

An ε -Saddle Point of a Fractional Game

木村 寛, 松山敬左, 星野満博, 川島洋人, 矢戸弓雄

秋田県立大学 システム科学技術学部 経営システム工学科

1 Introduction

分数形 2 人ゼロ和ゲーム (GP) を次の集合

$$(N, X, Y, f, g, G) \tag{1.1}$$

で与える. ここで,

1. $N := \{1, 2\}$ を Player の集合.
2. E を 線形位相空間とし, 各々の Player I, II は戦略集合 $X, Y \subset E$ から, それぞれ戦略 $x \in X, y \in Y$ を選ぶものとする.
3. $f: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}, g: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}_+$. ただし, $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$.
4. $G = f/g: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$, つまり, 任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対して, $G(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ と定義し, Player I の損失関数 (loss function) とする. よって, 今 2 人ゼロ和ゲームより, Player II の損失関数は $-G$ である.

また,

$$\bar{\theta} := \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y), \quad \underline{\theta} := \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(x, y) \tag{1.2}$$

とおく.

$\bar{\theta}$ は Player I の minimal worst loss と呼ばれ, $\underline{\theta}$ は Player II の maximal worst gain といわれる.

一般には, $\bar{\theta} \geq \underline{\theta}$ が成り立ち, $\bar{\theta} \neq \underline{\theta}$ のとき, duality gap が存在しているという.

Definition 1.1 ゲーム (GP) が game value (in short, a value) をもつとは

$$\bar{\theta} = \underline{\theta} =: \theta^* \tag{1.3}$$

が成り立つときをいう. また, この θ^* をゲーム (GP) の value とよぶ.

Definition 1.2 $y^* \in Y$ がゲーム (GP) の **max-inf** であるとは,

$$\bar{\theta} = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y) = \inf_{x \in X} G(x, y^*) \quad (1.4)$$

が成り立つことをいい, また, $x^* \in X$ がゲーム (GP) の **mini-sup** であるとは,

$$\underline{\theta} = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(x, y) = \sup_{y \in Y} G(x^*, y) \quad (1.5)$$

が成り立つことをいう.

Proposition 1.1 ゲーム (GP) が次の (1)(2) のどちらか一方,

(1) $x^* \in X$ が (GP) の mini-sup;

(2) $y^* \in Y$ が (GP) の max-inf,

を満たしているならば, $\bar{\theta} = \underline{\theta}$ が成り立つ.

証明は 参考文献 [1] 参照.

Definition 1.3 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP) の **saddle point** であるとは, 次が成り立つことをいう.

$$\sup_{y \in Y} G(x^*, y) = G(x^*, y^*) = \inf_{x \in X} G(x, y^*). \quad (1.6)$$

$$\left(\text{i.e., } G(x^*, y) \leq G(x^*, y^*) \leq G(x, y^*), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y \right)$$

このとき, 次であることが知られている.

Proposition 1.2 $x^* \in X$ がゲーム (GP) の mini-sup (または, $y^* \in Y$ が max-inf) であるならば, game value θ^* が存在し,

$$\bar{\theta} = \underline{\theta} =: \theta^* \quad (1.7)$$

を満たす.

Proposition 1.3 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP) の saddle point であるための必要十分条件は, $x^* \in X$ が (GP) の mini-sup かつ, $y^* \in Y$ が (GP) の max-inf であることである.

証明は, 参考文献 [1] 参照.

ゲーム (GP) に対して, 直接, game value や ε -saddle point, saddle point を求めるのは困難であるため, 次のパラメトリックゲームを考える.

よってはじめて, (GP) に対するパラメトリックゲーム (GP_θ) を構成する.

2 A Parametric Game of (GP)

ゲーム (GP) に対するパラメトリックゲーム (GP_λ) を次の集合で与える:

$$(N, X, Y, f, g, \lambda, F_\lambda) \quad (2.1)$$

ここで,

1. $N := \{1, 2\}$ を Player の集合.
2. E を線形位相空間とし, 各々の Player I, II は戦略集合 $X, Y \subset E$ から, それぞれ戦略 $x \in X, y \in Y$ を選ぶものとする.
3. $f: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}, g: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}_+$.
4. $\lambda \in \mathbf{R}$.
5. $F_\lambda = f - \lambda g: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ と定義し, Player I の損失関数とする. つまり, 任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対して $F_\lambda(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ である. また, 今2人ゼロ和ゲームより, Player II の損失関数は $-F_\lambda$ である.

また,

$$\bar{F}_\lambda := \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_\lambda(x, y), \quad \underline{F}_\lambda := \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_\lambda(x, y) \quad (2.2)$$

とおく.

(GP) における定義と同様にして, 次の定義を与える.

Definition 2.1 ゲーム (GP_λ) が game value (in short, a value) をもつとは

$$\bar{F}_\lambda = \underline{F}_\lambda =: F_\lambda^* \quad (2.3)$$

が成り立つときをいう. また F_λ^* をゲーム (GP_λ) の value とよぶ.

Definition 2.2 $y^* \in Y$ がゲーム (GP_λ) の max-inf であるとは,

$$\bar{F}_\lambda = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_\lambda(x, y) = \inf_{x \in X} F_\lambda(x, y^*) \quad (2.4)$$

が成り立つことをいい, また, $x^* \in X$ がゲーム (GP_λ) の mini-sup であるとは,

$$\underline{F}_\lambda = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_\lambda(x, y) = \sup_{y \in Y} F_\lambda(x^*, y) \quad (2.5)$$

が成り立つことをいう.

Definition 2.3 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP_λ) の saddle point であるとは, 次が成り立つことをいう.

$$\sup_{y \in Y} F_\lambda(x^*, y) = G(x^*, y^*) = \inf_{x \in X} F_\lambda(x, y^*). \quad (2.6)$$

Proposition 2.1 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP_λ) の saddle point であるための必要十分条件は, $x^* \in X$ が (GP_λ) の mini-sup かつ $y^* \in Y$ が (GP_λ) の max-inf であることである.

Proof. Proposition 1.3 と同様. □

Definition 2.4 $X, Y \subset E$ を空でない集合, $\varphi: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ とする. このとき任意の $y \in Y$ に対して $\varphi(\cdot, y)$ が **convexlike** であるとは, 任意の $x_1, x_2 \in X$ と α ($0 \leq \alpha \leq 1$) に対して, ある $x_0 \in X$ が存在して,

$$\varphi(x_0, y) \leq \alpha\varphi(x_1, y) + (1 - \alpha)\varphi(x_2, y), \quad \forall y \in Y \quad (2.7)$$

が成り立つことである.

Theorem 2.1 (Minimax Theorem 1) [1]

X をコンパクト凸集合とし, $\varphi: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ は次の条件を満たすものとする.

- (1) $\forall y \in Y, \varphi(\cdot, y): X \rightarrow \mathbf{R}$, l.s.c., convex;
- (2) $\forall x \in X, \varphi(x, \cdot): Y \rightarrow \mathbf{R}$, concavelike.

このとき次が成り立つ.

$$\sup_{y \in Y} \min_{x \in X} \varphi(x, y) = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} \varphi(x, y). \quad (2.8)$$

Ky Fan's system Th. を用いることにより示される. 参考文献 [1] 参照.

Theorem 2.2 (Minimax Theorem 2) [1]

Y をコンパクト凸集合とし, $\varphi: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ は次の (1)(2) を満たすものとする.

- (1) $\forall y \in Y, \varphi(\cdot, y): X \rightarrow \mathbf{R}$, convexlike;
- (2) $\forall x \in X, \varphi(x, \cdot): Y \rightarrow \mathbf{R}$, upper semicontinuous, concave.

このとき, 次が成り立つ.

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \varphi(x, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} \varphi(x, y). \quad (2.9)$$

Corollary 2.1 (Minimax Theorem 3)

X, Y をコンパクト凸集合とし, $\phi: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ は次の (1)(2) を満たすものとする.

- (1) $\forall y \in Y, \phi(\cdot, y): X \rightarrow \mathbf{R}$, lower semicontinuous, convex;
- (2) $\forall x \in X, \phi(x, \cdot): Y \rightarrow \mathbf{R}$, upper semicontinuous, concave.

このとき次が成り立つ.

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} \varphi(x, y) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \varphi(x, y) \quad (2.10)$$

Theorem 2.3 $X \subset E$ はある部分集合, $Y \subset E$ をコンパクトな凸部分集合とし, $f : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$, $g : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}_+$ は条件 (1)(2)(3)(4) を満たすものとする.

- (1) $\forall y \in Y, x \mapsto f(x, y), \text{convex};$
- (2) $\forall x \in X, y \mapsto f(x, y), \text{upper semicontinuous, concave};$
- (3) $\forall y \in Y, x \mapsto g(x, y), \text{concave};$
- (4) $\forall x \in X, y \mapsto g(x, y), \text{lower semicontinuous, convex}.$

このとき, 任意の $\lambda \geq 0$ に対して, 次が成立する.

$$\exists y^* \in Y, \text{ s.t. } \bar{F}_\lambda = \underline{F}_\lambda = \inf_{x \in X} F_\lambda(x, y^*). \quad (2.11)$$

(i.e., $y^* \in Y$ はゲーム (GP_λ) の max-inf.)

Proof. 任意の $x \in X$ に対して, 関数 $F_\lambda(x, \cdot) : Y \rightarrow \mathbf{R}$ は条件 (2)(4) より, u.s.c. かつ concave である. 一方, 任意の $y \in Y$ を固定したとき, 関数 $F(\cdot, y) : X \rightarrow \mathbf{R}$ は (1)(3) より, convex となる. よって, Theorem 2.2 より,

$$\exists y^* \in Y, \text{ s.t., } \max_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_\lambda(x, y) = \inf_{x \in X} F_\lambda(x, y^*) = \inf_{x \in X} \max_{y \in Y} F_\lambda(x, y). \quad (2.12)$$

ゆえに, $\bar{F}_\lambda = \underline{F}_\lambda$ である. □

\bar{F}_λ と, $\bar{\theta}$ の関係について, 次の Lemma が成り立つ.

Lemma 2.1 \bar{F}_λ について次が成り立つ.

- (a) \bar{F}_λ は λ に関して非増加関数;
- (b) $\bar{F}_\lambda < 0$ ならば, $\lambda \geq \bar{\theta}$;
- (c) $\bar{F}_\lambda > 0$ ならば, $\lambda \leq \bar{\theta}$;
- (d) $\lambda > \bar{\theta}$ ならば, $\bar{F}_\lambda \leq 0$;
- (e) $\lambda < \bar{\theta}$ ならば, $\bar{F}_\lambda \geq 0$.

さらに Y がコンパクト, 任意の $x \in X$ に対して $y \mapsto f(x, y)$ が連続, $y \mapsto g(x, y)$ が連続ならば,

- (f) $\bar{F}_\lambda < 0 \iff \lambda > \bar{\theta}$;
- (g) $\bar{F}_{\bar{\theta}} \geq 0$.

E_λ と $\underline{\theta}$ については以下のことが成り立つ.

Lemma 2.2 E_λ について次が成り立つ.

- (a) E_λ は非増加関数;
- (b) $E_\lambda < 0$ ならば, $\lambda \geq \underline{\theta}$;
- (c) $E_\lambda > 0$ ならば, $\lambda \leq \underline{\theta}$;
- (d) $\lambda > \underline{\theta}$ ならば, $E_\lambda \leq 0$;
- (e) $\lambda < \underline{\theta}$ ならば, $E_\lambda \geq 0$.

さらに X がコンパクト, 任意の $y \in Y$ に対して $x \mapsto f(x, y)$ が連続, $x \mapsto g(x, y)$ が連続のとき,

- (f) $E_\lambda > 0 \iff \underline{\theta} > \lambda$;
- (g) $E_{\underline{\theta}} \leq 0$.

Theorem 2.4 ゲーム (GP) は value θ^* をもち, $\bar{F}_{\theta^*} \geq 0$ を満たしているものとする. このとき, $y^* \in Y$ がゲーム (GP_{θ^*}) の max-inf であるならば, $y^* \in Y$ はゲーム (GP) の max-inf である.

Proof. 仮定 $\bar{F}_{\theta^*} \geq 0$ であることと $y^* \in Y$ がゲーム (GP_{θ^*}) の max-inf であることから,

$$0 \leq \bar{F}_{\theta^*} = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_{\theta^*}(x, y) = \inf_{x \in X} F_{\theta^*}(x, y^*) \leq F_{\theta^*}(x, y^*), \quad \forall x \in X. \quad (2.13)$$

よって,

$$\theta^* \leq G(x, y^*) \leq \sup_{y \in Y} G(x, y), \quad \forall x \in X \quad (2.14)$$

より,

$$\theta^* \leq \inf_{x \in X} G(x, y^*) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y) = \bar{\theta} = \theta^*$$

が成り立つ. つまり,

$$\theta^* = \inf_{x \in X} G(x, y^*) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y).$$

ゆえに, $y^* \in Y$ はゲーム (GP) の max-inf である. □

3 An ε -Saddle Point of a Fractional Game

Theorem 3.1 $X \subset E$ はある部分集合, $Y \subset E$ をコンパクトな凸部分集合とし, $f : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$, $g : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}_+$ は以下の条件を満たすものとする.

- (1) $\forall y \in Y, x \mapsto f(x, y)$, convex;
- (2) $\forall x \in X, y \mapsto f(x, y)$, continuous, concave;

- (3) $\forall y \in Y, x \mapsto g(x, y)$, concave;
 (4) $\forall x \in X, y \mapsto g(x, y)$, continuous, convex.

このとき, $\bar{\theta} \geq 0$ ならば, 次の (i)(ii) が成り立つ.

- (i) $\bar{\theta} = \underline{\theta} =: \theta^*$;
 (ii) ゲーム (GP) の max-inf $y^* \in Y$ が存在する.

Proof. (i) $\bar{\theta} \geq \underline{\theta}$ は明らかであるから, $\bar{\theta} \leq \underline{\theta}$ であることを示す. 今, 仮定より $\bar{\theta} \geq 0$ であることから Lemma 2.1(g) と Theorem 2.3 より,

$$\bar{F}_{\bar{\theta}} = \underline{F}_{\bar{\theta}} \geq 0. \quad (3.1)$$

また, Lemma 2.2 より, $(GP_{\bar{\theta}})$ の max-inf $y^* \in Y$ が存在する. つまり,

$$\underline{F}_{\bar{\theta}} = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_{\bar{\theta}}(x, y) = \inf_{x \in X} F_{\bar{\theta}}(x, y^*). \quad (3.2)$$

ここで, (3.1),(3.2) より,

$$0 \leq \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_{\bar{\theta}}(x, y) = \inf_{x \in X} F_{\bar{\theta}}(x, y^*) \leq F_{\bar{\theta}}(x, y^*), \quad \forall x \in X. \quad (3.3)$$

よって, (3.3) より,

$$\bar{\theta} \leq G(x, y^*), \quad \forall x \in X.$$

ゆえに,

$$\bar{\theta} \leq \inf_{x \in X} G(x, y^*) \leq \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(x, y) = \underline{\theta}. \quad (3.4)$$

したがって, $\bar{\theta} = \underline{\theta}$ が成り立つ.

(ii) $\bar{F}_{\theta^*} \geq 0$ と $y^* \in Y$ がゲーム (GP_{θ^*}) の max-inf であることから Theorem 2.4 から $y^* \in Y$ はゲーム (GP) の max-inf である. \square

Theorem 3.2 Y はコンパクト凸集合とし, $f: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$, $g: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}_+$ は以下の条件を満たすものとする.

- (1) $\forall y \in Y, x \mapsto f(x, y)$, convex;
 (2) $\forall x \in X, y \mapsto f(x, y)$, continuous, concave;
 (3) $\forall y \in Y, x \mapsto g(x, y)$, concave;
 (4) $\forall x \in X, y \mapsto g(x, y)$, continuous, convex.

このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ と, $\bar{\theta} \geq 0$ ならば, 次を満たす $(x^*, y^*) \in X \times Y$ が存在する.

$$\theta^* - \varepsilon < G(x^*, y^*) < \theta^* + \varepsilon \quad (3.5)$$

Proof. Theorem 3.1 より, $\bar{\theta} = \underline{\theta} = \theta^*$ であることより, $\theta^* \geq 0$ である. よって, Lemma 2.1 と, Theorem 2.3 より, $y^* \in Y$ が存在し,

$$\underline{F}_{\theta^*} = \bar{F}_{\theta^*} = \inf_{x \in X} F_{\theta^*}(x, y^*) \geq 0$$

を満たす. よって, $F_{\theta^*}(x, y^*) \geq 0$ より, $\theta^* - \varepsilon < G(x, y^*)$ を得る.

一方, $\bar{\theta} < \theta^* + \varepsilon$ より, Lemma 2.1 から,

$$F_{\theta^* + \varepsilon}(x, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_{\theta^* + \varepsilon}(x, y) < 0$$

である. よって, $F_{\theta^* + \varepsilon}(x^*, y) < 0$ を満たす $x^* \in X$ が存在することから, 任意の $y \in Y$ に対して, $G(x^*, y) < \theta^* + \varepsilon$ を得る. したがって, $y^* \in Y$ に対しても成り立つので,

$$G(x^*, y^*) < \theta^* + \varepsilon$$

である. したがって以上から,

$$\theta^* - \varepsilon < G(x^*, y^*) < \theta^* + \varepsilon$$

である. □

References

- [1] J.-P. Aubin, *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, Revised Edition (North-Holland, Amsterdam 1982).
- [2] J.-P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusion*, Springer-Verlag, Grundlehren der math., (1984).
- [3] J.-P. Aubin and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, A Wiley-Interscience Publication, (1984).
- [4] J.-P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser Boston, (1990).
- [5] J.-P. Aubin, *Optima and Equilibria* (Springer-Verlag, New York, 1993).
- [6] V. Barbu and Th. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, Editura Academiei, Bucharest, Romania, (1986).
- [7] R.E. Bruck, A Simple Proof of The Mean Ergodic Theorem for Nonlinear Contractions in Banach Spaces, *Israel J. Math.* 32 (1979) 107-116.
- [8] Y. Kimura, Y. Sawasaki, and K. Tanaka, A Noncooperative Equilibrium for n -Person Game with Fractional Loss Function, *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, World Scientific, (1999) 44-51.
- [9] D.G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods* (John Wiley & Sons, inc., 1969).
- [10] Y. Sawasaki, Y. Kimura, and K. Tanaka, A Two-Person Zero-Sum Game with Fractional Loss Function, *Journal of Operations Research Society of Japan*, 43-1 (2000) 209-218.
- [11] K. Tanaka and K. Yokoyama, On ε -Equilibrium Point in a Noncooperative n -person Game, *J. Math. Anal. Appl.*, 160 (1991) 413-423.
- [12] R.T. Rockafellar, Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, *Duke Math. J.* 33 (1966) 81-89.