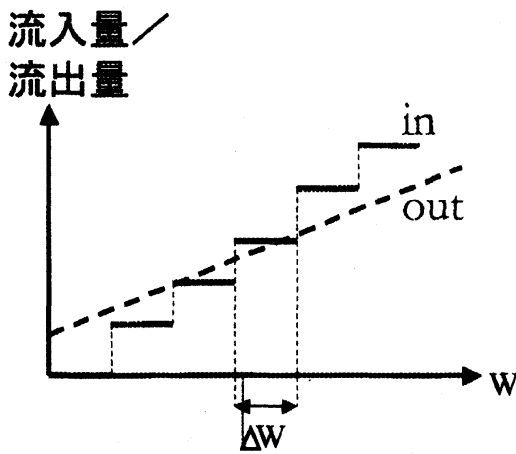


図 18 局所的になりたっているであろう流入量/流出量の関係を表すグラフ

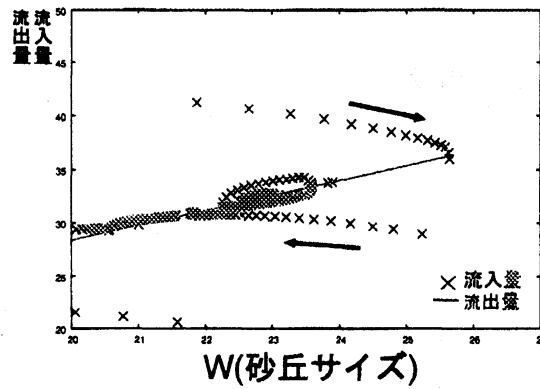


図 19 局所的な流入量/流出量の時間発展。矢印は砂丘サイズの変化する方向を表す。

本研究では、バルハン砂丘群の「風向きに沿った方向のサイズの一様化」を説明するためのモデルと機構を提案したが、数値計算で得られた結果から、ある程度、今回の提案は妥当性があると思われる。しかし、現在の所、最終的にネットワーク内で一様化は起こっていても、どのサイズで一様化するかは系の履歴に依存するため、明確には判っていない。実際、衝突などによって個々の砂丘サイズが平均値から大きくずれる場合もあり、今後、まだまだ改良の余地が残されている。また、自然界には、均一化が起こっていない部分も見られ、何らかの外的な要因があるとは思うものの、それに関しては、まだ解明はできていない。

今後は、定常状態の砂丘群への安定性がどの程度なのか、ネットワークの安定性はどの程度か、および、今回の研究で多少なりとも影響を受けたであろう周期境界条件を取り払った場合の議論も必要だと思われる。

参考文献

- [1] Cooke,R.,A.,Goudie,A.(1993) *Desert Geomorphology*, UCLA Press:London.
- [2] Lancaster,N.(1995) *geomorphology of Desert Dunes*,Routledge: New York.
- [3] Pye,k.,Tsoar,H.(1990) *Aeolian Sand and Sand Dunes*, Unwin Hyman Ltd.:London.
- [4] Nishimori,H.,Yamasaki,M.,Andersen,K.H.(1998) A simple model for the various pattern-dynamics of dunes: *international journal of Modern Physics B*,**12**,257-252.
- [5] Kroy,K.,Sauermann,G.,Herrmann,H.J.(2002) Minimal model for sand dunes: *Physical Review Letters*,**88**,0540301-1-4.
- [6] Andreotti,B.,Claudin,P.,Douady,S.(2002) Selection of dune shapes and velocities-Part2:A two-dimensional modelling: *European Physical Journal B*,**28**,341-352.
- [7] Momiji,H.(2001) *mathematical modelling of the dynamics and morphology of aeolian dunes and dune fields*, PhD thesis,University of London. Available on the web:<http://www.geog.ucl.ac.uk/hmomiji/thesis.html>.
- [8] Bishop,S.R.,Momiji,H.,Carretero-González,R.,Warren,A.(2002) Modelling desert dune fields based on discrete dynamics: *Discrete Dynamics in Nature aand Society*,**7**,7-17.
- [9] Momiji,H.,Warren,A.(2000) Relations of sand trapping efficiency and migration speed of transverse dunes to wind velocity: *Earth Surface Processes and Landforms*,**25**,1069-1084
- [10] Momiji,H.,Carretero-González,R.,Bishop,S.R.,Warren,A.(2000) Simulation of the effect of wind speedup in the formation of transverse dune fields: *Earth Surface Processes and Landforms*,**25**,905-918
- [11] Momiji,H.,Bishop,S.R.(2002) Estimating the wind ward slope of a barchan dune: *Sedimentology*,**49**,467-481
- [12] 西森拓, 神村俊法, 楓弘志.(2002) 砂丘群の衝突合体緩和模型 (A dynamical model for the size distribution of dunes) 京都大学数理解析研究所講究録 1305 複雑流体の数理
- [13] Hastenrath,S.L.(1967) The barchans of the Arequipa region,southern Peru: *Zeitschrift für Geomorphologie*,**11**,300-311.
- [14] P,Hersen,K.H.Andersen,H.Elbelrhiti,B.Andreotti,P.Claudin,and S.Douady(2004) Corridors of barchan dunes:Stability and size selection: *Physical Review E*,**69**,011304.