

q-Painlevé 方程式の超幾何解

九州大学大学院数理学研究院 梶原 健司 (KENJI KAJIWARA)
 (Graduate School of Mathematics, Kyushu University)
 神戸大学大学院自然科学研究科 増田 哲 (TETSU MASUDA)
 (Department of Mathematics, Kobe University)
 神戸大学大学院自然科学研究科 野海 正俊 (MASATOSHI NOUMI)
 (Department of Mathematics, Kobe University)
 神戸大学大学院自然科学研究科 太田 泰広 (YASUHIRO OHTA)
 (Department of Mathematics, Kobe University)
 神戸大学理学部 山田 泰彦 (YASUHIKO YAMADA)
 (Department of Mathematics, Kobe University)

1 はじめに

1.1 問題の背景

離散 Painlevé 方程式がはっきりと研究対象として認識されてから [1] 既に 10 年以上が経過した。その間、離散 Painlevé 方程式がもつさまざまな性質、例えば離散 Painlevé 性 (特異点閉じ込め) [2], 補助線形問題, Bäcklund 変換, 特殊解, 双線形形式, 方程式間の退化などが論じられ, またそれらの性質を利用して新しい離散 Painlevé 方程式が続々と提出された。1998 年に Sakai は Painlevé・離散 Painlevé 方程式の代数幾何学的理論を発表し, 離散 Painlevé 方程式に対して統一的な枠組みを提供した [3]。Sakai 理論では離散 Painlevé 方程式は \mathbb{P}^2 の 9 点 blow-up によって得られる曲面族上の Cremona 変換が作る離散力学系として定式化され, もっとも generic な場合には対称性として $E_8^{(1)}$ 型の affine Weyl 群が現れることが示された。Sakai は, 9 点の配置をさまざまに退化させることによって, 曲面を 22 通りに分類した。図 1 は曲面の退化を示しており, 曲面の型はそこに作用する Weyl 群の型で表した。点線で囲まれた部分は Weyl 群作用と可換な連続 flow を許容するものの系列で, その flow が Painlevé

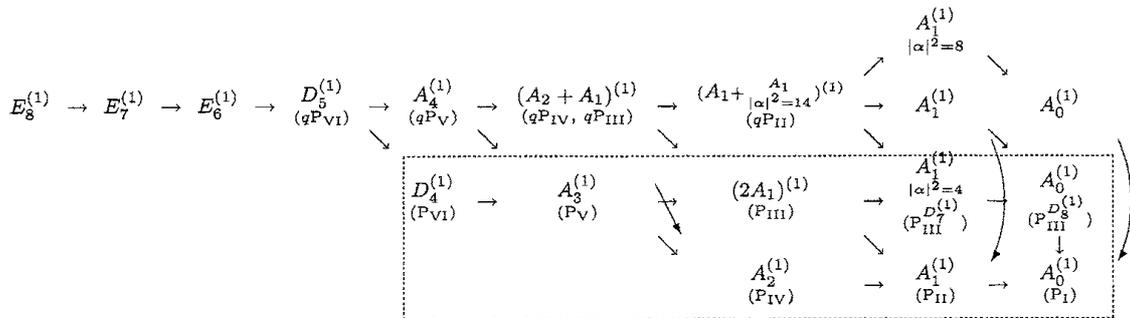


図 1: 曲面の退化: 下段にはその曲面上の力学系として現れる Painlevé 方程式を示した。

微分方程式に他ならず, よく知られた Painlevé 微分方程式の退化図式を表している。ここでは, Weyl 群作用はいわゆる Bäcklund 変換であって, その中のパラメータの平行移動を記述する変換 (Schlesinger 変換) として現れる離散力学系が離散 Painlevé 方程式に他ならない。これらの型の曲面においては, Weyl 群作用がパラメータに加法的に作用し, 離散 Painlevé 方程式の独立変数依存性も加法的 (n を独立変数, a, b を定数とすると $an + b$ という依存性) である。

その他の曲面では連続 flow はなく, Weyl 群作用も乗法的であって, 離散 Painlevé 方程式の独立変数依存性も

乗法的 (n を独立変数, p, q を定数とすると pq^n という依存性), すなわち離散 Painlevé 方程式は q -差分方程式になる. ただし, $E_{6,7,8}^{(1)}$ 型は Weyl 群作用が加法的なものもあり (ただし可換な連続 flow はない), それらは乗法的な場合からの退化で得られる. さらに, $E_8^{(1)}$ 型には Weyl 群作用が楕円的な場合があり, 乗法的な場合はその退化として得られる. すなわち $E_8^{(1)}$ の楕円的な場合が全ての頂点に位置し, そこで現れる離散力学系が楕円 Painlevé 方程式と呼ばれる, 差分間隔が楕円関数でパラメータづけされる master equation である.

さて, 上の曲面上の (離散・連続) 力学系を方程式と見なしたときの解について述べよう. Painlevé 微分方程式の解は一般的に超越的であるが, パラメータが特殊な値のときに超幾何型の特特殊関数で表される解 (以下, 超幾何解と呼ぶことにする) と代数関数解を許容することはよく知られている (例えば [4] を参照). 特に, 解として現れる超幾何関数は方程式の退化関式 (図 1) に対応して, 図 2 のようになっている. P_{VI} の解として現れる Gauss

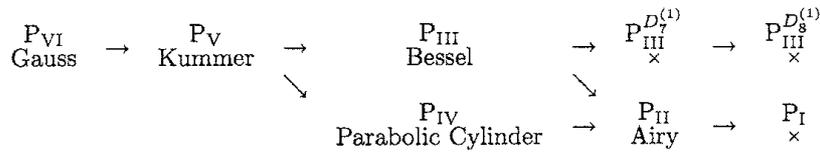


図 2: Painlevé 微分方程式の退化

の超幾何関数 ${}_2F_1$ は, 言うまでもなく物理数学などで現れるさまざまな特殊関数の「親玉」である. では, 図 1 で点線に囲まれていない部分のうち, 右端の 3 種類 (超幾何解は存在しないと予想される) を除く

$$E_8^{(1)} \rightarrow E_7^{(1)} \rightarrow E_6^{(1)} \rightarrow D_5^{(1)} \rightarrow A_4^{(1)} \rightarrow (A_2 + A_1)^{(1)} \rightarrow (A_1 + \underset{|\alpha|^2=14}{A_1})^{(1)} \quad (1)$$

という Weyl 群対称性をもつ q -Painlevé 方程式の超幾何解としてどのような関数が現れるのであろうか. $D_5^{(1)}$ 型対称性をもつ q -Painlevé 方程式は Sakai によって提案された qP_{VI} であり [5], その解は Gauss の超幾何関数 ${}_2F_1$ の q -analog ${}_2\phi_1$ で与えられることがわかっている [6]. そこで, その上位に位置する E 型対称性をもつ q -Painlevé 方程式の解として現れる超幾何関数は何か, という問題は特に興味あるものであろう.

1.2 q -Painlevé 方程式のリスト

本節では関式 (1) に現れる q -Painlevé 方程式を具体的に列挙しておく. 以下, t は独立変数, q を定数とする. f, g は従属変数を表し, 時間発展に関して, $\bar{f} = f(qt)$, $\underline{f} = f(t/q)$ などという略記法を用いる. 特に指定のない文字はパラメータである.

$E_8^{(1)}$ 型 [7, 8, 9]

$$\begin{aligned}
 \frac{(\bar{g}st - f)(gst - f) - (\bar{s}^2t^2 - 1)(s^2t^2 - 1)}{\left(\frac{\bar{g}}{\bar{s}t} - f\right)\left(\frac{g}{st} - f\right) - \left(1 - \frac{1}{\bar{s}^2t^2}\right)\left(1 - \frac{1}{s^2t^2}\right)} &= \frac{P(f, t, m_1, \dots, m_7)}{P(f, t^{-1}, m_7, \dots, m_1)}, \\
 \frac{(\underline{f}st - g)(fst - g) - (s^2\underline{t}^2 - 1)(s^2t^2 - 1)}{\left(\frac{\underline{f}}{\underline{s}t} - g\right)\left(\frac{f}{st} - g\right) - \left(1 - \frac{1}{s^2\underline{t}^2}\right)\left(1 - \frac{1}{s^2t^2}\right)} &= \frac{P(g, s, m_7, \dots, m_1)}{P(g, s^{-1}, m_1, \dots, m_7)},
 \end{aligned} \quad (2)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 P(f, t, m_1, \dots, m_7) &= f^4 - m_1 t f^3 + (m_2 t^2 - 3 - t^8) f^2 \\
 &\quad + (m_7 t^7 - m_3 t^3 + 2m_1 t) f + (t^8 - m_6 t^6 + m_4 t^4 - m_2 t^2 + 1),
 \end{aligned} \quad (3)$$

であり, m_k ($k = 1, 2, \dots, 7$) は b_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) に関する k 次の基本対称式であり, 拘束条件

$$b_1 b_2 \cdots b_8 = 1, \quad (4)$$

を満足する。さらに,

$$\bar{t} = qt, \quad t = q^{\frac{1}{2}}s, \quad (5)$$

である。

$E_7^{(1)}$ 型 [7, 8]

$$\begin{cases} \frac{(\bar{g}f - t\bar{t})(gf - t^2)}{(\bar{g}f - 1)(gf - 1)} = \frac{(f - b_1t)(f - b_2t)(f - b_3t)(f - b_4t)}{(f - b_5)(f - b_6)(f - b_7)(f - b_8)}, \\ \frac{(gf - t^2)(g\underline{f} - t\underline{t})}{(gf - 1)(g\underline{f} - 1)} = \frac{(g - t/b_1)(g - t/b_2)(g - t/b_3)(g - t/b_4)}{(g - 1/b_5)(g - 1/b_6)(g - 1/b_7)(g - 1/b_8)}, \end{cases} \quad (6)$$

ただし,

$$\bar{t} = qt, \quad b_1b_2b_3b_4 = q, \quad b_5b_6b_7b_8 = 1. \quad (7)$$

$E_6^{(1)}$ 型 [7, 8]

$$\begin{cases} (\bar{g}f - 1)(gf - 1) = t\bar{t} \frac{(f - b_1)(f - b_2)(f - b_3)(f - b_4)}{(f - b_5t)(f - t/b_5)}, \\ (gf - 1)(g\underline{f} - 1) = t^2 \frac{(g - 1/b_1)(g - 1/b_2)(g - 1/b_3)(g - 1/b_4)}{(g - b_6t)(g - t/b_6)}, \end{cases} \quad (8)$$

ただし,

$$\bar{t} = qt, \quad b_1b_2b_3b_4 = 1. \quad (9)$$

$D_5^{(1)}$ 型 (qP_{VI}) [5, 6]

$$\begin{cases} \bar{g}g = \frac{(f - a_1t)(f - a_2t)}{(f - a_3)(f - a_4)}, \\ f\underline{f} = \frac{(g - b_1t/q)(g - b_2t/q)}{(g - b_3)(g - b_4)}, \end{cases} \quad (10)$$

ただし,

$$\frac{b_1b_2}{b_3b_4} = q \frac{a_1a_2}{a_3a_4}. \quad (11)$$

$A_4^{(1)}$ 型 (qP_V) [3, 8, 10]

$$\begin{cases} \bar{g}g = \frac{(f + b_1/t)(f + 1/b_1t)}{1 + b_3f}, \\ f\underline{f} = \frac{(g + b_2/s)(g + 1/b_2s)}{1 + g/b_3}, \end{cases} \quad (12)$$

ただし,

$$\bar{t} = qt, \quad t = q^{\frac{1}{2}}s. \quad (13)$$

$(A_2 + A_1)^{(1)}$ 型 (qP_{III}) [8, 11, 12, 13, 14]

$$\begin{cases} \bar{g}gf = b_0 \frac{1 + a_0tf}{a_0t + f}, \\ g\underline{f}f = b_0 \frac{a_1/t + g}{1 + ga_1/t}, \end{cases} \quad (14)$$

ただし,

$$\bar{t} = qt. \quad (15)$$

$(A_1 + \frac{A_1}{|\alpha|^2=14})^{(1)}$ 型 (qP_{II}) [3, 8, 15]

$$(\bar{f}f - 1)(f\underline{f} - 1) = \frac{at^2f}{f + t}, \quad \bar{t} = qt. \quad (16)$$

注意: ここで挙げた方程式が q -Painlevé 方程式の全てではない。特に対称性の高い曲面上には、別の形の 2 階の離散力学系が現れる可能性がある。例えば、Masuda は $(A_1 + A_3)^{(1)}$ 型の affine Weyl 群対称性を許容する次の方程式を調べ、連続極限として P_V が得られることを示し、有理解を構成した [16] :

$$\bar{f}_0 = a_0 a_1 f_1 \frac{1 + a_2 f_2 + a_2 a_3 f_2 f_3 + a_2 a_3 a_0 f_2 f_3 f_0}{1 + a_0 f_0 + a_0 a_1 f_0 f_1 + a_0 a_1 a_2 f_0 f_1 f_2}, \quad (17)$$

$$\bar{f}_1 = a_1 a_2 f_2 \frac{1 + a_3 f_3 + a_3 a_0 f_3 f_0 + a_3 a_0 a_1 f_3 f_0 f_1}{1 + a_1 f_1 + a_1 a_2 f_1 f_2 + a_1 a_2 a_3 f_1 f_2 f_3}, \quad (18)$$

$$\bar{f}_2 = a_2 a_3 f_3 \frac{1 + a_0 f_0 + a_0 a_1 f_0 f_1 + a_0 a_1 a_2 f_0 f_1 f_2}{1 + a_2 f_2 + a_2 a_3 f_2 f_3 + a_2 a_3 a_0 f_2 f_3 f_0}, \quad (19)$$

$$\bar{f}_3 = a_3 a_0 f_0 \frac{1 + a_1 f_1 + a_1 a_2 f_1 f_2 + a_1 a_2 a_3 f_1 f_2 f_3}{1 + a_3 f_3 + a_3 a_0 f_3 f_0 + a_3 a_0 a_1 f_3 f_0 f_1}, \quad (20)$$

ただし,

$$a_0 a_1 a_2 a_3 = q^{-1}, \quad f_0 f_2 = f_1 f_3 = t, \quad \bar{t} = qt. \quad (21)$$

この方程式そのものは Sakai のリスト [3] にない。しかし、Takenawa はこの方程式が $D_5^{(1)}$ 型の曲面上の力学系であること (q - $P_{VI}(10)$ とは異なる発展を記述する) を示した [17]。このように、対称性の高い曲面上に部分力学系として非自明に埋め込まれた 2 階離散力学系はまだ存在するものと考えられる。□

2 超幾何解の構成

2.1 q -超幾何関数

q -Painlevé 方程式の超幾何解の構成に進む前に、使われる超幾何関数の定義と記法に触れておく。 q -超幾何関数 ${}_r\varphi_s$ は,

$${}_r\varphi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; q, z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_n}{(b_1, \dots, b_s; q)_n (q; q)_n} \left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}} \right]^{1+s-r} z^n, \quad (22)$$

$$(a_1, \dots, a_r; q)_n = (a_1; q)_n \cdots (a_r; q)_n, \quad (a; q)_n = \underbrace{(1-a)(1-qa) \cdots (1-q^{n-1}a)}_n$$

で定義される。特に q -超幾何関数 ${}_{r+1}\varphi_r$ は条件

$$qa_1 a_2 \cdots a_{r+1} = b_1 b_2 \cdots b_r, \quad z = q, \quad (23)$$

が満足されるときに、balanced と呼ばれる¹。また、条件

$$qa_1 = a_2 b_1 = \cdots = a_{r+1} b_r, \quad (24)$$

が満足されるときには well-poised と呼ばれる。さらに、(24) 式に加えて条件

$$a_2 = qa_1^{\frac{1}{2}}, \quad a_3 = -qa_1^{\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

が満足されるときには very-well-poised と呼ばれ、 ${}_{r+1}W_r$ と書く:

$${}_{r+1}W_r(a_1; a_4, \dots, a_{r+1}; q, z) = {}_{r+1}\varphi_r \left(\begin{matrix} a_1, qa_1^{\frac{1}{2}}, -qa_1^{\frac{1}{2}}, a_4, \dots, a_{r+1} \\ a_1^{\frac{1}{2}}, -a_1^{\frac{1}{2}}, qa_1/a_4, \dots, qa_1/a_{r+1} \end{matrix}; q, z \right). \quad (26)$$

¹ただし、超幾何関数 ${}_3\varphi_2$ に対しては、文献によって二つの異なる流儀が用いられているようである。上の流儀は [18] によるが、一方で超幾何関数 ${}_3\varphi_2 \left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; q, z \right)$, $z = de/abc$ もまた “balanced ${}_3\varphi_2$ series” と呼ばれている [19]。本稿では、 ${}_3\varphi_2$ に関してだけは後者の流儀を採用することにする。

2.2 何が難しいのか

対称性の低い方程式の場合、超幾何解の構成は簡単である。例として $qP_{II}(16)$ の超幾何解をつくってみよう。まず、Riccati 方程式

$$\bar{f} = \frac{\alpha(t)f + \beta(t)}{\gamma(t)f + \delta(t)},$$

で記述される特殊解を探すことによって直ちに、 f が

$$\bar{f} = \frac{1}{f} - qt, \quad (27)$$

を満足すれば、(16) の $a = q$ の場合の解を与えることがわかる。次に、 $f = \Psi/\Phi$ とおいて (27) に代入し、分母同士、分子同士をそれぞれ等しく置いて分離する（その際適当な分離関数を導入してもよいが、この場合は必要ない）と、

$$f = \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}, \quad \bar{\Phi} + t\Phi = \Phi, \quad (28)$$

を得る。さらに、得られた線形 q -差分方程式に対して級数解

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

を仮定することにより、超幾何解

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q; q)_n (-q; q)_n} (-qt)^n = {}_1\varphi_1 \left(\begin{matrix} 0 \\ -q \end{matrix}; q, -qt \right), \quad (29)$$

を得る。超幾何解の構成は基本的にこれだけの手続きのできるもので、困難な問題ではないように思われる。実際、 $D_5^{(1)}$ 以下の対称性を持つ q -Painlevé 方程式（および $E_6^{(1)}$ の特殊な場合）に関しては超幾何解がわかっていた [6, 11, 12, 20]。ところが、 E 型対称性をもつ場合には Riccati 方程式への特殊化まで [7, 8]、および $E_{6,7}^{(1)}$ 型のものについては Riccati 方程式の線形化まではできていたが、解の超幾何関数による同定が手付かずであった。

何が難しいのであろうか。第 1 の問題は複雑さの問題である。例えば、Riccati 方程式

$$\bar{f} = \frac{af + b}{cf + d}, \quad (a, b, c, d \text{ は独立変数 } t \text{ の関数})$$

の線形化を考える。 $f = F/G$ とおいて代入し、分母・分子を分離すると

$$h\bar{F} = aF + bG, \quad h\bar{G} = cF + dG,$$

が得られる。ただし、 h は分離の際に導入した任意関数である。これから F の 3 項間関係式をつくと、

$$hh\bar{b}\bar{F} - h(ab + bd)F + b(ad - bc)E = 0, \quad (30)$$

を得る。一般に、超幾何関数の 3 項間関係式は

$$A(\bar{\Phi} - \Phi) + B\Phi + C(\Phi - \Phi) = 0, \quad (31)$$

の形をしている。ここで、 A, B, C はパラメータと独立変数に関する有理式で、それらの分母・分子は 1 次式の積に因数分解されている。さて、問題は適当な超幾何関数を選び、任意関数 h をうまく取って (30) と (31) を比較してパラメータを同定することである。適当な q -Painlevé 方程式について実際に実行してみると、(30) の第 1, 3 項の係数は通常 1 次式に因数分解されているが、第 2 項が因数分解されていない巨大な式になる（例えば $E_8^{(1)}$ 型の場合 100 項をはるかに越える）。(31) との係数比較によって、

$$\frac{B}{A} = \frac{ab + bd}{hb} + \frac{b(ad - bc)}{hhb} + 1,$$

となるが、結局は巨大な右辺第1項に対して h をうまく選び、右辺の分母・分子が「パカッと」1次式に因数分解するようにせよ、という問題になる。これは厳しい要求である。せめて、どんな超幾何関数と比べればよいのか、つまり、左辺の B/A がどのようなものかを知らなければ h を決めようがなく、同定のしようがない（つまり、答がわからないと解答が書けない!）。

第2の問題は E 型特有の問題である。方程式を記述するのにどのような座標系が適当なのかはいつも問題になるが、 E 型の場合、1.2 節で用いた従属変数は超幾何関数の比にならず、超幾何関数の適当な線形結合の比になってしまう。つまり、 τ 関数を考えたときに、 f, g は τ 関数の単純な比にならないのである（例えば $E_6^{(1)}$ の場合に [21] を参照）。従って、 f, g 変数を線形化できてもその解を超幾何関数として同定することは難しい。

結局、素朴な方法で超幾何解をつくるのは特に E 型の方程式の場合難しい。これを克服するには何らかの「理論」が必要である。実は、超幾何解の構成には [22] で議論された、 \mathbb{P}^2 上の平面曲線の幾何を用いた定式化を使うのが便利である。

3 平面曲線の幾何と超幾何解

3.1 平面幾何による定式化

Sakai 理論では、2 階の離散 Painlevé 方程式は \mathbb{P}^2 上の 9 点で blow-up を施して得られる曲面族上の Cremona 変換が作る離散力学系として定式化される。9 点が generic な位置にある場合に得られる力学系が楕円 Painlevé 方程式であり、他の場合は 9 点の配置を特別な場合に退化させていくことで得られる。

この事情をよりはっきり見るためには、 \mathbb{P}^2 上の点の「配置空間」を持ち出すのが便利である。 $(x:y:z)$ を \mathbb{P}^2 の同次座標とする（つまり、0 でない定数 k に対して $(x:y:z)$ と $(kx:ky:kz)$ を同一視する）。 \mathbb{P}^2 上に点 $P_1(x_1:y_1:z_1), \dots, P_n(x_n:y_n:z_n)$ をとり、まとめて $3 \times n$ 行列

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

を考える。各列は同次座標であるから、右から対角行列（対角成分に 0 を含まない）をかけたものは同一視する。さらに、これらの点を線形変換で一斉に写したものの、つまり上の行列に左から $GL(3)$ の元をかけたものも同一視する：

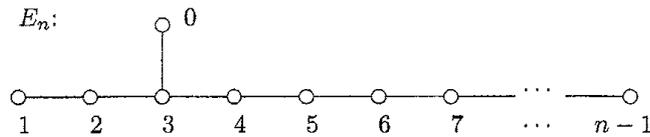
$$\mathcal{M}_{3,n} = GL(3) \setminus \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \end{bmatrix} \right\} / (\mathbb{C}^\times)^n. \quad (32)$$

$\mathcal{M}_{3,n}$ を \mathbb{P}^2 上の n 点のつくる配置空間と呼ぶ。 $\mathcal{M}_{3,n}$ には次のような双有理変換が働く：

- (1) s_i ($i = 1, \dots, n-1$): P_i と P_{i+1} の入れ替え
- (2) s_0 : $P_1(1:0:0), P_2(0:1:0), P_3(0:0:1)$ を基点とする標準 Cremona 変換

$$s_0: (x:y:z) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right).$$

s_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) は Dynkin 図形



で指定される基本関係式, すなわち, $s_i^2 = 1$ ($i = 0, \dots, n-1$), i と j がつながっていれば $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$, そうでなければ $s_i s_j = s_j s_i$, を満たしていることが示される. $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ は E_n 型の Weyl 群 $W(E_n)$ をなしている [23, 24, 25].

特に, $n = 10$ の場合が重要である. s_9 を無視すれば, P_1 から P_9 までに対する s_i ($i = 0, \dots, 8$) は affine Weyl 群 $W(E_9) = W(E_8^{(1)})$ を生成する. $W(E_8^{(1)})$ は平行移動部分群 Z^8 を含んでおり, その作用が楕円 Painlevé 方程式を与える. このとき, P_1, \dots, P_9 がパラメータと独立変数の役割を果たし, P_{10} が従属変数の役割を果たす. このような設定の下で, 配置空間上の Weyl 群の双有理的な表現を駆使して, 楕円 Painlevé 方程式を頂点とする離散 Painlevé 方程式の代数構造理論とその拡張を組み立てていくことができる. 詳細は [24, 25] を参照されたい.

さて, \mathbb{P}^2 上の一般の位置にある 9 点はその上を通る 3 次曲線を一意的に定める. そして, Z^8 の作用 (のうちの あるタイプのもの: 詳細は [24] 参照) は 3 次曲線の幾何を用いて簡潔に表現することができる. まず, 3 次曲線

$$F(x, y, z) = c_1 x^3 + c_2 x^2 y + c_3 x^2 z + c_4 x y^2 + c_5 x z^2 + c_6 x y z + c_7 y^3 + c_8 y^2 z + c_9 y z^2 + c_{10} z^3 = 0,$$

について必要な事項をまとめておく.

- (1) \mathbb{P}^2 上の 9 点を決めれば, それを通る 3 次曲線が定まる. (決めるべき係数が 9 個, 方程式が 9 本)
- (2) 2 つの 3 次曲線は 9 点で交わる. (Bézout の定理)
- (3) \mathbb{P}^2 上の 8 点を通る 3 次曲線は 1-parameter family $\lambda F + \mu G = 0$ をなす (pencil). さらに, この 3 次曲線族は全て $F = 0, G = 0$ の 9 番目の共通零点を通る. 逆に言えば, 9 点が特別な配置にあるとき, それらの点を通る 3 次曲線は pencil をなす. その 9 点を pencil の base point という.

また, 3 次曲線上には次のように加法が定義できる: まず, 3 次曲線 C 上の 2 点 P, Q に対して, 直線 PQ と C の交点 $P * Q$ を取る. 次に, C 上の適当な点を O とし, $P * Q$ と O を結ぶ直線と C との交点を $P + Q$ と定義する. この加法に関する結合則は上の (3) から従うことはよく知られている. 3 次曲線 C 上の加法に関して, 次のことを注意しておきたい. O を 3 次曲線の変曲点 (一般に 9 個ある) の一つとすると, 以下のことが成り立つ².

- (1) C 上の 3 点 P_1, P_2, P_3 が一直線上 $\leftrightarrow P_1 + P_2 + P_3 = O$
- (2) C 上の 6 点 P_1, \dots, P_6 が 2 次曲線上 $\leftrightarrow P_1 + \dots + P_6 = O$
- (3) C 上の 9 点 P_1, \dots, P_9 が別の 3 次曲線上 $\leftrightarrow P_1 + \dots + P_9 = O$

C が \mathbb{P}^2 上の非特異 3 次曲線である場合が楕円 Painlevé 方程式に対応し, その時間発展は次のように記述できる [22, 24]. まず, \mathbb{P}^2 上の一般の位置にある 10 点 P_1, \dots, P_{10} を取る. P_1, \dots, P_9 がパラメータと独立変数の役割を果たし, P_{10} が従属変数である. 一度の時間発展で P_1, \dots, P_9 のうちの 2 点のみが動き, それらが独立変数となるが, ここでは P_8, P_9 を動かす時間発展 T_{89} を例にとる. P_1, \dots, P_9 を通る 3 次曲線 C_0 を考える.

²加法の定義において O は C の正則点であるなら何でもよいが, ここでは記述を簡単にするために変曲点に取った. 例えば, P_1, P_2, P_3 が一直線上 $\leftrightarrow P_1 * P_2 = P_3 \leftrightarrow P_1 + P_2 = O * P_3 \leftrightarrow P_1 + P_2 + P_3 = O * ((O * P_3) * P_3) = O * O$, これは O における C の接線と C の交点であるから, O が変曲点ならば $P_1 + P_2 + P_3 = O$ と書ける.

(1) C_0 上の加法を用いて, 新しい点 \bar{P}_8, \bar{P}_9 を次のように定める.

$$\bar{P}_i = P_i, (i \neq 8, 9), \quad P_1 + \dots + P_8 + \bar{P}_9 = O, \quad P_8 + P_9 = \bar{P}_8 + \bar{P}_9. \quad (33)$$

すなわち, まず C_0 上で P_9 を動かし, 新しい点 \bar{P}_9 を $P_1, \dots, P_8, \bar{P}_9$ が pencil の base point になるように取る. 次に, P_8 と P_9 を結ぶ直線と C_0 の交点を取り, その点と \bar{P}_9 を結ぶ直線を考え, C_0 との交点を新しい \bar{P}_8 とする. (図3左)

(2) C_0 の方程式を $F = 0$ とするとき, (1) でつくった3次曲線の pencil を $\lambda F + \mu G = 0$ とする. λ, μ を調節して, $\lambda F + \mu G = 0$ が P_{10} を通るようにする. こうしてつくった $P_1, \dots, P_8, \bar{P}_9, P_{10}$ を通る新しい3次曲線を C とする. (図3中)

(3) C 上の加法を用いて,

$$P_{10} + P_8 = \bar{P}_{10} + \bar{P}_9 \quad (34)$$

で新しい点 \bar{P}_{10} を定義する. すなわち, P_{10} と P_8 を結ぶ直線と C の交点を取り, その交点と \bar{P}_9 を結ぶ直線を考え, C との交点を新たに \bar{P}_{10} とする. (図3右)

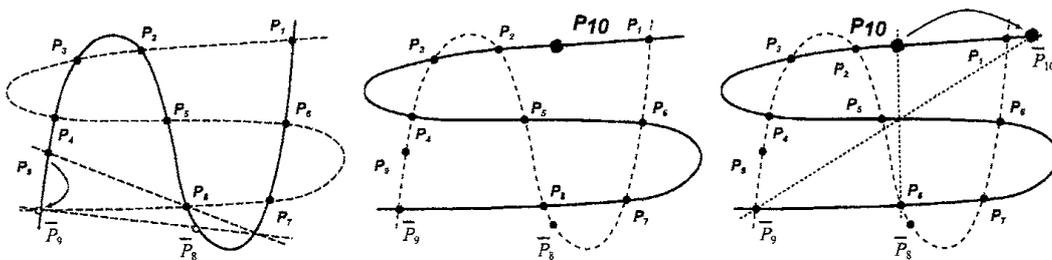


図 3: T_{89} による時間発展

このように, 楕円 Painlevé 方程式の時間発展は動く3次曲線上の加法と解釈できる. 上の移動が確かに平行移動を与えていることの詳細な証明は [24] を参照して欲しい. 3次曲線を動かさない場合は Quispel-Roberts-Thompson 系に対応し, Tsuda[26] によって議論されている. また, 曲線を動かさない場合に上記の手続きが平行移動を与えることは Manin[27] によって示されている. さらに9点の配置を退化させることによってさまざまな離散 Painlevé 方程式が得られるが, そのような場合でも上の記述は有効であることを注意しておく.

3.2 超幾何解の記述

2.2 節で述べたように, 超幾何解は離散 Painlevé 方程式のパラメータが特別で, 解が Riccati 方程式で記述される場合に得られる. 平面曲線による定式化では, 例えば,

- (1) P_1, \dots, P_9 のうち3点が一直線上にある場合
- (2) P_1, \dots, P_9 のうち1点が他の点に無限に近い場合

にそのようなことが生じる. 以下では (1) の場合を議論することにする ((2) の場合が本質的に必要になるのは9点配置をずっと退化させた場合である).

例えば P_5, P_6, P_7 が一直線上にあるものとしよう. このとき, C_0 上の加法に関して $P_1 + \dots + P_8 + \bar{P}_9 = O$, $P_5 + P_6 + P_7 = O$ が成り立つから, $P_1 + \dots + P_4 + P_8 + \bar{P}_9 = O$ が成り立つ. すなわち, $P_1, \dots, P_8, \bar{P}_9$ (そして

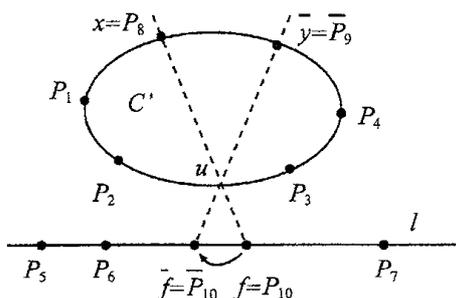


図 4: 超幾何解が実現される点配置と P_{10} の運動

P_{10} を通る 3 次曲線 C は P_5, P_6, P_7 を通る直線 l と $P_1, \dots, P_4, P_8, \bar{P}_9$ を通る 2 次曲線 C' に分解する. このとき, もし $P_{10} \in l$ であれば, $\bar{P}_{10} \in l$ となる (つまり, l は「不変因子」).

この状況下において, P_{10} の座標は線形方程式で記述されることを示そう. 簡単のため, 2 次曲線 C' 上の点 P_1, P_2, P_3 が $P_1 = (1:0:0), P_2 = (0:1:0), P_3 = (0:0:1)$ となるように座標を選び (このことは一般性を失わずに可能),

$$P_{10} = f = (f_1 : f_2 : f_3), \quad \bar{P}_{10} = \bar{f} = (\bar{f}_1 : \bar{f}_2 : \bar{f}_3), \quad P_8 = x = (x_1 : x_2 : x_3), \quad \bar{P}_9 = \bar{y} = (\bar{y}_1 : \bar{y}_2 : \bar{y}_3),$$

とおく. さらに, P_8, P_{10} を通る直線と C' の交点を $u = (u_1 : u_2 : u_3)$ とし, 直線 l の方程式を

$$\begin{aligned} (a, f) &= a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0, \\ (a, \bar{f}) &= a_1 \bar{f}_1 + a_2 \bar{f}_2 + a_3 \bar{f}_3 = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

とおく. このとき, 以下の補題が成り立つ.

補題 3.1 上の状況下で次の関係が成り立つ.

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_2}{x_2} & \frac{f_3}{x_3} \\ \frac{\bar{f}_1}{\bar{y}_1} & \frac{\bar{f}_2}{\bar{y}_2} & \frac{\bar{f}_3}{\bar{y}_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (36)$$

証明 x, u, f および \bar{y}, u, \bar{f} がそれぞれ 1 直線上にあるから, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を適当な定数として

$$f = \alpha x + \beta u, \quad \bar{f} = \gamma \bar{y} + \delta u,$$

とおける. これを (36) 左辺に代入すると

$$\begin{vmatrix} \alpha + \beta \frac{u_1}{x_1} & \alpha + \beta \frac{u_2}{x_2} & \alpha + \beta \frac{u_3}{x_3} \\ \gamma + \delta \frac{u_1}{\bar{y}_1} & \gamma + \delta \frac{u_2}{\bar{y}_2} & \gamma + \delta \frac{u_3}{\bar{y}_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \beta \delta \begin{vmatrix} \frac{u_1}{x_1} & \frac{u_2}{x_2} & \frac{u_3}{x_3} \\ \frac{u_1}{\bar{y}_1} & \frac{u_2}{\bar{y}_2} & \frac{u_3}{\bar{y}_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

となるが, これは u が 5 点 $P_1, P_2, P_3, x = P_8, \bar{y} = \bar{P}_9$ を通る 2 次曲線 C' 上にあることから従う. 実際, 左辺は u に関して 2 次であって, $u = (1:0:0), (0:1:0), (0:0:1), (x_1:x_2:x_3), (\bar{y}_1:\bar{y}_2:\bar{y}_3)$ を代入すると 0 になる. \square

\bar{f} を f で表すには, (35) 第 2 式と (36) を \bar{f} について解けばよい (逆も可能). その結果, 次の補題が得られる.

補題 3.2 上の状況下で次の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned}\lambda \bar{f} &= (a, \bar{y})Df - (a, Df)\bar{y}, \\ \mu f &= (a, x)D^{-1}\bar{f} - (a, D^{-1}\bar{f})x,\end{aligned}\quad (37)$$

$$D = \text{diag} \left(\frac{x_2 x_3}{\bar{y}_2 \bar{y}_3}, \frac{x_3 x_1}{\bar{y}_3 \bar{y}_1}, \frac{x_1 x_2}{\bar{y}_1 \bar{y}_2} \right), \quad (38)$$

$$\lambda = (a, x), \quad \mu = (a, \bar{y}). \quad (39)$$

証明 (37) が (35), (36) を満たすことを確かめればよい. 例えば, (35) は (37) より

$$\begin{aligned}\lambda(a, \bar{f}) &= (a, \bar{y})(a, Df) - (a, Df)(a, \bar{y}) = 0, \\ \mu(a, f) &= (a, x)(a, D^{-1}\bar{f}) - (a, D^{-1}\bar{f})(a, x) = 0,\end{aligned}$$

で確かに満たされることがわかる. また, (36) は左辺第 2 行に (37) 第 1 式を代入すると

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_2}{x_2} & \frac{f_3}{x_3} \\ \frac{\bar{f}_1}{\bar{y}_1} & \frac{\bar{f}_2}{\bar{y}_2} & \frac{\bar{f}_3}{\bar{y}_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_2}{x_2} & \frac{f_3}{x_3} \\ \frac{(a, \bar{y})x_2 x_3 f_1}{\bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3} - (a, Df) & \frac{(a, \bar{y})x_3 x_1 f_2}{\bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3} - (a, Df) & \frac{(a, \bar{y})x_1 x_2 f_3}{\bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3} - (a, Df) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{(a, \bar{y})x_1 x_2 x_3}{\bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3} \begin{vmatrix} \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_2}{x_2} & \frac{f_3}{x_3} \\ \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_2}{x_2} & \frac{f_3}{x_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\end{aligned}$$

となって確かに成り立つ. (37) 第 2 式も同様である. 最後に, (37) の compatibility を調べる. 第 2 式に第 1 式を代入して

$$\begin{aligned}\mu f &= (a, x)D^{-1} \left(\frac{(a, \bar{y})}{\lambda} Df - \frac{(a, Df)}{\lambda} \bar{y} \right) - \left(a, D^{-1} \left(\frac{(a, \bar{y})}{\lambda} Df - \frac{(a, Df)}{\lambda} \bar{y} \right) \right) x \\ &= \frac{(a, x)(a, \bar{y})}{\lambda} f - \frac{(a, \bar{y})(a, f)}{\lambda} x - \frac{(a, Df)}{\lambda} \{ (a, x)D^{-1}\bar{y} - (a, D^{-1}\bar{y}) \}\end{aligned}$$

となるが, 第 2 項は (35) より, 第 3 項は直接計算により 0 となる. 従って, (37) が compatible であるためには $\lambda\mu = (a, x)(a, \bar{y})$ でなければならない. 対称性から, $\lambda = (a, x)$, $\mu = (a, \bar{y})$ と選ぶと都合がよい. □

(37) が超幾何函数の隣接関係式に相当する. 解を適当な超幾何函数と同定するためには, 一つの従属変数に関する 3 項間関係式 (2 階差分方程式) の形に変形しておくといよい. (37) 第 1 式と (35) 第 1 式から f_3 を消去すると,

$$\bar{y}_3(a, x) (\bar{y}_2 \bar{f}_1 - x_2 f_1) = a_2 (f_2 x_1 - f_1 x_2) (\bar{y}_3 x_2 - \bar{y}_2 x_3), \quad (40)$$

が得られる. 同様に (37) 第 2 式と (35) 第 2 式から \bar{f}_3 を消去すると,

$$x_3(a, \bar{y}) (x_2 \bar{f}_1 - \bar{y}_2 \bar{f}_1) = a_2 (\bar{f}_2 \bar{y}_1 - \bar{f}_1 \bar{y}_2) (x_3 \bar{y}_2 - x_2 \bar{y}_3), \quad (41)$$

を得る. (41) において時間発展を一つ前にずらすと, 時間発展で変化するのは $x = P_8$, $y = P_9$, $f = P_{10}$ であって, 特に直線 l (従って a) は動かないことに注意すると,

$$x_3(a, y) (x_2 f_1 - y_2 f_1) = a_2 (f_2 y_1 - f_1 y_2) (x_3 y_2 - x_2 y_3), \quad (42)$$

となる。(40) と (42) から f_2 を消去すると, f_1 に関する 2 階差分方程式

$$\frac{y_1 \bar{y}_3(a, x) (\bar{y}_2 \bar{f}_1 - x_2 f_1)}{x_2 \bar{y}_3 - x_3 \bar{y}_2} + \frac{x_1 x_3(a, y) (x_2 \bar{f}_1 - y_2 f_1)}{x_2 y_3 - x_3 y_2} = a_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) f_1, \quad (43)$$

を得る。(43) に各点のパラメータ表示を代入すれば適当な超幾何方程式が得られる。ここでそうしてもよいが, (43) は P_1, P_2, P_3 (2 次曲線 C' 上の 3 点) がそれぞれ $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ なる特別な座標系を取ったときにのみ成り立つ式なので, もう少し頑張って (43) を座標変換に対して不変な形に書き換えておくと便利である。 $d_{ijk} = \det[P_i, P_j, P_k]$ と書くことにする。まず, 2 点 $(a_1 : a_2 : a_3)$, $(b_1 : b_2 : b_3)$ を通る直線の方程式が

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

であることに注意する (x_i に関して 1 次で, $x = a, b$ で左辺は確かに 0) と, 超幾何解が得られる条件, すなわち, P_5, P_6, P_7 が 1 直線 ℓ 上にある条件は, $d_{567} = 0$ で与えられる。また $(a, x) = d_{568}$, $(a, y) = d_{569}$ と書ける。さらに,

$$f_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & f_1 \\ 1 & 0 & f_2 \\ 0 & 1 & f_3 \end{vmatrix} = d_{2310}, \quad \bar{y}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \bar{y}_1 \\ 0 & 0 & \bar{y}_2 \\ 1 & 0 & \bar{y}_3 \end{vmatrix} = d_{31\bar{9}}, \quad \bar{y}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \bar{y}_1 \\ 0 & 1 & \bar{y}_2 \\ 0 & 0 & \bar{y}_3 \end{vmatrix} = d_{12\bar{9}},$$

などと, (43) に現れる全ての量は行列式で表示できる。このようにして, (43) は

$$\frac{d_{239} d_{12\bar{9}} d_{568} (d_{31\bar{9}} d_{231\bar{0}} - d_{318} d_{2310})}{d_{18\bar{9}}} + \frac{d_{238} d_{12\bar{8}} d_{569} (d_{318} d_{231\bar{0}} - d_{319} d_{2310})}{d_{189}} = d_{562} d_{389} d_{2310},$$

となるが, これではまだ $GL(3)$ 作用と P_i ($i = 1, \dots, 10$) に対する C^\times 作用 (各座標を 0 でない定数倍する作用) に対して不変ではない。そうするためには, 右辺に d_{123} をかけて,

$$\frac{d_{239} d_{12\bar{9}} d_{568} (d_{31\bar{9}} d_{231\bar{0}} - d_{318} d_{2310})}{d_{18\bar{9}}} + \frac{d_{238} d_{12\bar{8}} d_{569} (d_{318} d_{231\bar{0}} - d_{319} d_{2310})}{d_{189}} = d_{562} d_{389} d_{2310} d_{123}, \quad (44)$$

としておけばよい (実際に上の不変性は簡単に確認できる)。

以上の議論では 2 次曲線 C' 上の点 P_1, P_2, P_3 を特に $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:1:0)$ となる座標系を選んで議論を始めたが, C' 上の点 P_1, P_2, P_3, P_4 のどの 3 点を取って始めてもよいし, また, 選んだ点の順番にもよらない。そのように一般化して, 次の命題を得る:

命題 3.3 P_5, P_6, P_7 が直線 ℓ 上にあり, かつ $P_{10} \in \ell$ である場合, P_{10} の T_{89} による時間発展は次の式で記述される。

$$\begin{aligned} & \frac{d_{jk9} d_{k18} d_{i\bar{j}\bar{9}} d_{568}}{d_{i8\bar{9}}} \left(\lambda_{\{ijk\}} \frac{d_{i\bar{k}\bar{9}}}{d_{i\bar{k}8}} d_{jk1\bar{0}} - d_{jk10} \right) \\ & + \frac{d_{jk8} d_{k19} d_{i\bar{j}\bar{8}} d_{569}}{d_{i9\bar{8}}} \left(\mu_{\{ijk\}} \frac{d_{i\bar{k}\bar{8}}}{d_{i\bar{k}9}} d_{jk1\bar{0}} - d_{jk10} \right) = d_{ijk} d_{k89} d_{56j} d_{jk10}, \end{aligned} \quad (45)$$

ただし, $d_{abc} = \det[P_a, P_b, P_c]$, $\{ijk\} \in \{1234\}$ であり, 「ゲージ因子」 $\lambda_{\{ijk\}}$, $\mu_{\{ijk\}}$ は次のように選ぶ。

$$\begin{aligned} \lambda_{\{123\}} &= 1, & \lambda_{\{124\}} &= \frac{(14)}{(13)} = \frac{(24)}{(33)}, \\ \lambda_{\{134\}} &= \frac{(14)}{(12)} = \frac{(34)}{(32)}, & \lambda_{\{234\}} &= \frac{(24)}{(21)} = \frac{(34)}{(31)}, \\ (ij) &= \frac{d_{i\bar{j}\bar{8}}}{d_{i\bar{j}\bar{9}}}, & \mu_I &= \lambda_I|_{8 \rightarrow 9, \bar{9} \rightarrow 8}. \end{aligned} \quad (46)$$

証明 $\{ijk\} = \{123\}$ の場合は (44) と同じである. $\{ijk\}$ として別の選び方をしても同じ形の方程式を得ることは当然であるが, 実際に計算してみると $\bar{P}_{10}, \bar{P}_{10}$ の normalization の自由度によって, ゲージ因子 λ_I, μ_I が異なってくる. 若干細かい計算ではあるが, 例えば $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ と $(4, 2, 3)$ の場合を比較して $\lambda_{\{423\}}$ を決定してみよう. どちらの場合も従属変数は $d_{23\ 10}$ であるから, (45) の $d_{23\ 10}$ の係数を (右辺の係数で全体を割ってから) 比較すると

$$c_{\{123\}} \lambda_{\{123\}} \frac{d_{13\bar{9}}}{d_{138}} = c_{\{423\}} \lambda_{\{423\}} \frac{d_{43\bar{9}}}{d_{438}}, \quad c_{\{ijk\}} = \frac{d_{jk9} d_{ki8} d_{ij\bar{9}} d_{568}}{d_{i8\bar{9}} d_{ijk} d_{k89} d_{56j}},$$

となる. 今,

$$\frac{c_{\{123\}}}{c_{\{423\}}} = \frac{d_{318} d_{12\bar{9}} d_{48\bar{9}} d_{423}}{d_{18\bar{9}} d_{123} d_{348} d_{42\bar{9}}} = \frac{d_{381} d_{2\bar{9}1} d_{8\bar{9}4} d_{234}}{d_{384} d_{2\bar{9}4} d_{8\bar{9}1} d_{231}},$$

であるが, $P_1, P_2, P_3, P_4, P_8, \bar{P}_9$ が 2 次曲線上にあることから,

$$\frac{d_{381} d_{2\bar{9}1}}{d_{384} d_{2\bar{9}4}} - \frac{d_{8\bar{9}1} d_{231}}{d_{8\bar{9}4} d_{234}} = 0,$$

が従う. というのは,

$$f(P_a) = \frac{d_{38a} d_{2\bar{9}a}}{d_{384} d_{2\bar{9}4}} - \frac{d_{8\bar{9}a} d_{23a}}{d_{8\bar{9}4} d_{234}},$$

とおくと, これは P_a の 2 次式で, 2 次曲線 $f(P_a) = 0$ は 5 点 $P_2, P_3, P_4, P_8, \bar{P}_9$ を通る (P_a にそれらの点を代入すると $f = 0$) ので $f(P_1) = 0$ が成り立つ. 従って, $\frac{c_{\{123\}}}{c_{\{423\}}} = 1$ となり,

$$\lambda_{\{423\}} = \lambda_{\{123\}} \frac{d_{13\bar{9}} d_{438}}{d_{138} d_{43\bar{9}}} = \frac{(34)}{(31)}.$$

なお, 上と同様の等式

$$\frac{d_{13\bar{9}} d_{24\bar{9}}}{d_{138} d_{248}} - \frac{d_{43\bar{9}} d_{21\bar{9}}}{d_{438} d_{218}} = 0,$$

より

$$\frac{d_{13\bar{9}} d_{438}}{d_{138} d_{43\bar{9}}} = \frac{d_{21\bar{9}} d_{248}}{d_{218} d_{24\bar{9}}} \Leftrightarrow \frac{(34)}{(31)} = \frac{(24)}{(21)},$$

が従う. 他のゲージ因子も同様の考察で決定することができる. \square

(45) は d_{jk10} に関して線形で超幾何方程式と同じ形をした 2 階差分方程式である. また, 補題 3.2 でゲージ因子 λ, μ をうまく取れたおかげで対称性がよく, さらに $GL(3)$ と \mathbb{C}^\times 不変性を備えており, 後程述べるように超幾何方程式との同定が楽に行える.

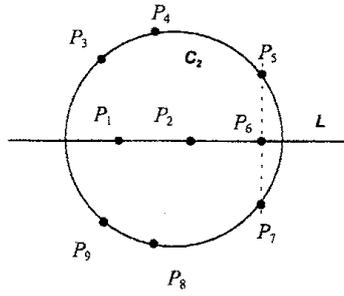
なお, Riccati 方程式に帰着される他の場合, 例えば, T_{89} に対して P_7, P_8, P_9 が 1 直線上にある場合や本節冒頭の (2) の場合などは別の考察を要するが, 詳細は [28] を参照されたい.

3.3 $E_7^{(1)}$ の場合

命題 3.3 は平行移動 T_{89} (P_8, P_9 を動かす時間発展) に対して P_5, P_6, P_7 が 1 直線上にあるという拘束条件の下でその直線上に P_{10} がある場合の時間発展を記述する. そこで, 実際に P_1, \dots, P_9 の点配置を与えて具体的に (45) を超幾何方程式と同定してみよう. 本節では, 退化もあまりしておらず, かつ計算量もそう大きくない $E_7^{(1)}$ の場合を取り上げる.

Sakai 理論によると, $E_7^{(1)}$ の場合は 9 点のうち 6 点が 2 次曲線上に, 3 点が直線上にあって, 3 次曲線が 2 次曲線と直線に分かれる場合である [3]. ここでは $P_3, P_4, P_5, P_7, P_8, P_9$ が 2 次曲線 C_2 上, P_1, P_2, P_6 が直線 L 上にあるものとし, 以下のようにパラメータづけをする:

$$P_i = \begin{cases} (-u_i : 0 : 1) & (i = 1, 2, 6), \\ (1 : u_i : u_i^2) & (i = 3, 4, 5, 7, 8, 9). \end{cases} \quad (47)$$

図 5: $E_7^{(1)}$ の場合の点配置

すなわち, P_1, \dots, P_9 の乗っている 3 次曲線 C の方程式は $y^3 - xyz = 0$, C_2 が $y^2 - xz = 0$, L が $y = 0$ である.

最初に, 時間発展のパラメータへの作用を決定しよう. まず \bar{P}_9 は $P_1, \dots, P_8, \bar{P}_9$ が 3 次曲線の pencil の base point になるように決まる. $P_1, \dots, P_8, \bar{P}_9$ を通る 3 次曲線を決めるには, その方程式を

$$F(x, y, z) = c_1 x^3 + c_2 x^2 y + c_3 x^2 z + c_4 x y^2 + c_5 x z^2 + c_6 x y z + c_7 y^3 + c_8 y^2 z + c_9 y z^2 + c_{10} z^3 = 0,$$

とおき, 各点の座標を代入して得られる c_1, \dots, c_{10} に対する 9 本の連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} -u_1^3 & 0 & u_1^2 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -u_2^3 & 0 & u_2^2 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & u_3 & u_3^2 & u_3^2 & u_3^4 & u_3^3 & u_3^3 & u_3^4 & u_3^5 & u_3^6 \\ 1 & u_4 & u_4^2 & u_4^2 & u_4^4 & u_4^3 & u_4^3 & u_4^4 & u_4^5 & u_4^6 \\ 1 & u_5 & u_5^2 & u_5^2 & u_5^4 & u_5^3 & u_5^3 & u_5^4 & u_5^5 & u_5^6 \\ -u_6^3 & 0 & u_6^2 & 0 & -u_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & u_7 & u_7^2 & u_7^2 & u_7^4 & u_7^3 & u_7^3 & u_7^4 & u_7^5 & u_7^6 \\ 1 & u_8 & u_8^2 & u_8^2 & u_8^4 & u_8^3 & u_8^3 & u_8^4 & u_8^5 & u_8^6 \\ 1 & u_9 & u_9^2 & u_9^2 & u_9^4 & u_9^3 & u_9^3 & u_9^4 & u_9^5 & u_9^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (48)$$

を解く. 3 次曲線の pencil を得るためには, この方程式の解が任意パラメータを 2 個含むようにすればよい. そのためには係数行列のランクが 8, つまり, 係数行列の任意の 9×9 小行列式が全て 0 になればよいので, 係数行列の列を 1 つ抜いた行列式を計算して, それらが全て 0 になる条件を求めればよいことになる. 計算の結果, そのための条件は

$$u_1 \cdots u_8 u_9 = 1, \quad (49)$$

で与えられる. そこで $q = 1/(u_1 \cdots u_9)$ とおくと,

$$u_9 = q u_9, \quad (50)$$

となる.

次に \bar{P}_8 を決めよう. \bar{P}_8 は $P_8 + P_9 = \bar{P}_8 + \bar{P}_9$ で定まるから, P_8, P_9 を通る直線と 3 次曲線 C との交点, および \bar{P}_8, \bar{P}_9 を通る直線と C との交点とが一致するように決めればよい. P_8, P_9 は 2 次曲線 C_2 上の点だから, それらを通る直線と C の交点は直線 L 上にある. 従って, 交点は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -u \\ u_8 & u_9 & 0 \\ u_8^2 & u_9^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow u = \frac{1}{u_8 u_9}, \quad (-1/(u_8 u_9) : 0 : 1),$$

である. \bar{P}_8 はこれと \bar{P}_9 を結ぶ直線と $C(2$ 次曲線 $C_2)$ の交点上にあるから,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1/(u_8 u_9) \\ u_9 & u_8 & 0 \\ u_9^2 & u_8^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow u_8 = \frac{u_8 u_9}{u_9} = u_8/q,$$

となる.

次に, 超幾何解が得られる条件は P_5, P_6, P_7 が 1 直線上にあることであつたが, それは

$$d_{567} = \begin{vmatrix} 1 & -u_6 & 1 \\ u_5 & 0 & u_7 \\ u_5^2 & 1 & u_7^2 \end{vmatrix} = (u_5 u_6 u_7 - 1)(u_5 - u_7) = 0 \longrightarrow u_5 u_6 u_7 = 1, \quad (51)$$

で与えられる.

これで超幾何解を得る準備が全て整った. 命題 3.3 で $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の場合を考え, (47) を代入すると,

$$\begin{aligned} A(\bar{F} - F) - BF + C(m\bar{E} - F) &= 0, \quad F = d_{2310}, \\ \frac{A}{B} &= \frac{qu_9[58][138][568][239]}{u_3 u_5 [26][89][89][189]}, \quad l = \frac{[39][139]}{[38][138]}, \\ \frac{C}{B} &= \frac{qu_8[59][139][569][238]}{u_3 u_5 [26][98][98][198]}, \quad m = \frac{[38][138]}{[39][139]}, \end{aligned} \quad (52)$$

が得られる. ただし,

$$[ij] = u_i - u_j, \quad [ijk] = 1 - u_i u_j u_k, \quad (53)$$

という記号を導入した. 一方, 超幾何函数 $\phi = {}_8W_7(a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; q, z)$, $z = \frac{a_0^2 q^2}{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ の満たす 3 項間関係式として

$$\begin{aligned} &L \left\{ \frac{(1-a_1)(1-a_0/a_1)}{(1-a_2/q)(1-a_0q/a_2)} \bar{\phi} - \phi \right\} + M \left\{ \frac{(1-a_2)(1-a_0/a_2)}{(1-a_1/q)(1-a_0q/a_1)} \phi - \bar{\phi} \right\} \\ &= (a_1 - a_2) \left(1 - \frac{a_0q}{a_1 a_2} \right) \left(1 - \frac{a_0^2 q^2}{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} \right) \phi, \end{aligned} \quad (54)$$

ただし,

$$\begin{aligned} L &= \frac{a_2(1-a_2/q)(1-a_0q/a_2 a_2)(1-a_0q/a_2 a_4)(1-a_0q/a_2 a_5)}{a_1 - a_2/q}, \\ M &= \frac{a_1(1-a_1/q)(1-a_0q/a_1 a_2)(1-a_0q/a_1 a_4)(1-a_0q/a_1 a_5)}{a_1/q - a_2}, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\bar{\phi} = \phi(a_0; qa_1, a_2/q, a_3, a_4, a_5), \quad \phi = \phi(a_0; a_1/q, qa_2, a_3, a_4, a_5),$$

が知られている [29]. そこで「ゲージ」 g を

$$F = g\Phi, \quad \bar{g} = l^{-1} \frac{[569][258]}{[568][259]} g,$$

で導入して (52) と (54), (55) を比較すると,

$$\Phi = {}_8W_7(a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; q, z), \quad z = \frac{a_0^2 q^2}{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}, \quad (56)$$

$$a_0 = u_2 u_5^2, \quad a_1 = \frac{u_5}{u_8}, \quad a_2 = \frac{u_5}{u_9}, \quad a_3 = \frac{qu_5}{u_3}, \quad a_4 = \frac{u_5}{u_4}, \quad a_5 = \frac{u_2}{u_6}, \quad (57)$$

と同定できる.

4 q -Painlevé 方程式の超幾何解： $E_7^{(1)}$ の場合

前節では \mathbb{P}^2 上の 3 次曲線の幾何を利用して $E_7^{(1)}$ 型の場合の超幾何解を導出した。そこで現れた変数 $F = d_{12} 10$ と方程式 (6) の変数 f, g は線形変換 (1 次分数変換) で結び付いているはずであるが、それらを具体的に関係づけることはそれほど自明なことではない。(6) の超幾何解をつくるには、現れる超幾何関数がわかったわけであるから、逆に素朴な方法に戻った方が速い。そこで、もう一度 $E_7^{(1)}$ の場合を例にとり、 q -Painlevé 方程式の超幾何解の構成を試みよう。本節の目標は以下の定理を示すことである。

定理 4.1 $E_7^{(1)}$ 型 q -Painlevé 方程式 (6) において、

$$z = \frac{g - t/b_1}{g - 1/b_5}, \quad (58)$$

とする。このとき、

$$z = \frac{1 - b_3/b_1}{1 - b_3/b_5 t} \frac{{}_8W_7(a; qb, c, d, e, f; q, qa^2/bcdef)}{{}_8W_7(a; b, c, d, e, f; q, q^2 a^2/bcdef)}, \quad (59)$$

$$a = b_1 b_8 / b_3 b_5, \quad b = b_8 / b_5, \quad c = b_2 / b_3, \quad d = b_1 t / b_5, \quad e = b_1 / b_5 t, \quad f = b_4 / b_3, \quad (60)$$

は (6) の

$$b_1 b_3 = b_5 b_7 \quad (b_2 b_4 = q b_6 b_8), \quad (61)$$

の場合の解を与える。特に *terminating* の場合、例えば

$$f = b_4 / b_3 = q^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (62)$$

の場合には *terminating balanced* ${}_4\varphi_3$ (Askey-Wilson 多項式) で表示できる：

$$z = \frac{1 - b_3/b_1}{1 - b_3/b_5 t} \frac{{}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} a/bc, d, e, f \\ a/b, aq/c, def/a \end{matrix}; q, q \right)}{{}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} aq/bc, d, e, f \\ aq/b, aq/c, def/a \end{matrix}; q, q \right)}. \quad (63)$$

注意： 直交多項式の「親玉」Askey-Wilson 多項式 $p_n(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ は

$$p_n(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha^{-n} (\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta; q)_n {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} \alpha\beta\gamma\delta q^{n-1}, \alpha t, \alpha/t, q^{-n} \\ \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta \end{matrix}; q, q \right), \quad x = \frac{t + t^{-1}}{2}, \quad (64)$$

で定義される [18]. □

超幾何解の構成は、まず Riccati 方程式で記述される特殊解を探すことから始まる。

命題 4.2 $b_1 b_3 = b_5 b_7$ のとき (自動的に $b_2 b_4 = q b_6 b_8$), (6) は Riccati 方程式

$$\bar{g} = \frac{(t\bar{t} - 1)f + t \{ -(b_6 + b_8)\bar{t} + (b_2 + b_4) \}}{\{ -(b_6 + b_8) + (b_2 + b_4)t \} f + b_6 b_8 (1 - t\bar{t})}, \quad (65)$$

$$f = \frac{(t^2 - 1)b_5 b_7 g + t \{ (b_1 + b_3) - (b_5 + b_7)t \}}{\{ t(b_1 + b_3) - (b_5 + b_7) \} g + (1 - t^2)}, \quad (66)$$

への特殊化を許容する。

証明 命題 4.2 は [7, 8] で既に得られているが, 感じをつかむために証明を記しておく. (6) を次のように分解する:

$$\frac{f\bar{g} - \bar{t}t}{f\bar{g} - 1} = \frac{(f - b_2t)(f - b_4t)}{(f - b_5)(f - b_8)}, \quad (67)$$

$$\frac{fg - t^2}{fg - 1} = \frac{(f - b_1t)(f - b_3t)}{(f - b_5)(f - b_7)}, \quad (68)$$

$$\frac{f\bar{g} - \bar{t}t}{f\bar{g} - 1} = \frac{(g - t/b_2)(g - t/b_4)}{(g - 1/b_5)(g - 1/b_8)}, \quad (69)$$

$$\frac{fg - t^2}{fg - 1} = \frac{(g - t/b_1)(g - t/b_3)}{(g - 1/b_5)(g - 1/b_7)}. \quad (70)$$

まず (70) より,

$$fg \left[1 - \frac{(g - t/b_1)(g - t/b_3)}{(g - 1/b_5)(g - 1/b_7)} \right] = t^2 - \frac{(g - t/b_1)(g - t/b_3)}{(g - 1/b_5)(g - 1/b_7)},$$

これを整理して

$$\begin{aligned} & fg \left[\left\{ -\left(\frac{1}{b_5} + \frac{1}{b_7}\right) + t\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_3}\right) \right\} g + \left(\frac{1}{b_5b_7} - \frac{t^2}{b_1b_3}\right) \right] \\ &= (t^2 - 1)g^2 + \left\{ -t^2\left(\frac{1}{b_5} + \frac{1}{b_7}\right) + t\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_3}\right) \right\} g + t^2\left(\frac{1}{b_5b_7} - \frac{1}{b_1b_3}\right), \end{aligned}$$

となるが, もし $b_1b_3 = b_5b_7$ であれば右辺第 3 項が消えて, Riccati 方程式 (66)

$$f = \frac{(t^2 - 1)b_5b_7g + t\{(b_1 + b_3) - (b_5 + b_7)t\}}{\{t(b_1 + b_3) - (b_5 + b_7)\}g + (1 - t^2)},$$

を得る. 同様に, (68) を $b_1b_3 = b_5b_7$ に注意しながら整理して

$$g = \frac{(t^2 - 1)f + t\{(b_1 + b_3) - (b_5 + b_7)t\}}{\{t(b_1 + b_3) - (b_5 + b_7)\}f + b_5b_7(1 - t^2)},$$

を得る. これを f について解き直せば (66) と等価であることがわかり, 従って (70) と (68) は consistent に (66) に帰着したことになる. (65) に関しても (67) と (69) から同様の計算で確かめられる. \square

さて 2.2 節で言及したように, (65), (66) を直接線形化しても残念なことに超幾何方程式に同定できる線形 2 階差分方程式は得られない. ここでは新しい従属変数を

$$z = \frac{g - t/b_1}{g - 1/b_5}, \quad (71)$$

と選ぶことにする. (数式処理を用いて) z に関する Riccati 方程式を書き下すと,

$$\bar{z} = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad (72)$$

$$\begin{aligned} A &= b_1b_5(-b_3 + b_5t) \\ &\quad \times \left[b_4b_6b_8q^2t^3 + (b_1b_4b_5 - b_4^2b_5 - b_1b_4b_6 - b_1b_4b_8 - b_5b_6b_8q)qt^2 \right. \\ &\quad \left. + (b_1b_4^2 + b_4b_5b_6q + b_4b_5b_8q + b_1b_6b_8q - b_4b_6b_8q)t - b_1b_4b_5 \right], \end{aligned} \quad (73)$$

$$B = -(b_1 - b_4)b_5^2(b_1b_4 - qb_6b_8)t(b_5 - b_3t)(-1 + qt^2), \quad (74)$$

$$C = -b_1^2b_4(b_5 - b_6)(b_5 - b_8)(b_3 - b_5t)(-1 + qt^2), \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
D &= b_1 b_5 (b_5 - b_3 t) \\
&\times \left[-b_1 b_4 b_5 q t^3 + (b_1 b_4^2 + b_4 b_5 b_6 q + b_4 b_5 b_8 q + b_1 b_6 b_8 q - b_4 b_6 b_8 q) t^2 \right. \\
&\quad \left. + (b_1 b_4 b_5 - b_4^2 b_5 - b_1 b_4 b_6 - b_1 b_4 b_8 - b_5 b_6 b_8 q) t + b_4 b_6 b_8 \right], \quad (76)
\end{aligned}$$

を得る。以下では (72)-(76) の線形化を扱う。

Riccati 方程式 (72) に対して, $z = F/G$ とおく。 H を分離函数とすると,

$$\frac{\bar{F}}{H} = AF + BG, \quad \frac{\bar{G}}{H} = CF + DG, \quad (77)$$

を得る。(77) から G を消去すると, F に関する線形 2 階差分方程式

$$\bar{F} - c_2 F + c_3 \underline{F} = 0, \quad c_2 = \frac{H}{B}(AB + BD), \quad c_3 = \frac{B}{B}HH(AD - BC), \quad (78)$$

を得る。超幾何型の線形 2 階差分方程式と同定するため,

$$(\bar{F} - F) + (1 - c_2 + c_3)F + c_3(\underline{F} - F) = 0, \quad (79)$$

と変形すると, c_3 は因数分解されているが, $1 - c_2 + c_3$ はそうではない。そこで, 最初のステップは次のようになる。

ステップ 1: H をうまく選んで, $1 - c_2 + c_3$ がうまくパラメータの 1 次式に因数分解するようにせよ。そして, (79) を適当な超幾何函数の線形 2 階差分方程式と同定せよ。□

$E_7^{(1)}$ の場合は, 既に ${}_8W_7$ の方程式と比較すればよいことがわかっているから, 数式処理で実験しながら H を推測することができる。実際にやってみるとそう難しくはない。

次に, (77) から F を消去すると, G に関する線形 2 階差分方程式

$$(\bar{G} - G) + (1 - d_2 + d_3)G + d_3(\underline{G} - G) = 0, \quad d_2 = \frac{H}{D}(DC + CA), \quad d_3 = \frac{C}{C}HH(AD - BC), \quad (80)$$

を得る。上と同じ H で $1 - d_2 + d_3$ が因数分解してくれればよいが, 大抵そうになっていない。そこで, ゲージ因子 κ を導入して, $G \rightarrow \kappa G$, $\bar{\kappa} = k\kappa$ と置き換える。すると,

$$z = \frac{1}{\kappa} \frac{F}{G}, \quad (81)$$

$$(\bar{G} - G) + (1 - d_2 + d_3)G + d_3(\underline{G} - G) = 0, \quad d_2 = \frac{H}{k} \frac{1}{C}(DC + CA), \quad d_3 = \frac{HH}{kk} \frac{C}{C}(AD - BC). \quad (82)$$

こうしておいて, 上で決めた H に対し, k をうまく選んで $1 - d_2 + d_3$ が因数分解するようにすればよい。これは $H/k = \tilde{H}$ とおけば, 次の手続きと同じ。

ステップ 2:

$$(\bar{G} - G) + (1 - d_2 + d_3)G + d_3(\underline{G} - G) = 0, \quad d_2 = \frac{\tilde{H}}{C}(DC + CA), \quad d_3 = \frac{C}{C}\tilde{H}\tilde{H}(AD - BC), \quad (83)$$

において, \tilde{H} をうまく選んで, $1 + d_3 - d_2$ が因数分解するようにせよ。そして, (83) を適当な超幾何函数の線形 2 階差分方程式と同定せよ。 F と比べて, パラメータのいくつかはずれている程度のものが期待される。□

ここまで終了した時点で,

$$z = \frac{1}{\kappa} \times \frac{\theta_1 \phi_1}{\theta_2 \phi_2}, \quad \frac{H}{\bar{H}} = k, \quad \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} = k \quad (84)$$

となっている. ここで, ϕ_i ($i = 1, 2$) は適当な超幾何関数で, θ_i ($i = 1, 2$) は比例係数である. 最後に θ_i を決定すれば終了である.

ステップ 3: 関係式

$$\frac{\bar{F}}{H} = AF + \kappa BG, \quad \frac{\bar{\kappa} \bar{G}}{H} = CF + \kappa DG, \quad (85)$$

と適当な超幾何関数の隣接関係式を比較し, θ_i を決定する. □

さて, 数式処理を用いれば (72)-(76) に対して上の手続きはそう困難なく実行することができる. まず, $\Phi = \Phi(a; b, c, d, e, f) = {}_8W_7(a; b, c, d, e, f; q, z)$, $z = q^2 a^2 / bcdef$ の満たす 2 階線形差分方程式 (54) を

$$U_1(\bar{\Phi} - \Phi) + U_2\Phi + U_3(\Phi - \bar{\Phi}) = 0, \quad \bar{\Phi} = \Phi(a; b, qc, d/q, e, f), \quad (86)$$

$$\begin{cases} U_1 = \frac{(1-c)(1-a/c)(1-aq/c)(1-aq/bd)(1-aq/de)(1-aq/df)}{d(1-c/d)(1-qc/d)}, \\ U_2 = \frac{qa^2}{bcdef} \left(1 - \frac{qa}{cd}\right) (1-b)(1-e)(1-f), \\ U_3 = \frac{(1-d)(1-a/d)(1-qa/d)(1-aq/bc)(1-aq/ce)(1-aq/cf)}{c(1-d/c)(1-qd/c)}, \end{cases} \quad (87)$$

と書き直しておくとも便利である.

ステップ 1, 2: H, \bar{H} をうまく選んで, (79) と (83) を (86), (87) と同定することができる. その結果は以下の通り:

$$H = \frac{qb_8t - b_3}{qb_1b_5(b_1t - b_5)(b_3t - b_8)(b_4t - b_6)(b_5t - b_3)(qb_8t - b_4)}, \quad (88)$$

$$\bar{H} = \frac{qb_8t - b_3}{b_1b_5(b_1t - b_5)(b_3t - b_8)(b_4t - b_6)(qb_5t - b_3)(qb_8t - b_4)}, \quad (89)$$

$$F \propto \Phi(a; qb, c, d, e, f), \quad G \propto \Phi(a; b, c, d, e, f), \quad (90)$$

$$a = b_1b_8/b_3b_5, \quad b = b_8/b_5, \quad c = b_1t/b_5, \quad d = b_1/b_5t, \quad e = b_2/b_3, \quad f = b_4/b_3$$

また,

$$k = \frac{H}{\bar{H}} = \frac{qb_5t - b_3}{q(b_5t - b_3)} = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \rightarrow \kappa = 1 - \frac{b_3}{b_5t}. \quad (91)$$

ステップ 3: a, e, f は以下使わないので省略し, ${}_8W_7(a; b, c, d, e, f; q, z) = \Phi(b, c, d)$ などと必要な引数だけを書くことにする.

$$F = \theta(qb, c, d)\Phi(qb, c, d), \quad G = \theta(b, c, d)\Phi(b, c, d),$$

とおくと, (85) は

$$\frac{1}{\kappa HB} \frac{\theta(qb, qc, d/q)}{\theta(b, c, d)} \Phi(qb, qc, d/q) = \frac{A}{\kappa B} \frac{\theta(qb, c, d)}{\theta(b, c, d)} \Phi(qb, c, d) + \Phi(b, c, d), \quad (92)$$

$$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa HD} \frac{\theta(b, qc, d/q)}{\theta(b, c, d)} \Phi(b, qc, d/q) = \frac{C}{\kappa D} \frac{\theta(qb, c, d)}{\theta(b, c, d)} \Phi(qb, c, d) + \Phi(b, c, d), \quad (93)$$

と表される。これに相当する ${}_8W_7$ の隣接関係式は [29] で得られている関係式

$$\frac{b(1-aq/bd)(1-aq/be)(1-aq/bf)}{1-aq/b} \Phi(b/q, c) - \frac{c(1-aq/cd)(1-aq/ce)(1-aq/cf)}{1-aq/c} \Phi(b, c/q) = (b-c)(1-a^2q^2/bcdef) \Phi(b, c), \quad (94)$$

$$(c-1)(1-a/c) \Phi(b/q, qc) + (1-b/q)(1-aq/b) \Phi(b, c) = (c-b/q)(1-aq/bc) \Phi(b/q, c), \quad (95)$$

を、 Φ がパラメータ b, c, d, e, f に関して対称だということに注意しながら組み合わせることで得られる（得られる式自体は複雑なのでここには書かない）。得られた隣接関係式と (92), (93) を比較することによって、次のことがわかる：

$$\frac{\theta(qb, c, d)}{\theta(b, c, d)} = 1 - b/a = 1 - \frac{b_3}{b_1}, \quad \frac{\theta(b, qc, d/q)}{\theta(b, c, d)} = 1, \quad \frac{\theta(qb, qc, d/q)}{\theta(b, c, d)} = 1 - \frac{b_3}{b_1} = \frac{\theta(qb, c, d)}{\theta(b, c, d)} \times \frac{\theta(b, qc, d/q)}{\theta(b, c, d)}.$$

以上のことから、超幾何解

$$\theta(b, c, d) = (b/aq)_\infty = (b_3/qb_1)_\infty, \quad (96)$$

$$z = \frac{1}{\kappa} \frac{F}{G} = \frac{1}{1-b_3/b_5t} \frac{\theta(qb, c, d)}{\theta(b, c, d)} \frac{\Phi(qb, c, d)}{\Phi(b, c, d)} = \frac{1-b_3/b_1}{1-b_3/b_5t} \frac{\Phi(qb, c, d)}{\Phi(b, c, d)}, \quad (97)$$

が得られた。これで定理 4.1 の前半が示された。

定理 4.1 後半は、Watson's transformation formula [18]

$${}_8W_7(a; b, c, d, e, f; q, q^2a^2/bcdef) = \frac{(aq, aq/de, aq/df, aq/ef)_\infty}{(aq/d, aq/e, aq/f, aq/def)_\infty} {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} aq/bc, d, e, f \\ aq/b, aq/c, def/a \end{matrix}; q, q \right), \quad (98)$$

を用いて変形することによって得られる。特に terminating の場合、例えば $f = q^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ である場合は、

$$\frac{(aq/df)_\infty}{(aq/d)_\infty} = \frac{(1-q^{n+1}a/d)(1-q^{n+2}a/d)\cdots}{(1-qa/d)(1-q^2a/d)\cdots} = \frac{1}{(aq/d)_n},$$

などが成り立つから、

$${}_8W_7(a; b, c, d, e, f; q, q^2a^2/bcdef) = \frac{(aq, aq/de)_n}{(aq/d, aq/e)_n} {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} aq/bc, d, e, f \\ aq/b, aq/c, def/a \end{matrix}; q, q \right), \quad (99)$$

となる。これを (97) に代入することによって定理の後半が得られる。□

5 おわりに

最後に、Painlevé 方程式と離散 Painlevé 方程式に関する研究の現状と展望について簡単に一言述べたい。Sakai 理論によって研究すべき方程式が整理され、master equation として楕円 Painlevé 方程式が導出されたが、楕円 Painlevé 方程式は方程式自身が巨大で、なかなか手が出なかった。 \mathbb{P}^2 上の点の配置空間上に $E_8^{(1)}$ 型 affine Weyl 群の双有理的な表現を構成し、それを用いて楕円 Painlevé 方程式を何とか書き下して超幾何解を構成し、2 階の線形方程式で記述される超幾何関数の「親玉」として楕円超幾何関数 ${}_{10}E_9$ が現れることを示したのが [22] である。また、そこで得られた平面曲線の幾何を用いる定式化を利用することにより、図式 (1) の q -Painlevé 方程式の超幾何解の構成をやり切ったのが [28] である。その結果、(1) に対応する超幾何関数の退化図式として

$$\text{balanced } {}_{10}W_9 \rightarrow {}_8W_7 \rightarrow \text{balanced } {}_3\phi_2 \rightarrow {}_2\phi_1 \rightarrow {}_1\phi_1 \rightarrow \begin{matrix} {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}; q, z \right) \\ {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} 0 \\ b \end{matrix}; q, z \right) \end{matrix} \rightarrow {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} 0 \\ -q \end{matrix}; q, z \right)$$

が得られた。本稿ではそのうち $E_7^{(1)}$ の場合を例にして、計算のできるだけ詳しい解説を試みた。このような非線形離散系の観点は、今後、超幾何関数自身の研究においても重要な役割を果たすであろうと期待している。なお、[22] で省かれた細部の計算と一般化の議論が [24, 25] で行われているので参照されたい。

では、他に離散 Painlevé 方程式について何がわかっているのか？確かに Sakai 理論によって大枠はわかっており、例えば Bäcklund 変換は全てのものについて得られている。しかし、それ以上の詳細な結果になると、意外に少ないのである。比較的詳細な結果があるのが $D_5^{(1)}(qP_{VI})$ [5, 6, 30] と $(A_2 + A_1)^{(1)}(qP_{III}, qP_{IV})$ [11, 12, 13, 31] であるが、それでも Lax pair といくつかの特殊解（前者については超幾何解とその行列式表示、後者については超幾何解、代数解とそれらの行列式表示）が得られているだけで、その他のものについては、やっと超幾何解のもっとも簡単な場合が今回わかったという段階である。特殊解一つを取ってみても、有理解、代数解、さらに対称性の高いものについては退化したものには見られないような特殊解があるかも知れない（例えば P_{VI} の Picard 解のような）が、何も議論されていない。もちろん、Lax pair についてもほとんど何も知られていない。つまり「展望」と言っても、まだ Painlevé 山の頂上に探検家が一瞬たどり着いた程度であって、そこに登れば何が見えるのか、どんな資源が地下に眠っているのか、まだ皆目わからない状態であろう。従って、今は素朴な動機がそのまま研究に結びつくと思う。本稿の結果も、方程式があればその解をつくってみたいという単純な動機に基づく。また、離散 Painlevé 方程式の時間発展（のうちあるタイプのもの）が動く 3 次曲線の上の加法定理として定式化されたことによって、何らかの応用が開けるのではないかと思われるが、これは今後新たに研究を始める若い人の柔軟な発想に是非期待したい。なお、離散 Painlevé 方程式、特に楕円 Painlevé 方程式の扱いにおいては、個々の問題に応じてよい座標系（表示）を見出すことが重要な問題となることを注意しておきたい [32]。

まだまだ先は長い、というよりも、離散 Painlevé 方程式の本格的な数学的研究はこれから始まるのである。そこで最後に、研究集会で大阪大学の尾角正人さんが引用してくださって赤面したが、著者の一人が「数学」に書いた駄文の 1 節を改めて書いて締めくくりとしたい。

「これさえ読めば研究の最先端であって、納得できないところは全て研究テーマであり、なんだこの程度しかわかっていないのか、と解釈するべきである。隙あらば論文の一本二本は書いてやる、といった意気込みで「挑む」のがよい」

参考文献

- [1] A. Ramani, B. Grammaticos, J. Hietarinta, *Discrete versions of the Painlevé equations*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1829–1832.
- [2] B. Grammaticos, A. Ramani, V. Papageorgiou, *Do integrable mappings have the Painlevé property?* Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1825–1828.
- [3] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Commun. Math. Phys. **220** (2001) 165–229.
- [4] 野海 正俊, 「パンルヴェ方程式 – 対称性からの入門 –」, すうがくの風景 **4**, 朝倉書店 (2000).
英訳: M. Noumi, *Painlevé equations through symmetry*, Translations of mathematical monographs, Vol. 223, American Mathematical Society, 2004.
- [5] M. Jimbo and H. Sakai, *A q-analogue of the sixth Painlevé equation*, Lett. Math. Phys. **38**(1996) 145–154.
- [6] H. Sakai, *Casorati determinant solutions for q-difference sixth Painlevé equation*, Nonlinearity **11**(1998) 823–833.

- [7] M. Murata, H. Sakai and J. Yoneda, *Riccati solutions of discrete Painlevé equations with Weyl group symmetry of type $E_8^{(1)}$* , J. Math. Phys. **44** (2003) 1396–1414.
- [8] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Tamizhmani and K. M. Tamizhmani, *Special function solutions of the discrete Painlevé equations*, Comput. Math. Appl. **42** (2001) 603–614.
- [9] Y. Ohta, A. Ramani and B. Grammaticos, *An affine Weyl group approach to the eight-parameter discrete Painlevé equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 10523–10532.
- [10] A. Ramani, B. Grammaticos and Y. Ohta, *The q -Painlevé V equation and its geometrical description*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 2505–2513.
- [11] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, *A study on the fourth q -Painlevé equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 8563–8581.
- [12] K. Kajiwara and K. Kimura, *On a q -difference Painlevé III equation. I: Derivation, symmetry and Riccati type solutions*, J. Nonlin. Math. Phys. **10** (2003) 86–102.
- [13] K. Kajiwara, *On a q -difference Painlevé III equation. II: Rational solutions*, J. Nonlin. Math. Phys. **10** (2003) 282–303.
- [14] M. D. Kruskal, K. M. Tamizhmani, B. Grammaticos and A. Ramani, *Asymmetric discrete Painlevé equations*, Reg. Chaot. Dyn. **5** (2000) 273–280.
- [15] A. Ramani and B. Grammaticos, *Discrete Painlevé equations: coalescences, limits and degeneracies*, Physica A **228** (1996) 160–171.
- [16] T. Masuda, *On the rational solutions of q -Painlevé V equation*, Nagoya Math. J. **169** (2003) 119–143.
- [17] T. Takenawa, *Weyl group symmetry of type $D_5^{(1)}$ in the q -Painlevé V equation*, Funkcial. Ekvac. **46**(2003) 173–186.
- [18] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **35**, (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [19] D. P. Gupta, M. E. H. Ismail and D. R. Masson, *Contiguous relations, basic hypergeometric functions, and orthogonal polynomials. II. Associated big q -Jacobi polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **171** (1992) 477–497.
- [20] 梶原 健司, 野海 正俊, 山田 泰彦, 「 $E_6^{(1)}$ 型 q -Painlevé 方程式の特殊解」, 日本数学会 2003 年度年会における講演
- [21] B. Grammaticos, A. Ramani and Y. Ohta, *A unified description of the asymmetric q - P_V and d - P_V equations and their Schlesinger transformations*, J. Nonlin. Math. Phys. **10**(2003) 215–228.
- [22] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada, *${}_{10}E_9$ solution to the elliptic Painlevé equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) L263–L272.
- [23] A.B. Coble, *Algebraic geometry and theta functions*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 10 (AMS, 1982).
- [24] 梶原 健司, 増田 哲, 野海 正俊, 太田 泰広, 山田 泰彦, 「Cremona 変換と楕円差分 Painlevé 方程式 – 高次元的な枠組みへの試論 –」, 京都大学数理解析研究所講究録「可積分系理論とその周辺 – 課題と展望を探る」に掲載予定 (2004).

- [25] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada, *Point configurations, Cremona transformations and the elliptic difference Painlevé equation*, preprint, nlin.SI/0411003.
- [26] T. Tsuda, *Integrable mappings via rational elliptic surfaces*, J. Phys. A:Math. Gen. **37**(2004), 2721–2730.
- [27] Ju.I. Manin, *The Tate height of points on an Abelian variety*, its variants and applications. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **28**(1964), 1363–1390; AMS Transl. **59**(1966), 82–110.
- [28] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada, *Hypergeometric solutions to the q -Painlevé equations*, Int. Math. Res. Not. **2004**, 2497–2521.
- [29] M.E.H Ismail and M. Rahman, *The associated Askey-Wilson polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **328**(1991), 201–237.
- [30] B. Grammaticos, Y. Ohta, A. Ramani and H. Sakai, *Degeneration through coalescence of the q -Painlevé equation*, J. Phys. A: Math. Gen **31**(1998), 3545–3558.
- [31] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, *q -Painlevé systems arising from q -KP hierarchy*, Lett. Math. Phys. **62** (2003), 259–268.
- [32] M. Murata, *New expressions for discrete Painlevé equations*, Funkcial. Ekvac. **47**(2004) 291–305.