数理解析研究所講究録 1418 巻 2005 年 1-9

Commutative Hypergroups associated with Group Actions
(群作用に付随する可換ハイパー群)

奈良教育大学 河上 哲
Nara University of Education (Satoshi Kawakami)

[要約] ハイパー群の概念は、代数的な群概念を確率論的に拡張したものであり、数学の色々な所で昔から現われているが、それを統一的に扱うようになったのは、ごく最近のことである。本稿では、有限可換ハイパー群への有限アーベル群の群作用によって自然に定まる2つの可換ハイパー群の構成とその双対性について得られた結果を報告する。一方のハイパー群の構成には作用素環の手法を用い、他方のハイパー群の構成には表現論の手法を用いる。ここで得られた結果をひとつのモデルケースとして、将来、局所コンパクト可換ハイパー群への拡張を試みる。

[目次]

§1. 定義と準備

定義1 (Wildberger [3])

次の条件を満たす $K = (K, A(K))$を有限符号付きハイパー群と呼ぶ。

$A(K)$; $\mathbb{C}$上の$*$-環で、単位元c_0をもつ。

Kは$A(K)$の部分集合で、$K = \{c_0, c_1, \cdots, c_n\}$

(1) $c_0, c_1, \cdots, c_n$は、$A(K)$の線形空間としての基底

(2) $K^* = K$

(3) $c_i c_j = \sum_{k=0}^{n} n_{ij}^k c_k$ で

① $n_{ij}^k \in \mathbb{R}$ で $\sum_{k=0}^{n} n_{ij}^k = 1$　② $c_i = c_j^* \Leftrightarrow n_{ij}^0 > 0$
$c_i \neq c_j^* \Leftrightarrow n_{ij}^0 = 0$

このとき、$w(c_i) = \dfrac{1}{n_{ij}^0}$ $(c_i = c_j^*)$ をc_iのウェイトと呼び、$w(K) = \sum_{i=0}^{n} w(c_i)$ をKのウェイトと呼び、重要な役割を果す。

定義2 ([3])

$K = (K, A(K))$を有限符号付きハイパー群とする。

(1) 任意のi, jに対し、$c_i c_j = c_j c_i$ のとき、Kを可換であるという。

(2) 任意のi, j, kに対し、その構造定数n_{ij}^kが非負のとき、
Kは、ハイパー群と呼ばれる。

定義3.（[3]）

$K=(K, A(K))$ を有限符号付き可換ハイパー群とする。このとき、K 上の複素数値関数 χ が、

$$c_i c_j = \sum_{k=0}^{n} n_{ij}^{k} c_k \quad \text{に対し、} \quad \chi(c_i)\chi(c_j) = \sum_{k=0}^{n} n_{ij}^{k} \chi(c_k)$$

を満すとき、χ は K の指標と呼ばれる。K の指標全体の集合を $\hat{K}=\{\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_n\}$（但し、$\chi_0 \equiv 1$）と表すと、$\hat{K}$ も有限符号付き可換ハイパー群となる。$A(\hat{K})=\{K$ 上の複素数値関数全体$\}$ である。更に、$\hat{\hat{K}} \cong K$ という、双対性が成立している。

例（[3]）

有限群 G に対しては、いつでも自然にその共役類ハイパー群 $K(G)$ と指標ハイパー群 $K(\hat{G})$ が定義される。

(1) $K(G)=\{c_0, c_1, \cdots, c_n\}$

$C_0, C_1, \cdots, C_n$ を群 G の共役類とし、

$$c_i = \frac{1}{|C_i|}\sum_{g\in C_i} \delta_g \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

とおくと、ディラック δ_g の $\delta_g \delta_h = \delta_{gh}$ の演算で、$K(G)=\{c_0, c_1, \cdots, c_n\}$ は、有限可換ハイパー群となる。このとき、$w(c_i)=|C_i|$，$w(K(G))=|G|$ となっている。

(2) $K(\hat{G})=\{\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_n\}$

群 G の既約表現の同値類の集合（Gの双対）$\hat{G}$ を

$\hat{G}=\{\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_n\}$ ($\rho_0\equiv 1$) とするとき、

$$\chi_j(g)=\operatorname{tr}(\rho_j(g))=\frac{1}{\dim\rho_j}\operatorname{Tr}(\rho_j(g)) \quad (j=0,1,\cdots,n)$$

とおくと、これらの G の正規化された指標全体の集合 $K(\hat{G})=\{\chi_0,\chi_1,\cdots,\chi_n\}$ は G 上の類関数の積の演算で、有限可換ハイパー群となる。このとき、$w(\chi_j)=(\dim\rho_j)^2$, $w(K(\hat{G}))=|G|$ となっている。

注意 1. $K(\hat{G})\cong\widehat{K(G)}$, $K(G)\cong\widehat{K(\hat{G})}$ が成立している。

注意 2. 作用素環の立場で $K(G)$ (ii) のケース) を観察すると、G の正則表現入が生成する $*$-環 $A(G)=\lambda(G)''$ からその中心 $Z(G)=Z(A(G))=A(G)\cap A(G)'$ への自然な条件付き期待値 $E: A(G)\longrightarrow Z(G)$ による $A(G)$ の自然な基底 $\{\lambda_g\,;\,g\in G\}$ の像として $K(G)$ が得られる。但し $E(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{Ad}(g)(x)$。このときは、$A(K(G))=Z(G)$ である。この視点と発想が、§3 におけるハイパー群の構成法へと導いていることを、ここで付記しておきたい。

§2. ハイパー群への群作用と不動点ハイパー群

G を有限群、$K=(K,A(K))$ を有限可換ハイパー群とする。このとき、群 G のハイパー群 K への作用 $\alpha: G\longrightarrow \operatorname{Aut}(K)$ は、群 G の $*$-環 $A(K)$ への作用を誘導する。このとき、$K=\{c_0,c_1,\cdots,c_n\}$ の各要素 c_i に対し、

$$d_j = \bar{c_i} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \alpha_g(c_i)$$

として、$K^\alpha = \{d_0, d_1, \cdots, d_\ell\}$ $(d_0 = c_0)$ とおくと、K^αは、$A(K^\alpha) = A(K)^\alpha$（不動点環）を満たす有限可換ハイパー群となる。$K$の双対ハイパー群 $\hat{K} = \{\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_n\}$に対しても群$G$の$\hat{K}$への作用$\hat{\alpha}$が、$\hat{\alpha}_g(\chi_j)(c_i) = \chi_j(\alpha_g^{-1}(c_i))$により、定義され、$\hat{K}$の不動点ハイパー群 $\hat{K}^{\hat{\alpha}}$ も自然に得られる。このとき、$\hat{K}^{\hat{\alpha}} \cong \widehat{K^\alpha}$，$K^\alpha \cong \widehat{\hat{K}^{\hat{\alpha}}}$ も成立している。

§3、群作用に付随して定まるハイパー群の構成とその双対性

本節では、群Gを有限アーベル群とし、$H = \{c_0, c_1, \cdots, c_n\}$を有限可換ハイパー群とする。群$G$のハイパー群$H$への作用$\alpha : G \longrightarrow Aut(H)$が与えられたとする。このとき、作用$\alpha$は、$*$-環$A(H)$への作用 $\alpha : G \longrightarrow Aut(A(H))$と、$H$の双対$\hat{H}$への作用$\hat{\alpha} : G \longrightarrow Aut(\hat{H})$を誘導する。$\hat{H}$を$\hat{H} = \{\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_n\}$とすると、$A(H)$の中に互いに直交する射影$e_0, e_1, \cdots, e_n$が $c_i e_j = \chi_j(c_i) e_j$ の関係式を満す形で一意的に定まる。このとき、$\hat{\alpha}_g(\chi_j) = \chi_j \Leftrightarrow \alpha_g(e_j) = e_j$ などが成立している。$e_0, e_1, \cdots, e_n$を用いたハイパー群Hの調和解析（フーリエ変換）は、重要な役割を果すが、本稿では省略する。

(1) $K(H, G, \alpha)$ の構成

有限アーベル群 G の可換 *-環 $A(H)$ の作用 α により、その接合積 $A(H) \rtimes_\alpha G = \{ \sum_{g \in G} a_g \lambda_g \,;\, a_g \in A(H) \}$ が自然に定義される。そこで、$A(H) \rtimes_\alpha G$ の各要素 x に対し、$F(x)$ を、

$$F(x) = \frac{1}{w(H)} \frac{1}{|G|} \sum_{i=0}^{n} \sum_{g \in G} w(c_i)\, c_i \lambda_g x \lambda_g^* c_i^*$$

とおくと、F は $A(H) \rtimes_\alpha G$ からその中心 $Z(A(H) \rtimes_\alpha G)$ への作用素値ウェイトであり、$A(H)$ の単位元 c_0 の F による像 $F(c_0)$ は、

$$F(c_0) = \sum_{j=0}^{n} \langle \chi_j, \chi_j \rangle e_j = \sum_{j=0}^{n} w(\chi_j)^{-1} e_j \equiv a > 0$$

で与えられる。そこで、$E(x) = F(a^{-\frac{1}{2}} x a^{-\frac{1}{2}}) = F(a^{-1} x) = a^{-1} F(x)$ とおくと、$A(H) \rtimes_\alpha G$ から $Z(A(H) \rtimes_\alpha G)$ への自然な条件付き期待値 E が定まる。そこで、$A(H) \rtimes_\alpha G$ の基底 $\{ c_i \lambda_g \,;\, i = 0, 1, \cdots, n,\ g \in G \}$ のこの期待値 E による像 $E(c_i \lambda_g)$ の集合を $K(H, G, \alpha)$ と表す。ハイパー群 H の調和解析の結果を用いると、$E(c_i \lambda_g)$ の実態が、

$$E(c_i \lambda_g) = \overline{c_i}\, e(g) \lambda_g$$

であることが判る。但し、$\overline{c_i} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha_g(c_i) \in H^\alpha$ で $e(g) = \sum_{j \in J(g)} e_j$

$J(g) = \{ j \,;\, \hat{\alpha}_g(\chi_j) = \chi_j \} = \{ j \,;\, \alpha_g(e_j) = e_j \}$ である。H が有限アーベル群のときは、$K(H, G, \alpha)$ は、H の G による半直積群の共役類ハイパー群 $K(H \rtimes_\alpha G)$ に一致している。

(2) $K(\hat{H}, \hat{G}, \hat{\alpha})$ の構成

有限アーベル群 G の H の双対 $\hat{H} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ への作用 $\hat{\alpha}$ による軌道 (orbit) の集合を $C_0, C_1, \cdots, C_\ell$ とする。つまり、$C_j = \{\hat{\alpha}_g(x) ; g \in G\}$ (ある $x \in \hat{H}$ で)。このとき、$x \in C_j$ に対し、$G_j = \{g \in G ; \hat{\alpha}_g(x) = x\}$ とおくと、G_j は C_j のみによって定まる G の部分群で、更に、$B(j) = \hat{G}/G_j^{\perp} \cong \hat{G_j}$ とおく。更に、$\tau_j = \frac{1}{|G_j^{\perp}|} \sum_{\tau \in G_j^{\perp}} \tau$ ($G_j^{\perp}$ は G_j の零化群) とおく。このとき、$\hat{H}^{\hat{\alpha}} = \{\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_\ell\}$　$\rho_j = \frac{1}{|C_j|} \sum_{x \in C_j} x = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \hat{\alpha}_g(x)$ $(x \in C_j)$ であることに注意して、

$$K(\hat{H}, \hat{G}, \hat{\alpha}) = \{\rho_j \otimes \tau \tau_j ; j = 0, 1, \cdots, \ell, \tau \in B(j)\}$$

とおく。この構成法は、半直積群の誘導表現と既約表現を念頭においた方法である。実際、H が有限アーベル群の時には、$K(\hat{H}, \hat{G}, \hat{\alpha})$ は、H の G による半直積群 $H \rtimes_\alpha G$ の指標ハイパー群 $K(\widehat{H \rtimes_\alpha G})$ に一致している。

定義：regular な作用

$x_i, x_j \in \hat{H}$ が $x_i x_j = \sum_{k=0}^{n} m_{ij}^k x_k$ となっているとき、もし、$\hat{\alpha}_g(x_i) = x_i$, $\hat{\alpha}_g(x_j) = x_j$ で $m_{ij}^k \neq 0$ であれば、$\hat{\alpha}_g(x_k) = x_k$ が任意の $g \in G$ で成立している時、我々は、作用 $\alpha : G \to Aut(H)$ を "regular" と呼ぶことにする。

定理（河上）

有限アーベル群Gの有限可換ハイパー群Hへの作用αが$regular$のとき、次が成立する。

(1) $K(H, G, \alpha)$ は有限可換ハイパー群である。

(2) $K(\hat{H}, \hat{G}, \hat{\alpha})$ は有限可換ハイパー群である。

(3) $K(\hat{H}, \hat{G}, \hat{\alpha}) \cong \widehat{K(H, G, \alpha)}$

§4. ハイパー群の指数とエントロピー

$K = (K, A(K))$を有限可換ハイパー群とし、

$K = \{c_0, c_1, \cdots, c_n\}$, $\hat{K} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ とする。

このとき、$*$-環$A(K)$の互いに直交する$minimal$な射影$e_0, e_1, \cdots, e_n$が、$c_i e_j = x_j(c_i) e_j$により定まる。今、$A(H)$上の$state$ φが、$\varphi(e_j) = \frac{w(x_j)}{w(K)}$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$を満たしているとき、φをKの標準$state$と呼ぶことにする。このとき、Kの指数$index(K)$とKのエントロピー$H_\varphi(K)$が

$$\begin{cases} index(K) = index\,\varphi = \sum_{j=0}^{n} \frac{w(K)}{w(x_j)} e_j \\ H_\varphi(K) = H_\varphi(A(K)) = \sum_{j=0}^{n} - \frac{w(x_j)}{w(K)} \log \frac{w(x_j)}{w(K)} \end{cases}$$

が定義される。

今、2つの有限可換ハイパー群$K = (K, A(K))$と$K_0 = (K_0, A(K_0))$に対し、$A(K_0)$は、$A(K)$の部分$*$-環（単位元は共有）であり、条件付き期待値$E : A(K) \longrightarrow A(K_0)$により、$K_0 = E(K)$であ

るとする。このとき、次が成立する。

定理　$K=(K, A(K))$, $K_0=(K_0, A(K_0))$, $E: A(K)\to A(K_0)$ は、上述のものとする。

(1) Kの標準 state φ の K_0への制限 φ_0 は、K_0の標準stateである。

(2) $\mathrm{index}(K) = (\mathrm{index}\, E)(\mathrm{index}(K_0))$

(3) $H_\varphi(K) = H_\varphi(K \mid K_0) + H_{\varphi_0}(K_0)$

注意　Kが必ずしも可換でない場合でも、多くの典型的なケースでは、上の定理が成立している。

参考文献

[1] Bloom, W. R. & Heyer, H. ; Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups, 1995, Walter de Gruyter, de Gruyter Studies in Mathematics 20.

[2] Kawakami, S. and Ito, W. ; Crossed Products of Commutative Finite Hypergroups, 1999, Bull. Nara Univ. Educ., Vol 48, No 2.

[3] Wildberger, N. J. ; Finite commutative hypergroups and applications from group theory to conformal field theory. Applications of hypergroups and related measure algebras, (Joint Summer Research Conference, Seattle, 1993), American Mathematical Society, Providence, 1994.