数理解析研究所講究録 1426 巻 2005 年 119-125

弱最内戦略を完全にする項書換え系の等価変換

岡本 晃治 † 酒井 正彦 †† 西田 直樹 ††
Koji Okamoto † Masahiko Sakai †† Naoki Nishida ††
草刈 圭一朗 †† 坂部 俊樹 ††
Keiichirou Kusakari †† Toshiki Sakabe ††

名古屋大学大学院 情報科学研究科
Graduate School of Information Science Nagoya University
† okamo@sakabe.i.is.nagoya-u.ac.jp
†† {sakai,nishida,kusakari,sakabe}@is.nagoya-u.ac.jp

概　　要

項書換え系 (TRS) の書換え戦略は，与えられた任意の項に対してその戦略で全ての正規形に到達可能なとき，その TRS の完全な書換え戦略であるという．本稿では，最内戦略を拡張した弱最内戦略を定義して，停止性を持ち右線形である TRS に対して，弱最内戦略が完全となる等価な TRS を得るための TRS 等価変換の手法を提案する．

キーワード　項書換え系，書換え戦略，TRS 変換，弱最内戦略

1　はじめに

項書換え系 (TRS) は非決定的な計算を記述できるため，逆計算 [2, 5] など，複数の解を持つ問題を記述できる．そのような TRS は，一般的に計算結果の一意性を保証する性質 (合流性) を持たないので，入力された項の全正規形を求めるためには全解探索が必要となる．そのため，計算機による自動計算などの場面において本質的に必要ではない計算までも行ってしまうので，効率が悪くなる．

TRS の書換え戦略は，与えられた任意の項に対して，その全ての正規形に到達可能なときその TRS に対して完全な書換え戦略であるといい，書換え可能な最も内側の部分を書き換え続ける最内戦略が完全な書換え戦略となる TRS の条件を明らかにしてきた [3, 4]．

文献 [3] では，停止性を持ち右線形かつオーバーレイである TRS において，最内戦略が完全であることを示し，文献 [4] では，オーバーレイ性の拡張である内側危険対右向き合流性 (*Inside Left-to-Right Joinable*) という性質を定義して，最内戦略が完全となる TRS のクラスを拡張した．

一方，停止性を持ち右線形だがオーバーレイではない TRS に対しては，一般的に最内戦略は完全ではない．本稿では，最内戦略を拡張した弱最内戦略を定義して，停止性を持ち右線形である TRS に対して，弱最内戦略が完全となる TRS を得るための TRS 等価変換の手法を提案する．

2　準備

本稿では，項書換え系の一般的な記法 [1] に従う．

$\mathcal{F}$ を関数記号，$\mathcal{X}$ を変数の可算無限集合とする．$\mathcal{F}$, $\mathcal{X}$ 上の**項**の集合を $T(\mathcal{F},\mathcal{X})$ と記す．集合 $T(\mathcal{F},\emptyset)$ 中の項を**基礎項**と呼び，$\mathcal{F}$ 上の基礎項の集合を $T(\mathcal{F})$ と記す．項 s と t の等価関係を $s \equiv t$ と記す．項 t 中に 2 回以上出現する変数がないとき，t は**線形**であるという．

項 t の全ての位置の集合を $\mathcal{P}os(t)$ と記す．項 t の関数記号と変数の位置の集合をそれぞれ $\mathcal{FP}os(t)$, $\mathcal{VP}os(t)$ と記す．項の先頭の位置を ε と記す．文脈 C はホールと呼ばれる特別な記号 $\Box$ を含む項であり，文脈 C 中の位置 p の $\Box$ を項 t で置き換えて得られた項を $C[t]_p$ と記す．位置 p が特に本質的ではないときは，$C[t]_p$ を $C[t]$ と略記する．項 s, t に対して $s \equiv C[t]$ であるとき，t は s の**部分項**であるという．特に $C \not\equiv \Box$ である

とき，t は s の**真部分項**であるという．位置 p, q に対して $pp' = q$ であるような位置 p' が存在するとき $p \leq q$ と記し，特に，$p' \neq \varepsilon$ であるとき $p < q$ と記す．また，$p \leq q$, $q \leq p$ のいずれでもない場合，$p \parallel q$ と記す．

代入 σ は，有限な $x \in \mathcal{X}$ に対して $\sigma(x) \not\equiv x$ である $\mathcal{X}$ から $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ への写像であり，$\sigma(x)$ を $x\sigma$ と記す．代入 σ の 定義域を $\mathcal{D}om(\sigma) = \{x \mid x\sigma \not\equiv x\}$ と記す．

代入 σ, σ' に対して，$\mathcal{D}om(\sigma) = \mathcal{D}om(\sigma')$ かつ $\mathcal{D}om(\sigma)$ 中の全ての変数 x に対して，$x\sigma \xrightarrow{*}_R x\sigma'$ ならばかつそのときに限り，$\sigma \xrightarrow{*}_R \sigma'$ と記す．代入 σ, σ' に対して，$\mathcal{D}om(\theta) = \mathcal{D}om(\sigma) \uplus \mathcal{D}om(\sigma')$ かつ，$\mathcal{D}om(\sigma)$ 中の全ての変数 x に対して $x\sigma \equiv x\theta$ かつ，$\mathcal{D}om(\sigma')$ 中の全ての変数 x に対して $x\sigma' \equiv x\theta$ となる代入 θ を $\sigma \cup \sigma'$ と記す．正規形のみを代入する代入は**正規形**であると呼ぶ．

$T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ 上の**書換え規則**は $l \notin \mathcal{X}$ である項の組 (l, r) であり，これを $l \to r$ と記す．**項書換え系** (Term Rewriting System : TRS) は，$\mathcal{V}ar(l) \supseteq \mathcal{V}ar(r)$ であるような書換え規則 $l \to r$ の集合である．TRS R によって定められる R の書換え関係 $\to_R$ は，$\to_R = \{(C[l\sigma], C[r\sigma]) \mid l \to r \in R,\ C \in T(\mathcal{F} \cup \{\Box\}, \mathcal{X})\}$ である．このとき，項 $l\sigma$ を**リデックス**と呼ぶ．特に，$C \equiv \Box$ であるとき，$l\sigma \xrightarrow[\varepsilon]{}_R r\sigma$ と記す．$\to_R$ の反射推移閉包・推移閉包をそれぞれ $\xrightarrow{*}_R$, $\xrightarrow{+}_R$ と記す．また，TRS R の規則による n ステップの書換えを $\xrightarrow{n}_R$ と記す．項 t は，$t \to_R u$ であるような項 u が存在しないとき，R の**正規形**であるといい，R の正規形の集合を $NF_{\to_R}$ と記す．

項 $t \equiv C[u]$ のリデックス u は，u の真部分項であるようなリデックスが存在しないとき，t の**最内リデックス**であるという．TRS R の規則で最内リデックスを書き換えるステップを $\to_{in(R)}$ と記す．

TRS R は，$t_0 \to_R t_1 \to_R \cdots$ という R の規則による無限の書換えが存在しないとき，**停止性**を持つという．R は，その全ての規則の右辺が線形であるとき，**右線形**であるという．2つの書換え規則，$l \to r$ と $l' \to r'$ は，位置 $p \in \mathcal{FP}os(l)$ と，代入 σ, σ' が存在して，$(l\sigma)|_p \equiv l'\sigma'$ であるとき，位置 p で**重なり**を持つといい，特に，$p = \varepsilon$ であるとき，2つの規則は**先頭で重なりを持つ**という．R は，どの2つの規則も先頭以外では重なりを持たないとき，**オーバーレイ**であるという．R は，規則 $l \to r, l' \to r'$, 代入 σ, σ', 位置 $p \in \mathcal{FP}os(l)$ に対して，$l\sigma[r'\sigma']_p \xleftarrow[\varepsilon<p]{}_R l\sigma[l'\sigma']_p \equiv l\sigma \xrightarrow[\varepsilon]{}_R r\sigma$ ならば，$l\sigma[r'\sigma']_p \xrightarrow{*}_R r\sigma$ であるとき，**内側危険対右向き合流性** (Inside Left-to-Right Joinable) を持つという．

3 弱最内戦略を完全にするTRS等価変換

3.1 最内戦略が完全であるTRS

本節では，項書換え系における書換え戦略とその完全性を定義する．その後，最内戦略が完全となるTRSの条件に関して，これまでに得られた結果を紹介する．

定義 1 R をTRSとする．二項関係 $\to_c$ は，$\to_c \subseteq \to_R$ かつ，$NF_{\to_c} = NF_{\to_R}$ であるとき，R の**戦略**であるといい，R の戦略 $\to_c$ は，任意の項 s, R の正規形 t に対して，$s \xrightarrow{*}_R t$ ならば $s \xrightarrow{*}_c t$ であるとき，R に対して**完全**であるという．

定理 1 ([3]) 最内戦略は，停止性を持ち右線形かつオーバーレイであるTRSに対して完全である．

定理 2 ([4]) 最内戦略は，停止性を持ち右線形かつ内側危険対右向き合流性を持つTRSに対して完全である．

文献 [3] では，オーバーレイ性によって，左辺の先頭以外での書換え規則の重なりを許していない．それに対して，内側危険対右向き合流性を持つTRSにおいては，左辺の先頭以外での規則の重なりを許す代わりに，そのような重なりによって分岐した書換えは，内側を書き換えて得られた項から，外側を書換えて得られた項に到達可能であるという条件を持たせており，最内戦略が完全となるTRSのクラスを拡張した．

しかし，停止性をもち右線形であるが内側危険対右向き合流性を持たないTRSに対して，一般的に最内戦略は完全ではない．

例 1 $R_1 = \{f(a) \to b,\ a \to c\}$ とする．R_1 は停止性を持ち右線形であるが，内側危険対右向き合流性を持たない．このとき，項 $f(a)$ は b と $f(c)$ の2つの正規形を持つが，b には最内戦略では到達不可能であり，R_1 に対して最内戦略は完全ではない．

3.2 弱最内戦略を完全にするTRS等価変換

例 1によって，最内戦略の完全性には書換え規則の重なりが重要な役割を果たしていることがわかる．本

節では，書換え規則の左辺の先頭以外での規則の重なりに注目して，最内戦略を拡張した弱最内戦略を定義する．その後，停止性を持ち右線形である TRS に対して，弱最内戦略が完全となる TRS を得る等価変換を提案する．

定義 2 R を TRS とする．R の規則 $l \to r$，文脈 C，代入 σ に対して，項 $t \equiv C[l\sigma]$ のリデックス $l\sigma$ は，t の最内リデックスであるか，位置 $p \in \mathcal{FP}os(l)$ に対して $(l\sigma)|_p$ が t の最内リデックスであるとき，t の**弱最内リデックス**である．

弱最内リデックスを書き換える書換え戦略を**弱最内戦略**と呼び，R の規則による弱最内書換えのステップを $\to_{wi(R)}$ と記し，そうではないステップを $\to_{\neg wi(R)}$ と記す．

弱最内書換えは，最内リデックスに加えて，最内リデックスと重なるリデックスも書き換えることが可能である．しかし，それだけでは，最内戦略が完全であるのに必要であったオーバーレイ性，ならびに内側危険対右向き合流性を弱最内戦略は吸収しきれない．

例 2 $R_2 = \{f(x) \to g(x),\ g(a) \to c,\ g(b) \to d,\ a \to b\}$ とする．R_2 は停止性を持ち右線形だが，内側危険対右向き合流性を持たない．このとき，項 $f(a)$ には c, d の 2 つの正規形が存在するが，c に関して，$f(a)$ から c への唯一の書換え系列は $f(a) \to_{\neg wi(R_2)} g(a) \to_{wi(R_2)} c$ となり，c には R_2 の弱最内戦略の書換えでは到達不可能である．

停止性を持ち右線形であるが内側危険対右向き合流性を持たない TRS に対しては，弱最内戦略は一般的に完全ではない．このため，TRS R_2 に対して弱最内戦略を完全にするためには，$f(a) \to_{wi(R_2')} g(a)$ となるように書換え規則，例 R_2 においては $f(a) \to g(a)$，を追加すればよい．

以下に，$f(a) \to_{\neg wi(R_2)} g(a) \to_{wi(R_2)} c$ のような弱最内戦略が不完全となる原因となる書換え系列を一般化する．

定義 3 R を TRS とする．R の規則 $l \to r$，$l' \to r'$，代入 σ，σ'，文脈 C に対して，以下の 2 つの形の書換え系列を R の**重なり発生リダクション**と呼ぶ．

$$C[l\sigma]_p \underset{p}{\to}_{\neg wi(R)} C[r\sigma]_p \equiv l'\sigma' \underset{\varepsilon}{\to}_{wi(R)} r'\sigma'$$
$$\text{ここで}\ \ (\sigma, \sigma') = \mathrm{mgu}(C[r]_p, l')\ ,\ p \in \mathcal{FP}os(l') \qquad \text{(OAR1)}$$

$$l\sigma \underset{\varepsilon}{\to}_{\neg wi(R)} r\sigma \equiv C[l'\sigma']_p \underset{p}{\to}_{wi(R)} C[r'\sigma']_p$$
$$\text{ここで}\ \ (\sigma, \sigma') = \mathrm{mgu}(r, C[l']_p)\ ,\ p \in \mathcal{FP}os(r) \qquad \text{(OAR2)}$$

いずれの場合に対しても，規則 $l\sigma \to r\sigma$ を R の**弱最内ブリッジ規則**と呼ぶ．また，R の重なり発生リダクション $s \to_{\neg wi(R)} s' \to_{wi(R)} s''$ と文脈 C に対して，$C[s] \to_{\neg wi(R)} C[s'] \to_{wi(R)} C[s'']$ もまた R の重なり発生リダクションとする．

次に，弱最内書換えと重なり発生リダクションに関する補題を与える．

補題 1 R を停止性を持ち右線形である TRS とする．項 s，R の正規形 t に対して，$s \to_{\neg wi(R)} t$ ならば $s \xrightarrow{*}_{wi(R)} t$ である．

証明 書換えステップ $s \to_{\neg wi(R)} t$ は，R の規則 $l \to r$，文脈 C，代入 σ に対して，$s \equiv C[l\sigma] \to_{\neg wi(R)} C[r\sigma] \equiv t$ と表すことができる．このとき，$C[r\sigma]$ が正規形であることと，$l\sigma \underset{\varepsilon}{\to}_{\neg wi(R)} r\sigma$ であることから，$C[l\sigma]$ のどの弱最内リデックスも l と重なりを持たず，σ が l の $\mathcal{V}ar(l) \backslash \mathcal{V}ar(r)$ 中の変数に代入する項に現れる．このため，R が停止性を持つことから，正規形のみを代入し $\mathcal{D}om(\sigma') = \mathcal{D}om(\sigma)$ である代入 σ' が存在し，

$$s \equiv C[l\sigma] \xrightarrow{*}_{wi(R)} C[l\sigma'] \to_{wi(R)} C[r\sigma'] \equiv C[r\sigma] \equiv t$$

となり成立．□

補題 2 R を停止性を持ち右線形である TRS とする．項 s, s'，R の正規形 t に対して，
$s \to_{\neg wi(R)} s' \xrightarrow{*}_{wi(R)} t$ ならば，以下のいずれかが成立する．

1. $s \xrightarrow{*}_{wi(R)} t$
2. R の重なり発生リダクション $u \to_{\neg wi(R)} u' \xrightarrow{*}_{wi(R)} u''$ が存在し，$s \xrightarrow{*}_{wi(R)} u \to_{\neg wi(R)} u' \to_{wi(R)} u'' \xrightarrow{*}_{wi(R)} t$

証明 概略を示す. $s' \equiv t$ の場合, 補題 1 より $s \xrightarrow{*}_{wi(R)} s' \equiv t$ となり成立.

$s' \xrightarrow{+}_{wi(R)} t$ の場合, $s \to_{\neg wi(R)} s' \xrightarrow{*}_{wi(R)} t$ の最初の2ステップの書換えの位置に注目して,

$$\begin{aligned} s \equiv C[l\sigma]_p &\underset{p}{\to}_{\neg wi(R)} C[r\sigma]_p \equiv C'[l'\sigma']_q \\ &\underset{q}{\to}_{wi(R)} C'[r'\sigma']_q \xrightarrow{*}_{wi(R)} t \end{aligned}$$

とおく. このとき, p と q の位置関係に関して $p \le q$, $q < p, p \parallel q$ の 3 つの場合について $s' \equiv t$ の場合と同様に $s \xrightarrow{*}_{wi(R)} t$ となるか, リダクション列 $s \xrightarrow{*}_R t$ 中に R の重なり発生リダクションが現れる. □

次に, 弱最内戦略を完全にする等価変換に関する諸定義を与える.

定義 4 R を TRS とする. TRS 変換 $\mathcal{T}$ を,

$\mathcal{T}(R) \stackrel{\text{def}}{=} R \cup \{l \to r \mid l \to r$ は R の弱最内ブリッジ規則$\}$

と定める. また, 自然数 i に対して TRS $\mathcal{T}^i(R)$ を,

$$\mathcal{T}^i(R) = \begin{cases} R & (i=0) \\ \mathcal{T}(\mathcal{T}^{i-1}(R)) & (i>0) \end{cases}$$

と定める. 自然数 i に対して, $\mathcal{T}^i(R) = \mathcal{T}^{i+1}(R)$ であるとき, 変換 $\mathcal{T}$ は i において停止したという.

次に, この変換 $\mathcal{T}$ が等価変換であることを示す.

命題 1 TRS R, 変換 $\mathcal{T}$ に対して $\to_R = \to_{\mathcal{T}(R)}$.

証明 変換 $\mathcal{T}$ と弱最内ブリッジ規則の定義より明らか. □

命題 2 R を TRS とする. 項 s, t, 自然数 i に対して, $s \xrightarrow{*}_R t \Leftrightarrow s \xrightarrow{*}_{\mathcal{T}^i(R)} t$.

証明 命題 1 より明らか. □

次に, TRS R 中の重なり発生リダクションから得られた弱最内ブリッジ規則は, その重なり発生リダクション中の $\to_{\neg wi(R)}$ ステップを, $\to_{wi(\mathcal{T}(R))}$ ステップにする補題を与える.

補題 3 R を停止性を持ち右線形である TRS とする. R の重なり発生リダクション $s \to_{\neg wi(R)} s' \to_{wi(R)} s''$ に対して $s \xrightarrow{+}_{wi(\mathcal{T}(R))} s''$ である.

証明 (OAR1) 型の R の重なり発生リダクション $s \equiv C[l\sigma] \to_{\neg wi(R)} C[r\sigma] \equiv l'\sigma' \underset{\varepsilon}{\to}_{wi(R)} r'\sigma' \equiv s''$ を考える. このとき, $l\sigma \underset{\varepsilon}{\to}_{\neg wi(R)} r\sigma$ なので, $l\sigma$ のどの最内リデックスも l と重なりを持たず, l の変数に代入されている項の中に表れるので, $\mathcal{D}om(\theta) = \mathcal{V}ar(l) \backslash \mathcal{V}ar(r)$ かつ $\mathcal{V}ar(l) \backslash \mathcal{V}ar(r)$ 中の全ての変数 x に対して $x\theta \equiv x\sigma$ である代入 θ と $\mathcal{D}om(\sigma'') = \mathcal{V}ar(r)$ かつ $\mathcal{V}ar(r)$ 中の全ての変数 x に対して $x\sigma'' \equiv x\sigma$ である代入 σ'' に対して, $C[l\sigma] \equiv C[l(\sigma'' \cup \theta)]$ である. このとき, R は停止性を持つので, $\theta \xrightarrow{*}_{wi(R)} \theta'$ となる正規形の代入 θ' が存在し,

$$\begin{aligned} C[l\sigma] \equiv C[l(\sigma'' \cup \theta)] &\xrightarrow{*}_{wi(R)} C[l(\sigma'' \cup \theta')] \\ \to_{\neg wi(R)} C[r(\sigma'' \cup \theta')] &\equiv C[r\sigma] \equiv l'\sigma' \underset{\varepsilon}{\to}_{wi(R)} r'\sigma \end{aligned}$$

という書換え系列と新たな R の重なり生成リダクション $C[l(\sigma'' \cup \theta')] \to_{\neg wi(R)} C[r(\sigma'' \cup \theta')] \equiv l'\sigma' \underset{\varepsilon}{\to}_{wi(R)} r'\sigma$ が得られる. ここで, この重なり生成リダクションにおいて, 項 $C[l(\sigma'' \cup \theta')]$ の全ての最内リデックスは, θ' が正規形であることから, 規則 $l \to r$ の両辺に現れる変数に代入されている項に表れる. このため, 弱最内ブリッジ規則の定義より, 変換 $\mathcal{T}$ で R に規則 $l(\sigma'' \cup \theta') \to r(\sigma'' \cup \theta')$ が追加されるので, $C[l(\sigma'' \cup \theta')] \to_{wi(\mathcal{T}(R))} C[r(\sigma'' \cup \theta')]$ となるので, 命題 2 とあわせて $s \equiv C[l\sigma] \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}(R))} C[l(\sigma'' \cup \theta')] \to_{wi(\mathcal{T}(R))} C[r(\sigma'' \cup \theta')] \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}(R))} r'\sigma' \equiv s''$ となるので, $s \xrightarrow{+}_{wi(\mathcal{T}(R))} s''$ となり成立.

(OAR2) 型の R の重なり発生リダクションに関しても同様. □

以上の命題・補題を用いて, 変換 $\mathcal{T}$ によって得られた TRS に対して弱最内戦略が完全であることを示す.

定理 3 R を停止性を持ち右線形である TRS とする. 変換 $\mathcal{T}$ が自然数 i において停止し, TRS $\mathcal{T}^i(R)$ が右線形ならば, 弱最内戦略は $\mathcal{T}^i(R)$ に対して完全な書換え戦略である.

証明 任意の項 s, R の正規形 t に対して, $s \xrightarrow{n}_R t$ ならば $s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^i(R))} t$ であることを, n に関する帰納法で示す.

$n = 1$ のとき $s \to_{wi(\mathcal{T}^i(R))} t$ ならば, 明らかに成立.
$s \to_{\neg wi(\mathcal{T}^i(R))} t$ ならば, 補題 1 より $s \xrightarrow{*}_{\neg wi(\mathcal{T}^i(R))} t$ となるので成立.

$n>1$ のとき $s \to_R s' \xrightarrow{n-1}_R t$ とすると，帰納法の仮定より $s' \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^i(R))} t$ である．ここで，$s \to_{wi(\mathcal{T}^i(R))} s'$ ならば，$s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^i(R))} t$ であり成立．$s \to_{\neg wi(\mathcal{T}^i(R))} s'$ ならば，補題 2 より $s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^i(R))} t$ となるか，項 u, u', u'' に対して，

$$s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^i(R))} u \to_{\neg wi(\mathcal{T}^i(R))} u' \to_{wi(\mathcal{T}^i(R))} u'' \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^i(R))} t$$

かつ $u \to_{\neg wi(\mathcal{T}^i(R))} u' \to_{wi(\mathcal{T}^i(R))} u''$ が R の重なり発生リダクションであるかのいずれかとなる．前者の場合，明らかに成立．後者の場合，補題 3 より，

$$s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^i(R))} u \xrightarrow{+}_{wi(\mathcal{T}^{i+1}(R))} u'' \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^i(R))} t$$

となるので，命題 2 より，$s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^{i+1}(R))} t$ となる．このとき，$\mathcal{T}^i(R) = \mathcal{T}^{i+1}(R)$ なので，$s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^i(R))} t$ となり成立． □

4 考察

本節では，変換 $\mathcal{T}$ を施して得られた TRS の弱最内戦略による正規形の計算の効率の改善に関して，元の TRS による全解探索と比較した例を示す．

例 3 $R_3 = \{s(x) \to g(x),\ g(h(a,x)) \to c,\ h(x,b) \to d, a \to b\}$ とする．R_3 は停止性を持ち右線形である．

1. R_3 の重なり発生リダクションは，
$$s(h(a,x)) \to_{\neg wi(R_3)} g(h(a,x)) \to_{wi(R_3)} c$$
であり，$\mathcal{T}(R_3) = R_3 \cup \{s(h(a,x)) \to g(h(a,x))\}$ である．
2. $\mathcal{T}(R_3)$ には，新たな規則を追加する重なり発生リダクションは存在せず，$\mathcal{T}^2(R_3) = \mathcal{T}(R_3)$ である．

図 1 に例を示す．項 $s(h(a,a))$ には $c, g(d)$ の 2 つの正規形が存在して，その 2 つの正規形の全解探索には深さ優先探索で 32 ステップが必要である．一方，変換で得られた TRS $\mathcal{T}^2(R_3)$ による弱最内書換えでは，21 ステップで全ての正規形が求められる．

定理 4 より，新たな規則が追加されなくなるまで変換 $\mathcal{T}$ を施せば，そうして得られた TRS によって任意の項の全正規形に弱最内戦略で到達可能となる．しかし，この TRS 等価変換 $\mathcal{T}$ は，一般的に停止性を持たない．つまり，停止性を持ち右線形である TRS R に対して，$R \subseteq \mathcal{T}(R) \subseteq \mathcal{T}^2(R) \subseteq \cdots$ となるような変換 $\mathcal{T}$ によって無限に書換え規則が追加される場合が存在する．

例 4 $R_4 = \{f(h(x)) \to g(x)\ ,\ g(x) \to f(x)\ ,\ h(x) \to c\}$ とする．R_4 は停止性を持ち右線形である．

1. R_4 の重なり発生リダクションは，
$$g(h(x)) \xrightarrow[\varepsilon]{}_{\neg wi(R_4)} f(h(x)) \xrightarrow[\varepsilon]{}_{wi(R_4)} g(x)$$
であり，$\mathcal{T}(R_4) = R_4 \cup \{g(h(x)) \to f(h(x))\}$ である．
2. $\mathcal{T}(R_4)$ の重なり発生リダクションは，
$$f(h(h(x))) \xrightarrow[\varepsilon]{}_{\neg wi(\mathcal{T}(R_4))} g(h(x)) \xrightarrow[\varepsilon]{}_{wi(\mathcal{T}(R_4))} f(h(x))$$
であり，$\mathcal{T}^2(R_4) = \mathcal{T}(R_4) \cup \{g(h(x)) \to f(h(x))\}$ である．
3. $\mathcal{T}^2(R_4)$ の重なり発生リダクションは，
$$g(h(h(x))) \xrightarrow[\varepsilon]{}_{\neg wi(\mathcal{T}^2(R_4))} f(h(h(x))) \xrightarrow[\varepsilon]{}_{wi(\mathcal{T}^2(R_4))} g(h(x))$$
であり，$\mathcal{T}^3(R_4) = \mathcal{T}^2(R_4) \cup \{g(h(h(x))) \to f(h(x))\}$ である．

これを繰り返すことで，R_4 には

$$\begin{cases} f(\underbrace{h(\cdots h}_{i}(x)\cdots) \to g(\underbrace{h(\cdots h}_{i}(x)\cdots) & (i>1) \\ g(\underbrace{h(\cdots h}_{i}(x)\cdots) \to f(\underbrace{h(\cdots h}_{i}(x)\cdots) & (i>0) \end{cases}$$

という 2 種類の形の規則が追加され続けるので，変換 $\mathcal{T}$ は停止しない．

そこで，変換 $\mathcal{T}$ が停止しない TRS に対して，項 s が与えられたときに，s の全正規形を求めるために変換 $\mathcal{T}$ を何回施せばよいかを得るために，以下の定理を示した．

定理 4 R を停止性を持ち，右線形である TRS とする．このとき，項 s, R の正規形 t, 自然数 n に対して

$$s \xrightarrow{n}_R t \Rightarrow \text{自然数 } n' \leq n \text{ が存在し } s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} t$$

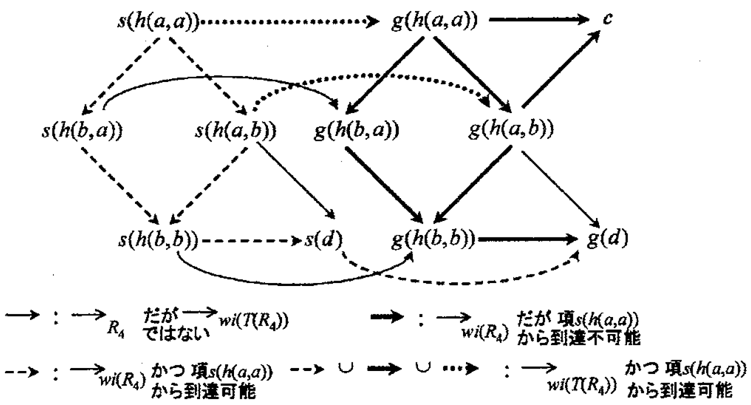

図 1: 変換前後の弱最内書換え関係の変化

証明 n に関する帰納法で示す.

$n = 1$ のとき $s \to_{wi(R)} t$ ならば, $n' = 0$ とすることで成立. $s \to_{\neg wi(R)} t$ ならば, 補題 1 より $s \xrightarrow{*}_{wi(R)} t$ となるので, やはり $n' = 0$ とすることで成立.

$n > 1$ のとき $s \to_R s' \xrightarrow{n-1}_R t$ とすると, 帰納法の仮定より $n' \leq n - 1$ である自然数 n' が存在して, $s' \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} t$ である. ここで, $s \to_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} s'$ ならば, $s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} t'$ となり, 明らかに $n' \leq n - 1 < n$ なので成立. $s \to_{\neg wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} s'$ ならば, $s \to_{\neg wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} s' \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} t$ となるので, 補題 2 より, $s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} t$ となるか, もしくは, $\mathcal{T}^{n'}(R)$ の重なり発生リダクション $u \to_{\neg wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} u' \to_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} u''$ に対して,

$$s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} u \to_{\neg wi(\mathcal{T}^{n'}(R))}$$
$$u' \to_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} u'' \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} t$$

となる. 前者の場合, $s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} t$ となる. 後者の場合, 補題 3 より,

$$s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} u \xrightarrow{+}_{wi(\mathcal{T}^{n'+1}(R))} u'' \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^{n'}(R))} t$$

となるので, 命題 2 より $n' + 1 \leq n$ に対して, $s \xrightarrow{*}_{wi(\mathcal{T}^{n'+1}(R))} t$ となり成立. □

定理 4 では, TRS R の n ステップの書換えで到達可能な正規形に対して, 高々 n 回変換 $\mathcal{T}$ を施して得られた TRS の弱最内書換えによって同じ正規形に到達可能であることを示している.

5 おわりに

本稿では, 一般的に最内戦略が完全にはならないクラスである, 内側危険対右向き合流性を持たない TRS において, 最内戦略の拡張である弱最内戦略と弱最内戦略が完全になる等価な TRS を得る TRS 等価変換 $\mathcal{T}$ を与え, その正しさを証明した.

今後の課題として, 等価変換 $\mathcal{T}$ の停止性に関する更なる考察を行うことが挙げられる. 例 4 で, 変換 $\mathcal{T}$ が無限に新しい規則を加えつづける例を与えた. $\mathcal{T}$ が停止する条件を求める事, ならびに, $\mathcal{T}$ と同様に弱最内戦略を完全にし, なおかつ停止性を持つような新しい TRS 等価変換手法を与えることが課題である.

参考文献

[1] F. Baader and T. Nipcow. *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, 1998.

[2] N.Nishida, M.Sakai, and T.Sakabe. "Generation of Inverse Term Rewriting Systems for Pure Treeless Functions". In *Proceedings of the International Workshop on Rewriting in Proof and Computation (RPC'01)*, pp. 188–198, 2001.

[3] M. Sakai, K. Okamoto, and T. Sakai. "Innermost Reductions Find All Normal Forms on Right-Linear Terminating Overlay TRSs". In *Proceedings of 3rd International Workshop on Reduction Strategies in Rewriting and Programming (WRS03)*, pp. 79–88, 2003.

[4] 岡本晃治, 酒井正彦, 坂部俊樹. “最内書換えに基づく項書換え系の完全な書換え戦略”. 2003年度電気関係学会東海支部連合大会講演論文集, p. 564, 2003.

[5] 西田直樹, 酒井正彦, 坂部俊樹. “指定した引数を固定した逆関数を定義するTRSの生成”. 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 101, No. 488, pp. 33–40, 2001.