

可積分方程式をそっと壊してみよう

Let us break integrable equations softly

早稲田大学・理工学研究科 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

渡部 浩幸 (WATABE Hiroyuki)

Graduate School of Science and Engineering,
Waseda University

1 はじめに

超離散化手法は、和・積・商で構成される差分方程式を極限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} + \dots) = \max(A, B, \dots) \quad (1)$$

によって区分的に線形（アフィン）な差分方程式，すなわち超離散方程式に変換する手法である [1]。この手法は可積分方程式において非常にうまく機能し，双線形化・ソリトン解（あるいは楕円関数解）・保存量などといった可積分性にかかわる数理構造を保ったまま超離散化できる。しかしながら，非線形方程式で圧倒的多数を占める非可積分方程式に対しては，その切れ味は鈍りがちになる。なぜならば，手法によって形式的に超離散方程式を得ることができたとしても，それをもって何を主張できるかが判然としないからである。超離散化には解を近似するという機能はなく，解の見かけは全く違いますが実は同じ代数構造であったというように，構造の対応の提示に強みがある。解の構造について可積分方程式ほど明示的なものが非可積分方程式にないので，超離散化において示すことのできる対象が少ないのである。

しかしながら一般論はしばしば危険であり，非可積分方程式の中にも明示可能な構造を持っている方程式がたくさんある。また，可積分系理論についても，可積分性を少しでも壊してしまうと何も説明できなくなるという脆弱性があり，もうちょっと何とかならないものかと感じることもある。

このような状況に対して，可積分の側から非可積分の方へ超離散方程式を利用しつつ慎重に駒を進めれば，非可積分方程式の構造について有益な情報をもっと得られるのではないかというのが筆者の期待である。超離散方程式はその出所を問わなければ区分線形方程式の一種にすぎず，

- 局所的には線形理論で解析できる
- 数値計算で丸め誤差が問題になることが少なく，長いスパンの時間発展を追える
- 方程式の特徴量を式で表現しやすく，数値計算・数式処理が式表現の探索に役立つ

という特徴がある。これらの特徴のおかげで体系化した理論に縛られずに、つまり何も持たずに解の解析ができる。テント写像などの区分別形写像がカオス理論で重宝される理由のひとつもここにある。

しかしながら、区分別形方程式だけを解析の対象にすると、場合分けに終始して解の数理構造が見えないことが多い。そこで差分方程式と超離散方程式をセットにして解析を行うと、差分で数理構造を、超離散で実際の解析をという役割分担が期待できる。このような思想を大事にするならば、とりあえずは解構造がよくわかっており、超離散化もたやすい可積分方程式の周辺に良い例があると考えるのは自然であろう。そして方程式を少しずつ壊し、非可積分方程式の方向に可積分系理論を連続的に移行できないだろうか。

本稿では、上のような考え方に基づき、差分可積分方程式を少しだけ壊すという試みを行う。この際に重要なのは、差分・超離散の方程式が同時に得られるようなものを選ぶということである。現在までに得た方程式については、残念ながら解構造について述べられることはあまりなく、そもそも壊し方に必然性はない。それでも差分・超離散双方の構造が呼応していることは明らかであり、今後の議論の展開の礎としたい。

2 可積分方程式をそっと壊した例

まず、以下の差分方程式を考える。

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{x_{n-1}}. \quad (2)$$

n は時刻を表す整数変数である。この方程式は、可積分離散写像として知られる Quispel-Robert-Thompson (QRT) 系の非常に特別な場合になっている。解の時間発展は以下の通りであり、任意の初期値からの周期が常に5となる。

$$x_2 = \frac{1 + x_1}{x_0}, \quad x_3 = \frac{1 + x_0 + x_1}{x_0 x_1}, \quad x_4 = \frac{1 + x_0}{x_1}, \quad x_5 = x_0, \quad x_6 = x_1. \quad (3)$$

(2) は超離散化可能な形をしており、微小パラメータ ε を含む変数変換

$$x_n = e^{X_n/\varepsilon} \quad (4)$$

をほどこした後に $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をとると超離散方程式

$$X_{n+1} = \max(0, X_n) - X_{n-1} \quad (5)$$

が得られる。上の変数変換が実数の範囲で可能となるためには、 $x_n > 0$ が必要である。もし初期値 x_0, x_1 がともに正であるなら、その後の任意の時刻で x_n は正であることが (2) よりすぐにわかる。以降では差分と超離散の構造の対応を重視する

ので, $x_n > 0$ であると仮定しておく. このとき解も同様にして超離散化可能であり, (3)より

$$\begin{aligned} X_2 &= \max(0, X_1) - X_0, & X_3 &= \max(0, X_0, X_1) - X_0 - X_1, \\ X_4 &= \max(0, X_0) - X_1, & X_5 &= X_0, & X_6 &= X_1 \end{aligned} \quad (6)$$

となる. \max についての基本的な公式を用いれば, 方程式(5)自身からもこの解を示せる. つまり, 方程式と解のセットを矛盾なく超離散化できる.

さて, (2), (5)の右辺の x_n, X_n をそれぞれ x_{n-5}, X_{n-5} に置き換えると次式が得られる.

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_{n-5}}{x_{n-1}}, \quad (7)$$

$$X_{n+1} = \max(0, X_{n-5}) - X_{n-1}. \quad (8)$$

もちろん(7)から(8)への超離散化は元の場合と同様に可能である. また, 元の方程式の周期5の解が上の方程式を満たすことはその作り方から明らかである. 解空間の次元が高いので, それ以外の解もたくさん存在するが, $x_n (X_n)$ の依存関係より, 奇数時刻と偶数時刻の $x_n (X_n)$ はお互い無関係に定まっていることがわかる. そこで, 上の方程式は

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_{n-2}}{x_n}, \quad (9)$$

$$X_{n+1} = \max(0, X_{n-2}) - X_n \quad (10)$$

と書き換えても構わず, 解空間の次元は3であり, 元の(2), (5)の次元2からひとつ増えただけである.

解のふるまいの例を以下に示す. まず, (9)の初期値を $x_0 = 3, x_1 = 2, x_2 = 1$ として数値計算を行うと, x_n は

$$\begin{aligned} &3, & 2, & 1, & 4, \\ &0.75, & 2.66667, & 1.875, & 0.933333, & 3.92857, \\ &0.731818, & 2.64182, & 1.8656, & 0.928292, & 3.92314, \\ &0.730434, & 2.63993, & 1.86488, & 0.927907, & 3.92273, \\ &0.730328, & 2.63978, & 1.86482, & 0.927878, & 3.92269, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

となり, 急速に周期5の周期解に漸近していることがわかる. 一方, (10)の初期値を $X_0 = 3, X_1 = 2, X_2 = 1$ ととると (x_n と X_n の初期値が同じであることにさほど意味はない),

$$\begin{aligned} &3, & 2, & 1, & 2, & 0, \\ &1, & 1, & -1, & 2, & -1, \\ &1, & 1, & -1, & 2, & -1, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

となり, $n = 5$ 以降で周期5の周期解になっている.

実は任意の初期値に対して, (9) は周期5の周期解に漸近し, (10) は周期5の周期解そのものに落ち込むことを, 陽なりャプノフ関数によって示すことができる. 記号が煩雑になるので $x_{n-2} = x, x_{n-1} = y, x_n = z$ などと表すことにしよう. すると, それぞれのりャプノフ関数は

$$l(x, y, z) = \frac{xyz}{1+x+z} + \frac{1+x+z}{xyz}, \quad (13)$$

$$L(X, Y, Z) = |\min(X+Y, Y+Z, X+Y+Z)| \quad (14)$$

である. (9) より

$$l(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) - l(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) = \frac{(xyz + yz + x + z + 1)(xyz - x - z - 1)^2}{xyz(x+1)(x+z+1)(yz+x+z+1)} \quad (15)$$

となり, 初期値 $x_0 \sim x_2$ がすべて正で $xyz - x - z - 1 \neq 0$ なら, l は n について単調減少である. また, $n \rightarrow \infty$ で $l \rightarrow 0$ となることも示せ,

$$xyz - x - z - 1 = 0 \quad (16)$$

すなわち

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + 1}{x_{n-1}x_n - 1} \quad (17)$$

が表す解に漸近することがわかる. この方程式は (2) の解 (3) の偶数・奇数格子上的の値が満たす方程式であり, 固定点以外は周期5の周期解となる.

同様にして

$$L(X_{n-2}, X_{n-1}, X_n) \geq L(X_{n-1}, X_n, X_{n+1}) \quad (18)$$

を示すことができ, さらに有限の時刻以降

$$\min(X_{n-2} + X_{n-1}, X_{n-1} + X_n, X_{n-2} + X_{n-1} + X_n) = 0 \quad (19)$$

が成り立ち, これを用いて (10) の解が周期5の周期解に落ち込むことを示せる.

以上の結果は, 可積分方程式を『うまくそつと壊す』ならば, 解に強い数理構造が残る可能性を示唆している. 元の可積分方程式の解は相空間内で保存量一定の曲線にのっているのに対し, 壊した方程式はそのような曲線のひとつに向かって近づいていくのである. また, 上の結果を得るのに差分方程式だけではとても難しく, 超離散の結果を参考にして差分の方の結果を得たという経緯も付け加えておく. すなわち, 超離散方程式の解析のしやすさが, 差分方程式に対する知見をも生み出してくれるのである.

3 別の壊し方

前節は周期が5の周期性のある方程式を壊してみた. 一定周期という強い構造をもつ素材に対してその周期性を利用して壊したので, 得られたものにも明示的

なアトラクタとリアプノフ関数が存在するという結果になった。今度はもうちょっと難しい例に挑戦する。素材となる方程式は

$$x_{n+1} = \frac{c + x_n}{x_{n-1}} \quad (20)$$

である。定数 c が 1 のとき (2) に帰着するが、 $c \neq 1$ のとき一定周期の解を持たない。しかしながらこの方程式は可積分であり、 $h(x_{n-1}, x_n) = h(x_n, x_{n+1})$ となる保存量

$$h(x, y) = x + y + (c + 1) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{c}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad (21)$$

が存在し、解を楕円関数で表現できる。なお、この節でも超離散化可能な条件、すなわち $x_n > 0$ かつ $c > 0$ を仮定する。

解は相平面 (x_{n-1}, x_n) 内で初期値 x_0, x_1 より定まる

$$h(x, y) = h(x_0, x_1) \quad (22)$$

の閉曲線軌道上を動く。 $c = 2$ の場合の複数の軌道を図 1 に示す。

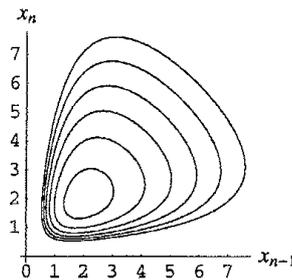


図 1: (20) の相平面内の軌道 ($c = 2$)

超離散化は $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$, $c = e^{C/\varepsilon}$, $\varepsilon \rightarrow +0$ によって得られ、方程式と保存量はそれぞれ

$$X_{n+1} = \max(C, X_n) - X_{n-1}, \quad (23)$$

$$H(X, Y) = \max(X, Y, -X, -Y, C - X, C - Y, C - X - Y, X - Y, Y - X) \quad (24)$$

となる。 $C = 2$ の場合の相平面内の複数の解軌道を図 2 に示す。解の周期は軌道毎に異なり、有限周期になるには軌道が特定の条件を満たす必要がある。

次に、(20) を以下のように変更する。

$$x_{n+1} = \frac{h(x_{n-1}, x_n)}{h_0} \cdot \frac{c + x_n}{x_{n-1}} \quad (25)$$

h_0 は正の定数である。この方程式はもはや可積分ではない。しかしながら、もし初期値が $h(x_0, x_1) = h_0$ を満たすなら、 $h(x_0, x_1)/h_0 = 1$ より、上の方程式は元

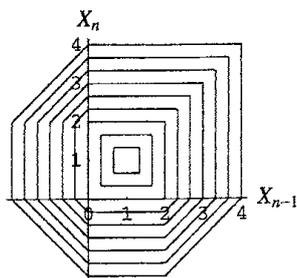


図 2: (23) の相平面内の軌道 ($C = 2$)

の (20) と等価になり, それ以降の時刻の解も常に $h(x_{n-1}, x_n) = h_0$ を満たすことがわかる. すなわち相平面内で $h(x, y) = h_0$ の曲線は解軌道になる. では, それ以外の初期値から出発するとどうなるであろうか. $c = 2$, $h_0 = h(1, 1)$ として $(x_0, x_1) = (2, 2), (10, 10)$ から時間発展を計算した結果を図 3 に示す. 時間とともに解が曲線 $h(x, y) = h_0$ に巻き付いていく様子が観察できる. つまりこの曲線がアトラクタの役割を果たしている.

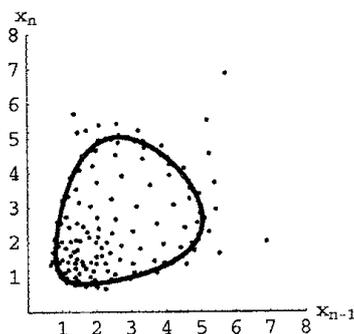


図 3: (25) の解の例. $c = 2$, $h_0 = h(1, 1)$, 初期値 $(x_0, x_1) = (2, 2), (10, 10)$

固定点以外の任意の解がアトラクタに漸近することの証明は今のところできていない. しかし, さまざまな初期値からの数値計算を行った結果, どうやらこのことは正しいようである. なお, 現在わかっていることは以下の通りである. (任意の n で $x_n > 0$ という前提はここでも用いている.)

- 固定点はひとつしか存在せず, $h(x, y) = h_0$ の軌道の内側にある.
- $x_n > 0, x_{n+1} > 0$ としたとき $x_{n-1} > 0$ となるような x_{n-1} はひとつしかないか, 存在しない. したがって正の解だけを対象にするなら可逆性が成り立つ. また, 相平面内で $h(x, y) = h_0$ の軌道にそれ以外の点から飛び込んでくることはない.

- したがって $h(x, y) < h_0$ の領域の点は常にその領域内にとどまる. $h(x, y) > h_0$ の領域についても同様である.

では, 上の方程式を超離散化するとどうなるであろうか. (25) を超離散化すると

$$X_{n+1} = H(X_{n-1}, X_n) - H_0 + \max(C, X_n) - X_{n-1} \quad (26)$$

が得られる. $C = 2, H_0 = H(3, 3)$ として $(X_0, X_1) = (1/3, 1/2), (2, 7)$ から時間発展を数値計算した結果を図 4 に示す. この場合も時間とともに解が曲線 $H(X, Y) = H_0$ に近づき, さらに有限の時刻でその曲線上に落ち込む様子が観察できる. 超離散版の方は差分と異なり解の漸近性の証明は容易であり, 固定点以外はすべて有限の時刻でアトラクタに落ち込むことを示せる.

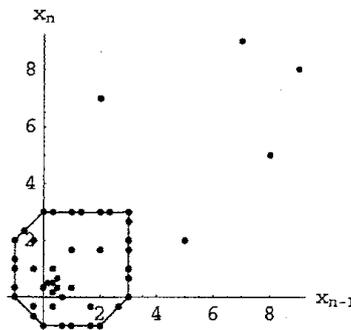


図 4: (26) の解の例. $C = 2, H_0 = H(3, 3)$, 初期値 $(X_0, X_1) = (1/3, 1/2), (2, 7)$

では, 前節のようにリャプノフ関数を明示可能かどうかという問題を考える. まず超離散版の方程式については, 以下の理由により可能であると考えられる. (26) は各 (X_{n-1}, X_n) に対して局所的に線形の方程式であり, 方程式が異なるタイプになるような相平面内の領域は有限個に分かれるだけである. また, ある領域から別の領域への写像はアフィンであり, それら領域をにらみながら手作りでリャプノフ関数を作るのはさほど難しくない. ただし, 別の方程式では既に結果を得ているが, (26) については場合分けの数が多く手間がかかり, 現在作業が進行中である.

次に差分版の方程式 (25) についてであるが, これは相平面をにらんでいても作ることとはまず不可能である. 現在わかっていることはそれほど多くない. たとえば, 方程式の作り方から $h(x, y)$ 自身がリャプノフ関数であることが期待できる. そこで, $c = 2, h_0 = h(1, 1), x_0 = x_1 = 8$ の場合に $h(x_{n-1}, x_n)$ の時間変化をプロットしたものを図 5 に示す. h は n について単調減少ではなく, 振動しながら減衰している. よって h 自身はリャプノフ関数ではない.

次に, アトラクタへの漸近に関して前に述べたことのうち,

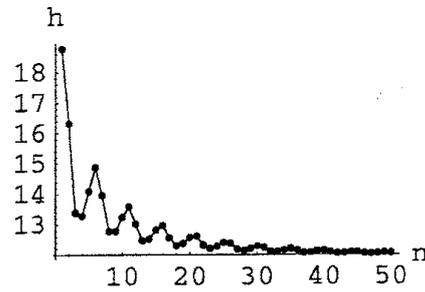


図 5: (25) における $h(x_{n-1}, x_n)$ の時間変化. $c = 2, h_0 = h(1, 1), (x_0, x_1) = (8, 8)$

- $h(x, y) < h_0$ の領域の点は常にその領域内にとどまる. $h(x, y) > h_0$ の領域についても同様である.

を考慮すると,

$$l(x_{n-1}, x_n) = \sum_{k=1}^n |h(x_{k-1}, x_k) - h_0| \quad (27)$$

が $h(x, y) = h_0$ 以外では単調増加であることがわかる. なお, 正の解に限定しているので, n を指定して x_{n-1}, x_n が与えられれば可逆性より以前の履歴はすべてわかる. よって l は x_{n-1}, x_n にしか依存しない. $c = 2, h_0 = h(1, 1)$ の場合に, 初期値をアトラクタの内側 $((x_0, x_1) = (3, 3))$ と外側 $((x_0, x_1) = (8, 8))$ にとったときの $l(x_{n-1}, x_n)$ の時間変化を図 6 (a), (b) にそれぞれ示す.

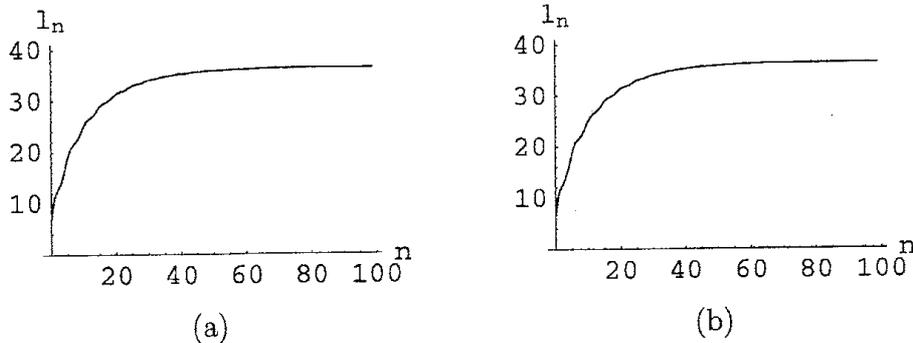


図 6: (27) の $l(x_{n-1}, x_n)$ の時間変化. $c = 2, h_0 = h(1, 1)$ とし, (a) $(x_0, x_1) = (3, 3)$, (b) $(8, 8)$

両図とも l が一定値に収束するように見える. l が $n \rightarrow \infty$ で収束するためには定義より $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_{n-1}, x_n) = h_0$ が必要条件であるので, l が収束することはアトラクタに漸近することよりも厳しい条件となっている. なお, l を x_{n-1}, x_n の関数として定義することは可逆性より原理的に可能で, 根号 ($\sqrt{\quad}$) を多重に含む和として形式的に書き下せるが, そこから有益な情報は得られなかった.

4 他の例

前節では可積分方程式を保存量によって『そっと壊し』、アトラクタを持つ差分および超離散方程式を同時に得ることができた。そこで、同じような方法で他の方程式について試みた例と、(20)に異なる変形を加えた例を示す。ただし、数値計算によって解の様子を示すだけにとどめ、厳密な結果等については省略する。また、どれも超離散化可能であるが、超離散方程式の結果については省略する。

4.1 QRT系の別のタイプ

QRT系の別のタイプに

$$x_{n+1} = \frac{c + x_n}{x_{n-1}x_n^2} \quad (28)$$

がある。保存量は

$$h(x, y) = xy + \frac{c}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (29)$$

である。これらを用いて前節と同様の形で作った方程式

$$x_{n+1} = \frac{h(x_{n-1}, x_n)}{h_0} \cdot \frac{c + x_n}{x_{n-1}x_n^2} \quad (30)$$

の解の時間発展の様子を図7に示す。

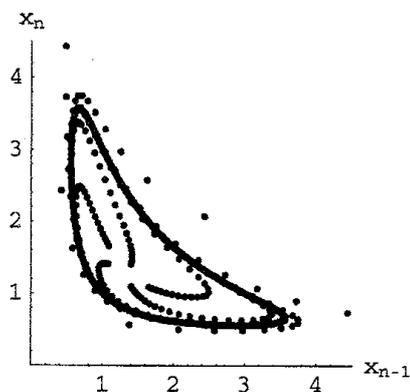


図7: (30)の解の例

4.2 線形化可能な周期4の系

方程式

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}} \quad (31)$$

は、初期値から

$$x_0, x_1, \frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_1}, x_0, x_1, \dots \quad (32)$$

という時間発展を行い、一般に周期4の解を持つ。また $y_n = \log x_n$ とすれば

$$y_{n+1} = -y_{n-1} \quad (33)$$

が得られる。このように(31)は線形化できる方程式であるが、形式的な保存量

$$h(x, y) = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (34)$$

を考えることができる。これを用いて作った非線形方程式

$$x_{n+1} = \frac{h(x_{n-1}, x_n)}{h_0} \cdot \frac{1}{x_{n-1}} \quad (35)$$

はやはりアトラクタを持つ。解の時間発展の様子を図8に示す。 $h(x, y) = h_0$ のアトラクタ上では周期4の周期解であるので、漸近した解はアトラクタのまわりをとびとびに回っている。

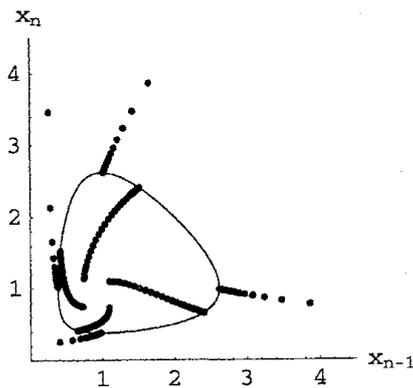


図 8: (31) の解の例

4.3 (20) の別の壊し方 (その1)

前節で取り扱った方程式(20)すなわち

$$x_{n+1} = \frac{c + x_n}{x_{n-1}}$$

とその保存量

$$h(x, y) = x + y + (c+1)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{c}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

を用いて、今度は

$$x_{n+1} = \frac{h_0}{h(x_{n-1}, x_n)} \cdot \frac{c + x_n}{x_{n-1}} \quad (36)$$

としてみる。こうしても $h(x, y) = h_0$ のアトラクタが存在することに変わりはなく、解は図 9 のような時間発展を行う。

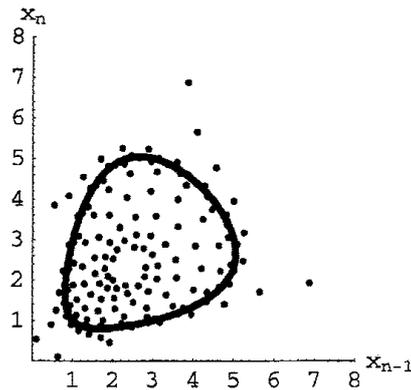


図 9: (36) の解の例

4.4 (20) の別の壊し方 (その 2)

さらに、(20) を

$$x_{n+1} = \frac{c \frac{h(x_{n-1}, x_n)}{h_0} + x_n}{x_{n-1}} \quad (37)$$

と変形しても、 $h(x, y) = h_0$ がアトラクタである。解の例を図 10 に示す。

4.5 (20) の別の壊し方 (その 3)

最後の例は、(20) を

$$x_{n+1} = \frac{\frac{1}{x_{n-1} + x_{n-1}} + x_n}{x_{n-1}} \quad (38)$$

と変形する。この場合のアトラクタは元の (20) の保存量と無関係になり、明示できない。しかしながら図 11 に示された数値計算結果はアトラクタが存在していることを示唆している。

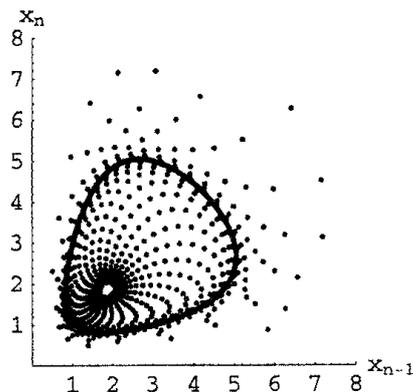


図 10: (37) の解の例

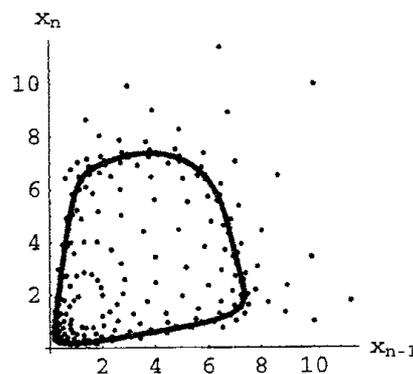


図 11: (38) の解の例

4.1, 4.2の結果は, 前節の壊し方が他の可積分方程式にも有効であることを支持している. 4.3, 4.4の結果は, この壊し方以外のものが存在することを意味している. さらに4.5の結果は, アトラクタの明示性を犠牲にするなら, もっといろいろな壊し方があることを示している.

5 さらなる応用—超離散化可能なパターン形成方程式

この節までは, アトラクタが存在する超離散化可能な2階常差分方程式に焦点を当ててきた. 可積分方程式を壊すという試みにおいては, 偏差分のソリトン方程式に同様の変形を行うことができれば面白いであろう. しかしながら, 独立な保存量が可算無限個あり, それら保存量は一般に空間変数に関する和分の形になってしまう. 今のところ, ソリトン方程式のうまい壊し方について手がかりすらな

い状態である。

ところで、アトラクタが存在するということから、別の種類の応用が考えられる。時間変数 n の他に空間変数を導入し、空間の拡散効果を擬似的に導入することで反応拡散方程式のようなパターンを形成する方程式を作ることができるのである。このアイデアに基づいていくつかの具体例を作ること成功しているが、その典型のものをひとつ取り上げて以下に説明する。

まず、元になる方程式は (37) すなわち

$$x_{n+1} = \frac{c \frac{h(x_{n-1}, x_n)}{h_0} + x_n}{x_{n-1}},$$

$$h(x, y) = x + y + (c+1) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{c}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

である。(同じ試みを (25) についても行ったがうまくいかなかった。) 上の方程式に 2次元の空間変数 i, j を導入し、

$$x_{ij}^{n+1} = \frac{c \frac{h(x_{ij}^{n-1}, x_{ij}^n)}{h_0} + \frac{x_{i+1j}^n + x_{i-1j}^n + x_{ij+1}^n + x_{ij-1}^n + x_{ij}^n}{5}}{x_{ij}^{n-1}} \quad (39)$$

とする。すなわち状態量 x は時刻 n だけでなく空間座標 i, j にも依存する。方程式中で i, j 依存性があるのは 5 を分母とする分数の部分であり、この分数は格子点 (i, j) とその最近接点における x の平均値を表している。そして (39) は以下の特徴を持っている。

- 平均値の項により擬似的に拡散効果が導入されている。
- x_{ij}^n が i, j によらないような初期値からの解は常に i, j によらない。すなわち空間一様解が存在し、このとき $x_{ij}^n = \bar{x}_n$ とすると \bar{x}_n は (37) にしたがう。
- 超離散化可能である。 $x_{ij}^n = e^{X_{ij}^n/\epsilon}$, $c = e^{C/\epsilon}$, $\epsilon \rightarrow +0$ とすると、(39) から

$$X_{ij}^{n+1} = \max(C + H(X_{ij}^{n-1}, X_{ij}^n) - H_0, X_{i+1j}^n, X_{i-1j}^n, X_{ij+1}^n, X_{ij-1}^n, X_{ij}^n) - X_{ij}^{n-1},$$

$$H(X, Y) = \max(X, Y, -X, -Y, C - X, C - Y, C - X - Y, X - Y, Y - X) \quad (40)$$

が得られる。

(39), (40) に対して数値計算を行った例を示す。まず差分版の方程式 (39) については $c = 2$, $h_0 = h(1, 1)$ とし、初期値 x_{ij}^0, x_{ij}^1 のバックグラウンド値として空間一様解の固定点の値、すなわち

$$x = \frac{c \frac{h(x, x)}{h_0} + x}{x} \quad (41)$$

を満たす x を代入する。そして領域の中央の値をやや高めに設定すると図 12 に示すようなターゲットパターンが観察された。また、同じバックグラウンド値に対して各点で乱数の摂動を加えた初期値から出発すると、図 13 に示すようなスパイラルパターンが観察された。

さらに、超離散版の方程式 (40) に対して $C = 3$, $H_0 = H(1, 1) = 3$ としたときの数値計算結果を示す。このときのバックグラウンド値は $X = 1$ であり、うまく初期値を選ぶと任意の i, j, n に対して $0 \leq X_{ij}^n \leq 3$ の範囲に値を限定できる。図 14 にターゲットパターンを、図 15 にスパイラルパターンを示す。両図とも各格子点での値を小さな正方形で表しており、0 から 3 までの値に対応して黒から白の階調色を割り当てている。ターゲット、スパイラルの両パターンとも最終的に周期 4 の周期解になっている。

なお、このようなパターンを生成する区分線形型の方程式として、たとえば

$$X_{ij}^{n+1} = \max(X_{i+1j}^n, X_{i-1j}^n, X_{ij+1}^n, X_{ij-1}^n, X_{ij}^n) - X_{ij}^{n-1} \quad (42)$$

というような非常にシンプルなものがある [1]。 (40) の保存量から由来する項を除けば同じ形をしている。

参考文献

- [1] 広田良吾・高橋大輔, 『差分と超離散』 (共立出版, 2003)

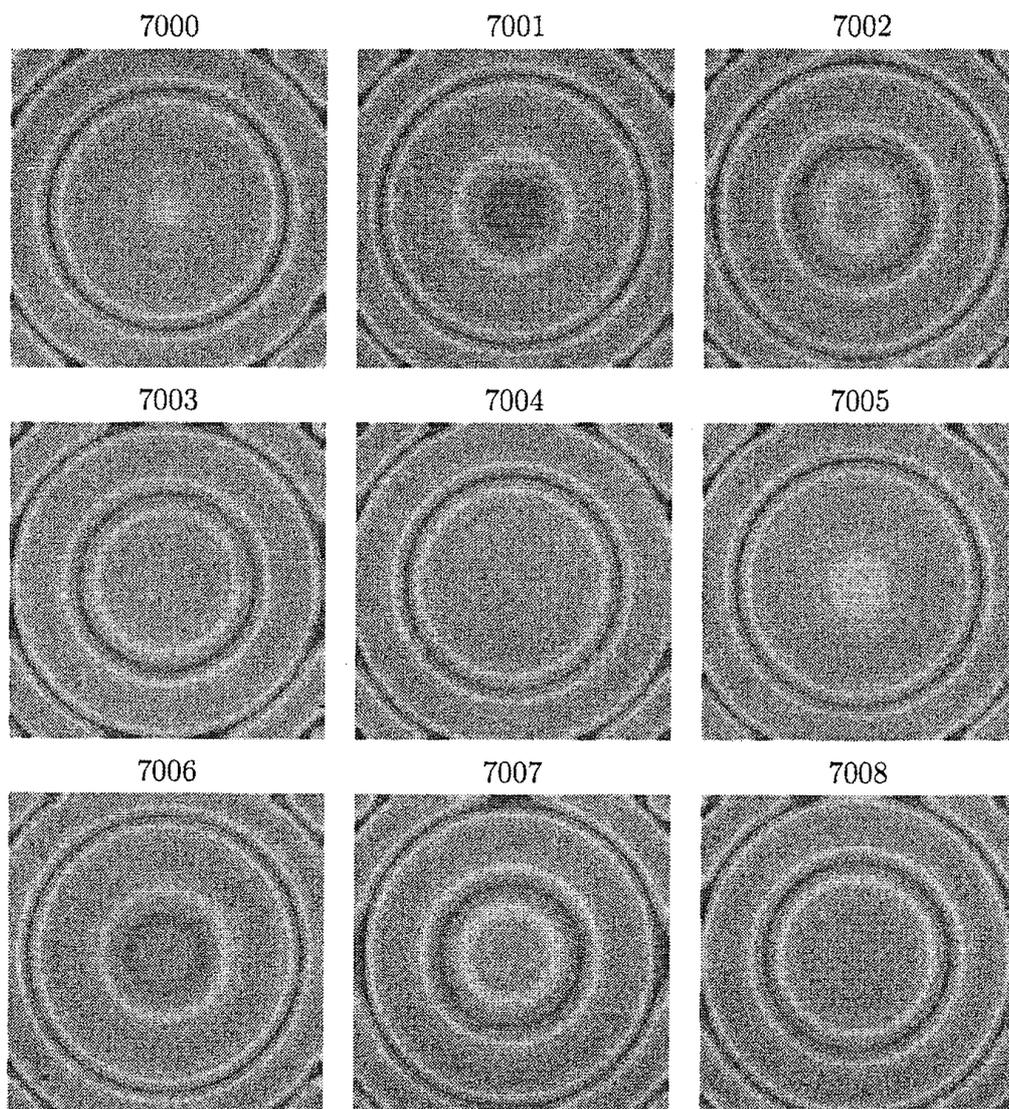


図 12: (39) の解の例 : ターゲットパターン, 数字は時刻 n を表す

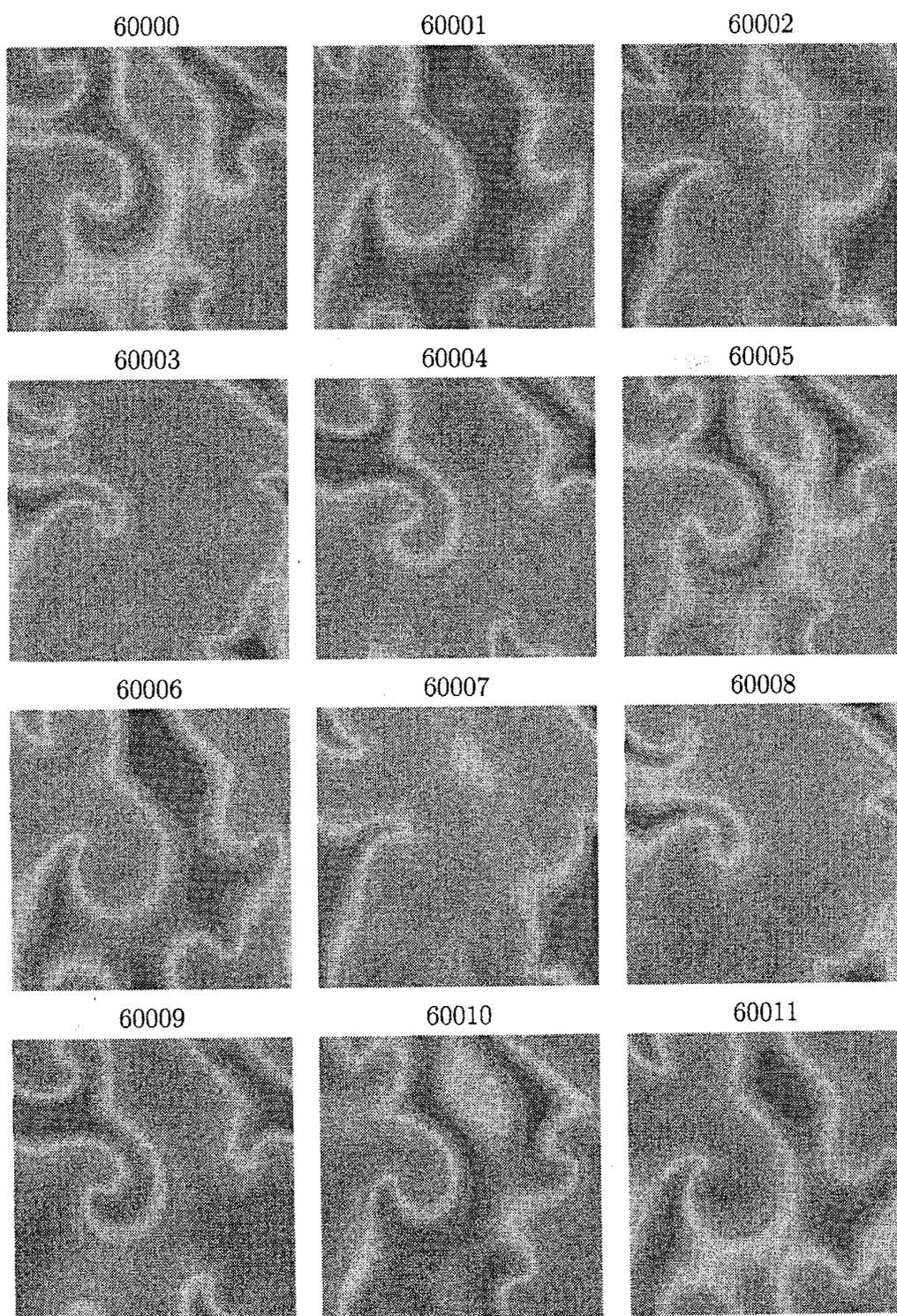


図 13: (39) の解の例 : スパイラルパターン, 数字は時刻 n を表す

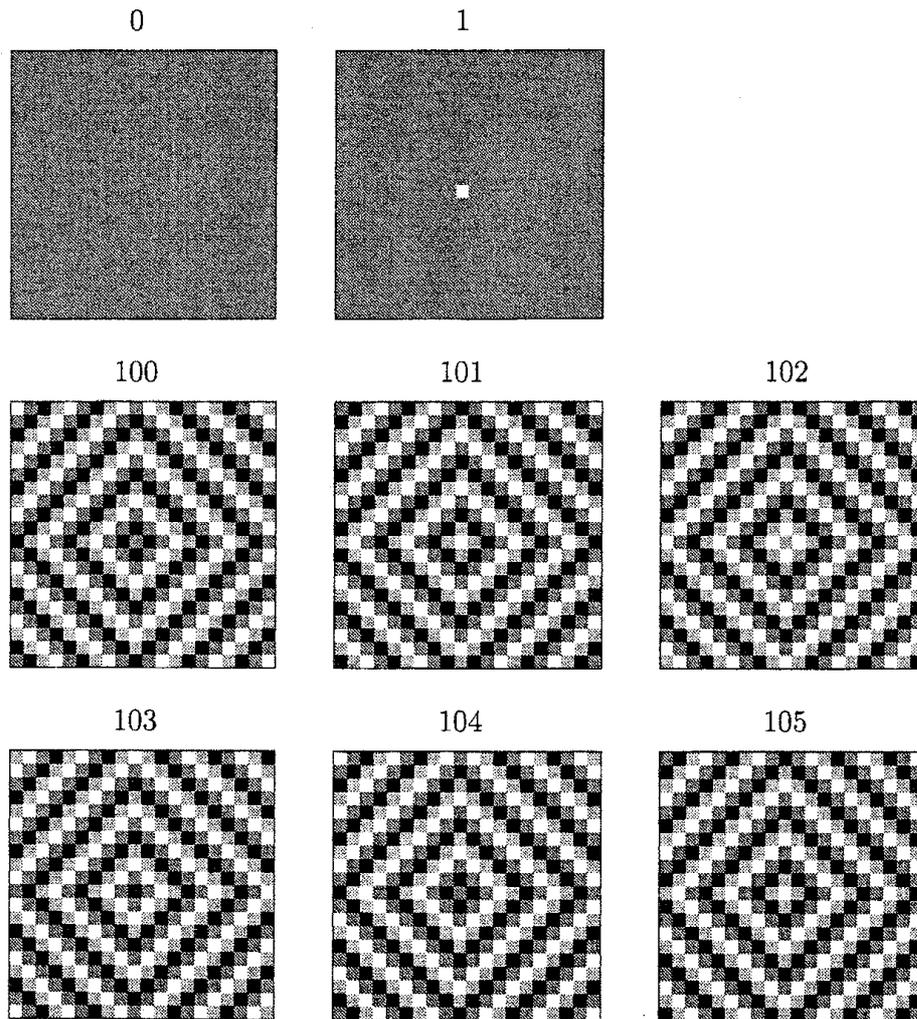


図 14: (40) の解の例 : ターゲットパターン, 数字は時刻 n を表す

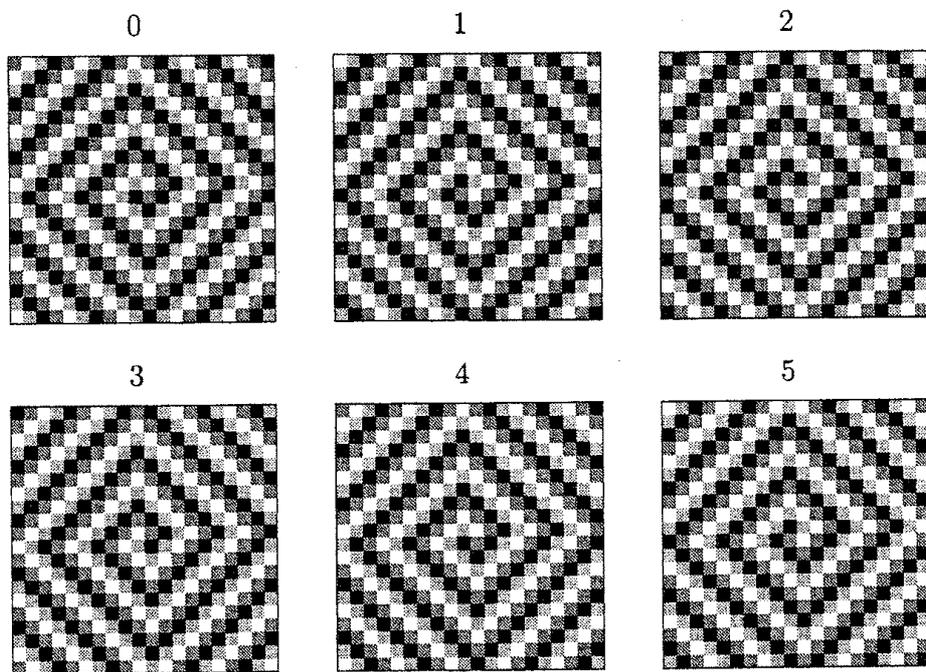


図 15: (40) の解の例：スパイラルパターン，数字は時刻 n を表す