数理解析研究所講究録 1415 巻 2005 年 152-159

非拡大写像に対するエラー項を持つIshikawaイタレーションの強収束定理

拓殖大学・工学部 木内 博文 (Hirobumi Kiuchi)
Faculty of Engineering,
Takushoku University

1 導入

C を Banach 空間の閉凸集合とする. 写像 $T: C \to C$ が非拡大であるとは,

$$\|Tx - Ty\| \leqq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in C)$$

が成り立つときをいう. 非拡大写像 $T: C \to C$ に対して, エラー項つきのイタレーション

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T y_n + \gamma_n u_n \\ y_n = \alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n + \gamma'_n v_n \end{cases} \tag{1}$$

を考える. ただし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}, \{\gamma'_n\}$ は $[0,1]$ における数列で

$$\begin{gathered} \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha'_n + \beta'_n + \gamma'_n = 1 \quad (\forall n \in \boldsymbol{N}), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty \end{gathered} \tag{2}$$

を満たし, $\{u_n\}, \{v_n\}$ は C の有界点列である. このイタレーション (1) は, 1998 年に Y. Xu によって導入された. $\gamma_n = \gamma'_n = 0$ $(\forall n \in \boldsymbol{N})$ の時は, (1) は Ishikawa 型であり, $\beta'_n = \gamma'_n = 0$ $(\forall n \in \boldsymbol{N})$ の時は, (1) はエラー項つきの Mann 型である.

非拡大写像 $S: C \to C,\ T: C \to C$ に対して, エラー項つきのイタレーション

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n S y_n + \gamma_n u_n \\ y_n = \alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n + \gamma'_n v_n \end{cases} \tag{3}$$

を考える. ただし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}, \{\gamma'_n\}$ は $[0,1]$ における数列で (2) を満たし, $\{u_n\}, \{v_n\}$ は C における有界点列である. このイタレーション (3) は G. E. Kim, H. Kiuchi と W. Takahashi によって 2002 年に導入された.

一方, 1998 年に W. Takahashi と T. Tamura によってエラー項を持たない Ishikawa イタレーション ((3) で $\gamma_n = \gamma'_n = 0$ $(\forall n \in \boldsymbol{N})$) の弱収束と強収束に関する定理が証明された. 本論文では, これらのうち強収束に関する定理をエラー項つきの場合へと拡張した結果を紹介する.

2 関連するトピック

1995年に, L. S. Liu は

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T y_n + u_n \\ y_n = \alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n + v_n \end{cases}$$

で定義されるイタレーション $\{x_n\}$ の強収束を研究した. ただし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}$ は $[0,1]$ における数列で

$$\alpha_n + \beta_n = \alpha'_n + \beta'_n = 1 \quad (\forall n \in \boldsymbol{N})$$

を満たし, $\{u_n\}, \{v_n\}$ は C における点列で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty$$

を満たす. この時, エラー項 $\{u_n\}, \{v_n\}$ は o に収束するので, この定義はエラー項のランダム性に反する (Y. Xu).

1998年に Y. Xu は, X を一様に滑らかな Banach 空間, $S : X \to X$ を強増大作用素, $f \in X$ とし, 写像 $T : X \to X$ が $Tx = x - Sx + f$ で定義されている時, (1) の強収束を研究した. また, 1998年に Y. Xu は, C を一様に滑らかな Banach 空間の有界閉凸集合とし, $T : C \to C$ を強擬縮小写像とする時に, (1) の強収束を研究した.

2002年に L. Qihou は, C を一様凸 Banach 空間のコンパクト凸集合とし, $T : C \to C$ が L-α 一様 Lipschitz で漸近的準非拡大写像である時に,

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T^n y_n + \gamma_n u_n \\ y_n = \alpha'_n x_n + \beta'_n T^n x_n + \gamma'_n v_n \end{cases} \tag{4}$$

で定義されるイタレーション $\{x_n\}$ の強収束を研究した. ただし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}, \{\gamma'_n\}$ は $[0,1]$ における数列で (2) を満たし, $\{u_n\}, \{v_n\}$ は C における有界点列である.

近年, G. E. Kim, H. Kiuchi と W. Takahashi は, S, T が中間的意味で漸近的非拡大写像である時に, イタレーション (1) と (3) の強収束と弱収束を研究した. また, G. E. Kim と H. Kiuchi はイタレーション (4) の強収束を研究し, L. Qihou の結果を改良した.

3 強収束定理

X を Banach 空間とする. X が**狭義凸**であるとは, $x, y \in X$ が $\|x\| = \|y\| = 1$ と $x \neq y$ を満たすならば

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

が成り立つ時をいう. X が**一様凸**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して, $x, y \in X$ が $\|x\|, \|y\| \leqq 1$ と $\|x-y\| \geqq \varepsilon$ を満たすならば

$$\|x+y\| \leqq 2(1-\delta)$$

が成り立つ時をいう. 次が成り立つことが知られている.

- 一様凸 Banach 空間は狭義凸 Banach 空間である.
- Hilbert 空間は一様凸 Banach 空間である.
- l^p は一様凸 Banach 空間である $(1 < p < \infty)$.

以降, 常に (1) と (3) で定義されるイタレーションの $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}, \{\gamma'_n\}$ は $[0,1]$ における数列で (2) を満たし, $\{u_n\}, \{v_n\}$ は C における有界点列であるとする.

補題 3.1 ([4]). *C を Banach 空間の閉凸集合とし, S, T は C から C への非拡大写像で $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるとする. $\{x_n\}$ を (3) で定義されるイタレーションとする. この時, 任意の $z \in F(S) \cap F(T)$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\|$ が存在する.*

補題 3.2 ([4]). *C を一様凸 Banach 空間の閉凸集合とし, T は C から C への非拡大写像で不動点を持つとする. (1) で定義されるイタレーション $\{x_n\}$ は*

(i) ある $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(0 < a \leqq b < 1)$ に対して $\alpha_n, \beta_n \in [a,b]$, $\beta'_n \in [0,b]$, または

(ii) ある $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(0 < a \leqq b < 1)$ に対して $\alpha'_n, \beta'_n \in [a,b]$, $\beta_n \in [a,1]$

を満たすとする. この時, $\lim_{n\to\infty} (x_n - Tx_n) = o$.

Banach 空間 X の**凸性のモジュラス**とは, 次で定義される関数 $\delta : [0,2] \to [0,1]$ のことである.

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} \;\middle|\; \|x\| \leqq 1,\ \|y\| \leqq 1,\ \|x-y\| \geqq \varepsilon\right\}$$

次が成り立つことが知られている.

- δ は広義増加関数である.
- X が一様凸であるための必要十分条件は, $\delta(\varepsilon) > 0$ $(\forall \varepsilon \in (0,2])$ である.

定理 3.3 (Mazur). *K を Banach 空間のコンパクト集合とすると, $\overline{\mathrm{co}}\, K$ もコンパクトである.*

補題 3.1, 補題 3.2, 定理 3.3 を用いて次の定理を得る.

定理 3.4 ([4]). *C を一様凸 Banach 空間の閉凸集合とし, T は C から C への非拡大写像で不動点を持つとする. (1) で定義されるイタレーション $\{x_n\}$ は*

(i) ある $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(0 < a \leqq b < 1)$ に対して $\alpha_n, \beta_n \in [a,b]$, $\beta'_n \in [0,b]$, または

(ii) ある $a,b \in \boldsymbol{R}$ $(0 < a \leqq b < 1)$ に対して $\alpha'_n, \beta'_n \in [a,b]$, $\beta_n \in [a,1]$

を満たすとする. この時, $T(C) \cup \{u_n\}$ が C のコンパクト集合に含まれるならば $\{x_n\}$ は T の不動点に強収束する.

一方, 1998年に W. Takahashi と T. Tamura によってエラー項を持たない Ishikawa イタレーションに関する定理が証明された.

定理 3.5 ([9]). C を狭義凸 *Banach* 空間の閉凸集合とし, S,T は C から C への非拡大写像で $S(C) \cup T(C)$ が C のコンパクト集合に含まれていて $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるとする. イタレーション $\{x_n\}$ は

$$x_1 \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n S[\alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n]$$

で定義されているとする. ただし, $\alpha_n, \alpha'_n, \beta_n, \beta'_n \in [0,1]$, $\alpha_n + \beta_n = 1$, $\alpha'_n + \beta'_n = 1$ である.

(i) ある $a,b \in \boldsymbol{R}$ $(0 < a \leqq b < 1)$ に対して $\beta_n \in [a,b]$, $\beta'_n \in [0,b]$ であるとすると, $x_{n_i} \to y$ ならば $y \in F(S)$ である.

(ii) ある $a,b \in \boldsymbol{R}$ $(0 < a \leqq b < 1)$ に対して $\beta_n \in [a,1]$, $\beta'_n \in [a,b]$ であるとすると, $x_{n_i} \to y$ ならば $y \in F(T)$ である.

(iii) ある $a,b \in \boldsymbol{R}$ $(0 < a \leqq b < 1)$ に対して $\beta_n, \beta'_n \in [a,b]$ であるとすると, $x_{n_i} \to y$ ならば $y \in F(S) \cap F(T)$ である.

彼らは, この定理を用いて次にあげる定理などいくつかの定理を証明した.

定理 3.6 ([9]). C を狭義凸 *Banach* 空間の閉凸集合とし, S,T は C から C への非拡大写像で $S(C) \cup T(C)$ が C のコンパクト集合に含まれていて $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるとする. イタレーション $\{x_n\}$ は

$$x_1 \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n S[\alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n]$$

で定義されているとする. ただし, $\alpha_n, \alpha'_n, \beta_n, \beta'_n \in [0,1]$, $\alpha_n + \beta_n = 1$, $\alpha'_n + \beta'_n = 1$ である. この時, ある $a,b \in \boldsymbol{R}$ $(0 < a \leqq b < 1)$ に対して $\beta_n, \beta'_n \in [a,b]$ ならば, $\{x_n\}$ は S と T の共通不動点に強収束する.

定理 3.7 ([9]). C を一様凸 *Banach* 空間の閉凸集合とし, S,T は C から C への非拡大写像で $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるとする. P を C から $F(S) \cap F(T)$ 上への距離射影とする. イタレション $\{x_n\}$ が

$$x_1 \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n S[\alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n]$$

で定義されているとする. ただし, $\alpha_n, \alpha'_n, \beta_n, \beta'_n \in [0,1]$, $\alpha_n + \beta_n = 1$, $\alpha'_n + \beta'_n = 1$ である. この時, $\{Px_n\}$ は $F(S) \cap F(T)$ の元に強収束する.

これらの定理をエラー項つきの場合へと拡張する.

補題 3.8 ([5]). C を Banach 空間の閉凸集合とし，S,T は C から C への非拡大写像で $F(S)\cap F(T)\neq\emptyset$ であるとする．イタレーション $\{x_n\}$ は (3) で定義されていて，イタレーション $\{p_n\}$ は

$$p_1=x_1,\quad p_{n+1}=\alpha_n p_n+\beta_n S y_n+\gamma_n x_1\ (n\in\boldsymbol{N})$$

で定義されているとする．この時，ある $a\in\boldsymbol{R}$ $(0<a\leqq 1)$ に対して $\beta_n\in[a,1]$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$ ならば，$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p_n\|=0$.

補題 3.1 を用いて，次を証明できる．

定理 3.9 ([5]). C を狭義凸 Banach 空間の閉凸集合とし，S,T は C から C への非拡大写像で $F(S)\cap F(T)\neq\emptyset$ であるとする．イタレーション $\{x_n\}$ は (3) で定義されているとする．

(i) ある $a,b\in\boldsymbol{R}$ $(0<a\leqq b<1)$ に対して $\beta_n\in[a,b]$, $\beta'_n\in[0,b]$ であるとすると，$x_{n_i}\to z$ ならば $z\in F(S)$ である．

(ii) ある $a,b\in\boldsymbol{R}$ $(0<a\leqq b<1)$ に対して $\beta_n\in[a,1]$, $\beta'_n\in[a,b]$ であるとすると，$x_{n_i}\to z$ ならば $z\in F(T)$ である．

(iii) ある $a,b\in\boldsymbol{R}$ $(0<a\leqq b<1)$ に対して $\beta_n,\beta'_n\in[a,b]$ であるとすると，$x_{n_i}\to z$ ならば $z\in F(S)\cap F(T)$ である．

証明の概要. (i) を示す．ある $a,b\in\boldsymbol{R}$ $(0<a\leqq b<1)$ に対して $\beta_n\in[a,b]$, $\beta'_n\in[0,b]$ であるとし，$x_{n_i}\to z$ とする．$Sz\neq z$ を仮定する．

$w\in F(S)\cap F(T)$ をとり，$c=\lim_{n\to\infty}\|x_n-w\|$ とおく．この極限は補題 3.1 により存在する．$x_{n_i}\to z$ だから，$\|z-w\|=c$ である．また，$Sz\neq z$ だから $c>0$ である．

すべての $\beta'\in[0,b]$ に対して $S[\beta'Tz+(1-\beta')z]\neq z$ が成り立つ．なぜなら，$\beta'=0$ に対して $S[\beta'Tz+(1-\beta')z]=z$ ならば $Sz=z$ となり，矛盾である．また，ある $\beta'\in(0,b]$ に対して $S[\beta'Tz+(1-\beta')z]=z$ ならば，X の狭義凸性を用いて $Tz=z$ を得る．それで，$z=S[\beta'Tz+(1-\beta')z]=Sz$ を得る．これも矛盾である．さらに，$\|S[\beta'Tz+(1-\beta')z]-w\|\leqq c$ も得る．

次に，

$$D=\{(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')\in[0,1]\times[a,b]\times[0,1]\times[0,1]\times[0,b]\times[0,1]\mid \alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha'+\beta'+\gamma'=1\}$$

とおき，D 上の関数 g を

$$g(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')=\|\alpha z+\beta S[\alpha'z+\beta'Tz+\gamma'z]+\gamma w-w\|\quad(\forall(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')\in D)$$

で定義すると，$a\leqq\beta\leqq b$ と X の狭義凸性を用いて，すべての $(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')\in D$ に対して $g(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')<c$ を得る．g が D 上で連続で D がコンパクトだから，$\varepsilon>0$ が存在して，すべての $(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')\in D$ に対して $g(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')<c-\varepsilon$ が成り立つ．

一方, $i_0 \in \boldsymbol{N}$が存在して, すべての自然数$i \geqq i_0$に対して$\|x_{n_i} - z\| < \frac{\varepsilon}{4}$, $\gamma'_{n_i}\|v_{n_i} - z\| < \frac{\varepsilon}{4}$, $\gamma_{n_i}\|u_{n_i} - w\| < \frac{\varepsilon}{4}$が成り立つ. よって, すべての自然数$i \geqq i_0$に対して

$$\begin{aligned}
\|x_{n_i+1} - w\| &\leqq \left\|x_{n_i+1} - \beta_{n_i} S[\alpha'_{n_i} z + \beta'_{n_i} Tz + \gamma'_{n_i} z] - \alpha_{n_i} z - \gamma_{n_i} w\right\| \\
&\quad + \left\|\beta_{n_i} S[\alpha'_{n_i} z + \beta'_{n_i} Tz + \gamma'_{n_i} z] + \alpha_{n_i} z + \gamma_{n_i} w - w\right\| \\
&\leqq \alpha_{n_i}\|x_{n_i} - z\| + \beta_{n_i}\left\|S[\alpha'_{n_i} x_{n_i} + \beta'_{n_i} T x_{n_i} + \gamma'_{n_i} v_{n_i}]\right. \\
&\quad \left. - S[\alpha'_{n_i} z + \beta'_{n_i} Tz + \gamma'_{n_i} z]\right\| + \gamma_{n_i}\|u_{n_i} - w\| + c - \varepsilon \\
&\leqq \alpha_{n_i}\|x_{n_i} - z\| + \beta_{n_i}((\alpha'_{n_i} + \beta'_{n_i})\|x_{n_i} - z\| + \gamma'_{n_i}\|v_{n_i} - z\|) \\
&\quad + \gamma_{n_i}\|u_{n_i} - w\| + c - \varepsilon \\
&\leqq \|x_{n_i} - z\| + \gamma'_{n_i}\|v_{n_i} - z\| + \gamma_{n_i}\|u_{n_i} - w\| + c - \varepsilon \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + c - \varepsilon = c - \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

を得る. これは矛盾である. 従って, $Sz = z$を得, 結論を得る.

(ii) は (i) と同様であり, (iii) は (i) と (ii) より明らかである. □

補題 3.8 と, 定理 3.6 の証明と同様の議論によって次を得る.

定理 3.10 ([5]). Cを狭義凸 *Banach* 空間の閉凸集合とし, S, TはCからCへの非拡大写像で, $S(C)$がCのコンパクト集合に含まれていて$F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$であるとする. イタレーション$\{x_n\}$は (3) で定義されているとする. ある$a, b \in \boldsymbol{R}$ $(0 < a \leqq b < 1)$に対して$\beta_n, \beta'_n \in [a, b]$ならば, $\{x_n\}$がSとTの共通不動点に強収束する.

証明. 補題 3.8 により, 一般性を失うことなく$u_n = x_1$ $(\forall n \in \boldsymbol{N})$として良い. イタレーション$\{x_n\}$は$C$のコンパクト集合に含まれているので, $\{x_n\}$の部分列$\{x_{n_i}\}$と$z \in C$が存在して$x_{n_i} \to z$となる. よって, 定理 3.9 により, $z \in F(S) \cap F(T)$を得る. 従って, 補題 3.1 により, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - z\| = 0$を得る. □

定理 3.7 の証明と同様の議論によって, 次の定理 3.12 を証明することができる.

補題 3.11 ([10]). $\{a_n\}$と$\{b_n\}$を非負数列とする. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$で, 任意の$n \in \boldsymbol{N}$に対して

$$a_{n+1} \leqq a_n + b_n$$

ならば, $\lim_{n\to\infty} a_n$が存在する.

定理 3.12 ([5]). Cを一様凸 *Banach* 空間の閉凸集合とし, S, TはCからCへの非拡大写像で$F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$であるとする. PはCから$F(S) \cap F(T)$上への距離射影とし, イタレーション$\{x_n\}$は (3) で定義されているとする. この時, 点列$\{Px_n\}$はSとTの共通不動点に強収束する.

証明の概要. $M = \max\left\{\sup_{n\in\boldsymbol{N}}\|Px_n - v_n\|, \sup_{n\in\boldsymbol{N}}\|Px_n - u_n\|\right\}$とおく.

$$\|Px_{n+1} - x_{n+1}\| \leqq \|Px_n - x_{n+1}\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqq \|Px_n - \alpha_n x_n - \beta_n Sy_n - \gamma_n u_n\| \\
&\leqq \alpha_n \|Px_n - x_n\| + \beta_n \|Px_n - Sy_n\| + \gamma_n \|Px_n - u_n\| \\
&\leqq \|Px_n - x_n\| + (\gamma'_n + \gamma_n)M
\end{aligned}
$$

だから, 補題3.11により, $\lim_{n\to\infty} \|Px_n - x_n\|$が存在する. そこで, $\lim_{n\to\infty} \|Px_n - x_n\| = r$とおく. また, 数学的帰納法により, 任意の$n, k \in \boldsymbol{N}$に対して

$$
\|Px_n - x_{n+k}\| \leqq \|Px_n - x_n\| + \sum_{l=0}^{k-1} (\gamma_{n+l} + \gamma'_{n+l})M \tag{5}
$$

が成り立つ.

点列$\{Px_n\}$がCauchy列であることを示せば結論を得る. まず, $r = 0$を仮定する. 任意の$\varepsilon > 0$に対して$n_0 \in \boldsymbol{N}$が存在して, すべての自然数$n \geqq n_0$に対して$\|Px_n - x_n\| < \varepsilon$と$\sum_{n=n_0}^{\infty} (\gamma_n + \gamma'_n)M < \varepsilon$が成り立つ. $m > n \geqq n_0$ならば, (5) より

$$
\begin{aligned}
\|Px_n - Px_m\| &\leqq \|Px_n - x_n\| + \|x_n - Px_{n_0}\| + \|Px_{n_0} - x_m\| + \|x_m - Px_m\| \\
&\leqq \|Px_n - x_n\| + \|Px_{n_0} - x_{n_0}\| + \sum_{l=0}^{n-n_0-1} (\gamma_{n_0+l} + \gamma'_{n_0+l})M \\
&\quad + \|Px_{n_0} - x_{n_0}\| + \sum_{l=0}^{m-n_0-1} (\gamma_{n_0+l} + \gamma'_{n_0+l})M + \|x_m - Px_m\| \\
&< 6\varepsilon
\end{aligned}
$$

である. よって, 点列$\{Px_n\}$はCauchy列である. 次に, $r > 0$を仮定し, 点列$\{Px_n\}$がCauchy列でなかったとする. この時, $\varepsilon > 0$と点列$\{Px_n\}$の部分列$\{Px_{n_i}\}, \{Px_{m_i}\}$が存在して, すべての$i \in \boldsymbol{N}$に対して$\|Px_{n_i} - Px_{m_i}\| \geqq \varepsilon$が成り立つ. また, $d > 0$が存在して

$$
(r + d)\left(1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{r + d}\right)\right) < r
$$

となり, $n_0 \in \boldsymbol{N}$が存在して, すべての自然数$n \geqq n_0$に対して$\|Px_n - x_n\| < r + \dfrac{d}{4}$と

$$
\sum_{n=n_0}^{\infty} (\gamma_n + \gamma'_n)M < \frac{d}{4}\left(1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{r + d}\right)\right)
$$

が成り立つ. さらに, $n_i, m_i \geqq n_0$が存在して$\|Px_{n_i} - Px_{m_i}\| \geqq \varepsilon$が成り立つ. よって, $l \geqq n_i, m_i$ならば

$$
\begin{aligned}
\|Px_{n_i} - x_l\| &\leqq \|Px_{n_i} - x_{n_i}\| + \sum_{j=0}^{l-n_i-1} (\gamma_{n_i+j} + \gamma'_{n_i+j})M < r + \frac{d}{2}, \\
\|Px_{m_i} - x_l\| &\leqq \|Px_{m_i} - x_{m_i}\| + \sum_{j=0}^{l-m_i-1} (\gamma_{m_i+j} + \gamma'_{m_i+j})M < r + \frac{d}{2}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 一方, Xが一様凸だから

$$
\|Px_{l+1} - x_{l+1}\| \leqq \|Px_l - x_l\| + (\gamma_l + \gamma'_l)M
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqq \left\| \frac{Px_{n_i} + Px_{m_i}}{2} - x_l \right\| + (\gamma_l + \gamma_l')M \\
&< \left(r + \frac{d}{2}\right)\left(1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{r + d/2}\right)\right) + \frac{d}{4}\left(1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{r+d}\right)\right) \\
&\leqq (r+d)\left(1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{r+d}\right)\right) - \frac{d}{4}\left(1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{r+d}\right)\right) \\
&< r - \frac{d}{4}\left(1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{r+d}\right)\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. $l \to \infty$ として, $r \leqq r - \frac{d}{4}\left(1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{r+d}\right)\right)$ を得る. これは矛盾である. よって, 点列 $\{Px_n\}$ は Cauchy 列である. □

参考文献

[1] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Interscience, 1958.

[2] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 147–150.

[3] G. E. Kim and H. Kiuchi, *Strong convergences of Ishikawa iterations for asymptotically quasi-nonexpansive mappings in the intermediate sense*, to appear in Proceedings of Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis.

[4] G. E. Kim, H. Kiuchi, and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonexpansive mappings*, Sci. Math. Japonicae **56** (2002), 133–141.

[5] H. Kiuchi, *Convergence theorems of Ishikawa iterations with errors for nonexpansive mappings*, 投稿中.

[6] L. S. Liu, *Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **194** (1995), 114–125.

[7] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[8] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis — Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publ., 2000.

[9] W. Takahashi and T. Tamura, *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings*, J. Convex. Analysis **5** (1998), 45–56.

[10] K. K. Tan and H. K. Xu, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process*, J. Math. Anal. Appl. **178** (1993), 301–308.

[11] Y. Xu, *Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly accretive operator equations*, J. Math. Anal. Appl. **224** (1998), 91–101.