数理解析研究所講究録 1426 巻 2005 年 178-183

2ーリンクパズルの多項式時間解法

牧野 格三 (Kozo Makino)
東京工業大学 理学部 情報科学科
Dept. of Information Science, School of Science,
Tokyo Institute of Technology
email: makino2@is.titech.ac.jp

概要

現在多くの人に遊ばれているゲームやパズルの多くについて, その計算量が解析されている. 本研究ではパズルの一種「ナンバーリンク」について, それに対応するグラフ理論的な問題「k-リンクパズル」を定義した. さらに, 1-リンクパズルが多項式時間で解けることを利用し, 2-リンクパズルのサイズを 3 × (偶数) や 4 × (偶数) に固定した問題に対する多項式時間解法を与えた.

1 序論

現在, 数多くのゲームやパズルが遊ばれている. それらの楽しさの源はその難しさにあると言える. そしてこのようなゲームやパズルの多くについて, 計算量が解析されている. 本研究の対象である「ナンバーリンク」というのはペンシルパズルの一種である. ペンシルパズルというのは, 紙に印刷された問題の図に鉛筆で書き込みながら解いていくという形態のパズルである. 「ナンバーリンク」の他に有名なものは, 「スリザーリンク」, 「数独」, 「ののぐらむ」などである. ペンシルパズルの特徴は, 「解くのは難しいが, 解いた答えが正しいことは容易に確認できる.」ということであり, これはまさに NP 問題の性質に一致している. したがって, ペンシルパズルの多くは NP であると予想される. ペンシルパズルの計算量に関する研究は少ないが, 「スリザーリンク」や「ののぐらむ」の解の存在判定問題が NP 完全であることが証明されている.

ナンバーリンクとは次図のようなものである.(図 1) このパズルのルールは以下のよう

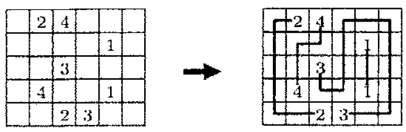

図 1: ナンバーリンクの問題の例

に記述される.

- 同じ数字同士を線で結ぶ.
- 線は直角にしか曲がれず, 枝分かれしない. また他の線と交差しない.
- 線は 1 マスに 1 本だけ通ることができる. また, 数字の入っているマスを通過することはできない.
- 全ての数字から数字への線を引き終えたときに全てのマスを線が埋める.

盤面の大きさのことをサイズといい, パズルにあらわれる最大の数字のことをリンク数という.

次に「k-リンクパズル」というものを定義する. これは「ナンバーリンク」の問題をグラフへと変換したもので, 頂点を各マスに, 辺をマス同士のつながりに対応させたものである. k とはもとのパズルにあったリンク数のことで, 数字の存在したマスは特別な頂点(以下端点と呼ぶ)と見なす. 図 2 に図 1 のパズルの変換を記す.

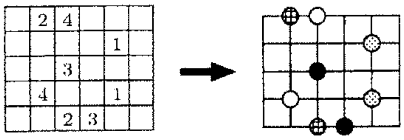

図 2: ナンバーリンク $\Leftrightarrow$ k-リンクパズル

この対応付けにより, 考える問題は次のような問題として考えることができる.

入力: 格子状長方形型グラフ $R(n, m)$
k 組の始点と終点のペア (s_i, t_i)
$(1 \leq i \leq k, \forall s_i, t_i \in V(R))$

質問: 以下の条件を満たす s_i から t_i へのパス $P_i (1 \leq i \leq k)$ が存在するか.

・$V(P_i) \cap V(P_j) = \phi$
$(i \neq j, \forall i, j \in [1, k])$
($\Longleftrightarrow$ 全てのパスは交差しない.)
・$\bigcup V(P_i) = V(R)$
($\Longleftrightarrow$ 全てのマスを埋める.)
存在するならば P_i を出力.

(ただし, $V(R)$ は $R(n, m)$ の頂点の集合, $V(P_i)$ はパス P_i が通る頂点の集合を表す.)

上記の問題のことを総称して「k-リンクパズル」と呼ぶことにする. また格子状長方形型グラフのことを rectangle グラフと呼ぶ.

$k = 1$ のとき, パズルは rectangle グラフ上のハミルトンパス問題になる. これは Itai ら [3] によって研究がなされており, 2 つの端点の座標に関する条件で解の存在判定が可能であることが示されている. また, 彼らにより $O(nm)$ の解の導出アルゴリズムも与えている. 本研究はリンク数を 2 に限定した問題を扱う. すなわち本研究の目標は 2-リンクパズルにおける解の判定条件を調べあげることと, 解が存在するときの解導出アルゴリズムを構成することである. 解の判定条件であるが, 1-リンクパズルのように 4 つの端点の位置(どこが s_1 か s_2 かを区別しないで考えた端点の座標)だけで判定ができる条件がいくつか存在する. この条件のみで判定可能であれば良いのだが, ある特定の位置のときには, 4 端点の配置(どこが s_1 で s_2 かを区別して考えた端点の座標)によって解の存在性が変化することがわかった.(図 3) よって位置による条件だけでは解判定は不可能であると考えられる. ところがいくつもの問題を考える中で十分大きなサイズの問題になると位置による条件だけで解の存在判定ができる, という現象が観察された. そこで本研究は (6 以上) $\times$ (6 以上) のサイズにおいては位置による条件だけで解の存在判定ができるという仮定の下で, サイズを $3 \times$ (偶数), $4 \times$ (偶数) に限定した 2-リンクパズルを考えることにした.

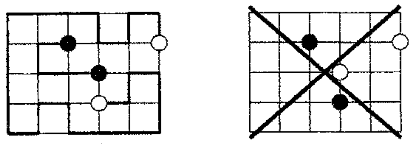

図 3: 配置による解の存在性の変化

$3 \times$ (偶数) 型の 2-リンクパズルの考え方は以下のようになる. まずこのサイズ特有の, 位置による解のない条件を考える. 次に各列にいくつ端点がいるかで場合分けをし, 配置による特別な解のない条件を調べ挙げると同時に解のある場合の解法を考える. これによって全ての場合を調べ尽くすことができ, 解のある場合の解法をそのままアルゴリズムに利用することが出来る. 結果としては解の無い形は幅 $2m$(= 偶数) によらず定数個であるため, 解の存在判定は定数時間で可能となるこ

とが示された. また解のある場合の解法の場合分けの数も定数個であることから, $O(m)$ で実装可能である. $4\times$ (偶数) 型に関しても同様の議論をすることによって多項式時間解法を導いた.

2 1-リンクパズル

まずはじめに rectangle グラフの頂点の塗り分けを以下のようにして行う. rectangle グラフの corener vertex(頂点を含む辺が 2 つしか存在しないもの) を平面座標の (1, 1) に配置し, その他の頂点は全て x, y 座標が正整数となるように配置する. このような配置が可能であることは rectangle グラフの特性から言える. このとき各頂点の x, y 座標に対して $x+y\equiv 0 \pmod 2$ ならば白く, $x+y\equiv 1 \pmod 2$ ならば黒く塗る.
この塗り分けに対し, 以下のような解が存在するための必要条件を定義する.

定義 1. ハミルトンパス問題 $(R(n,m),s,t)$ が Color Compatible(1CC) であるとは次の 1, 2 のいずれかを満たすときをいう.

1. $n\times m$ が even, かつ s と t が異なる色.
2. $n\times m$ が odd, かつ s と t がともに白.

定理 1. $(R(n,m),s,t)$ にハミルトンパスが存在するならば, $(R(n,m),s,t)$ は 1CC.

この 1CC は rectangle グラフのみでなく, 一般の格子状グラフに対するハミルトンパスが存在するための必要条件になる.
次に 1CC を満たしているのに解が存在しない条件を記す.

定義 2. ハミルトンパス問題 $(R(n,m),s,t)$ が forbidden であるとは, 次の (F1)～(F3) のいずれかを満たすときをいう.

- (F1) $n=1$ で, s,t のいずれかが端点でない (図 4(a)).
- (F2) $n=2$ で, (s,t) が境界上でない辺となる (図 4(b)).
- (F3) $n=3$ で, さらに以下の 3 つを満たす.
  1. m が偶数.
  2. s と t が異なる色で, s が黒.
  3. $s_x < t_x - 1$(図 4(c))
     あるいは $s_y = 2$ かつ $s_x < t_x$(図 4(d))

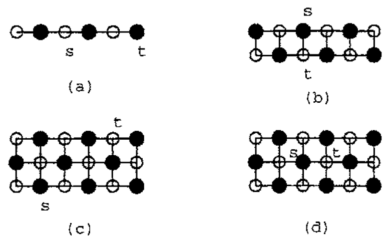

図 4: forbidden の Case

定義 3. ハミルトンパス問題 $(R(n,m),s,t)$ が acceptable とは, $(R(n,m),s,t)$ が 1CC でかつ forbidden でないときのことをいう.

以上を定義すると, 以下の定理が示される.

定理 2. $(R(n,m),s,t)$ は acceptable であることはハミルトンパス問題 $(R(n,m),s,t)$ にハミルトンパスが存在することの必要十分条件である.

よって解の判定に関しては acceptable か否かを調べるだけで良く, これは問題のサイズと 2 端点の座標を調べるだけでいいので定数時間で可能となる. またここでは述べないが, 解の導出に関しても, 問題のサイズ n, m に関する多項式時間 $O(nm)$ で実装可能であることが言える. ([3] 参照)

3 2-リンクパズル

ここでは一般の 2-リンクパズルに対し, 解のない条件を考える. まず 1-リンクパズル同

様に頂点の塗り分けを行う．それに対し，1-リンクパズル同様に Color Compatible を以下のように定義する．

定義 4. 2-リンクパズル $(R(n,m),(s,t),(u,v))$ が 2 Color Compatible(2CC) であるとは次の 1, 2 のいずれかを満たすときをいう．

1. $n \times m$ が even, かつ 4 端点の内 2 つが白，残りが黒．
2. $n \times m$ が odd, かつ 4 端点の内 3 つが白．

上記のように定義すると定理 1. のように 2CC は解が存在するための必要条件になる．証明は 1CC 同様に言える．
次に端点が 4 つになったことで現われる解を持たない条件を挙げ，各証明を与える．

定義 5. 2-リンクパズル $(R(n,m),(s,t),(u,v))$ が Cyclic であるとは 4 端点がそれぞれ境界上に存在し，かつ $s \to u \to t \to v$ の順にあるときのことをいう．

定義 6. 2-リンクパズル $(R(n,m),(s,t),(u,v))$ が Vertex Closure であるとは問題の配置が以下と同型であるときをいう．

$$s=(1,n-1), t=(2,n), u=(1,n)$$

定義 7. 2-リンクパズル $(R(n,m),(s,t),(u,v))$ が Disconnect とは，以下のいずれかの条件を満たすときをいう．

1. $R-\{(s \text{ または } t), (u \text{ または } v)\}$ が 2 つの component(以下 comp.) に分かれ，かついずれかの component に端点が存在しない．
2. (1. でないときで) $R-\{s,t,u,v\}$ が 3 つの comp. に分かれる．

上記のように定義すると，Cyclic, Vertex Closure, Disconnect のとき (これらを自明な条件と呼ぶことにする)，解が存在しないことが示される．ところが自明な条件だけでは解のない全ての条件を網羅していない．自明な条件以外で解のないもの (自明でないもの) は非常に特殊な配置をしている場合で，それらに対する定式表現は難しいと考えられる．ところがいくつかのパズルに対し解析を行ったところ，パズルのサイズが (6 以上) × (6 以上) ならば，自明でない解のない形は存在しないのではないか，という予想が立てられた．そこで本研究ではこの予想を仮定し，サイズを小さく限定したパズルに対して解析を行った．具体的には 3 × (偶数) と 4 × (偶数) のサイズの 2-リンクパズルに対して考えた．

4　3×(偶数) 型 2-リンクパズル

本章ではまずこの型特有の解の存在しない条件を列挙し，3 章と同じように解がないことの証明を与える．

定義 8. 2-リンクパズル $(R(3,2m),(s,t),(u,v))$ が Disconnect-3 であるとは Disconnect でなく，以下の条件を満たすときのことをいう．

- $R-\{s,\ t,\ (u \text{ か } v)\}$, または $R-\{(s \text{ か } t),u,v\}$ が 2 つの comp. に分かれ，以下のいずれかを満たす．
  - (p_1) ペアとなる 2 端点が同じ色で，残りの端点が奇数 comp. に存在．
  - (p_2) ペアとなる 2 端点が異なる色で，残りの端点が偶数 comp. に存在．

定義 9. 2-リンクパズル $(R(3,2m),(s,t),(u,v))$ が Majority Forbidden(Minority Forbidden) とは，1 番右 (左) と 2 番目に右 (左) の端点のいる列に他に端点が存在しないとき (単独と呼ぶ)，1 番右 (左) の端点の色が白 (黒) で，以下のいずれかを満たすことをいう．

1. 1 番右 (左) の端点が偶数 (奇数) 列にある．
2. 1 番右 (左) の端点が奇数 (偶数) 列にあり，次のどちらかを満たす．
   (a) 2 番目に右 (左) の端点が白 (黒)．

(b) 2番目に右(左)の端点が黒(白)で，最も右(左)の端点の列の隣でない．

上記のように定義すると，Disconnect-3, Majority(Minority) Forbidden のときそれぞれ解がないことが示される．
以上が位置による解の存在性の判定条件である．
次に図3のような4端点の位置は同じであるが，配置の違いによって解が存在しなくなるような条件について考える．この条件がどのようなものなのか不明であるため，各列にいくつ端点があるかによる場合分けをして考える．場合分けの仕方は，端点が存在しない列は無視して，1列目から右に見ていった形の場合を次に列挙する．

1. 3-1 型 (1つの列に3つの端点がある)
2. 2-2 型 (2つの端点がある列が2つある)
3. 2-1-1 型 (2つの端点がある列，端点，端点の順に存在する)
4. 1-2-1 型 (2つの端点がある列が残りの2つの端点により挟まれる)
5. 1-1-1-1 型 (全ての端点が単独に存在する)

このとき，1-3 型や 1-1-2 型などの形もあるが，これらは 3-1 型，2-1-1 型と左右反転や色反転によって移り合う関係にあるので，同じものとして考える．

さて，ここでは 3-1 型と 2-2 型に対する場合分けを説明する．後述するが，残りの3つの型は上の2つに帰着できるからである．

3-1 型
1つの列に3つの端点が存在するので，多くの場合が Disconnect-3 となる．まず3つの端点のある列 (T_c とする) 上の配置に対して，下から $s-t-u$ のときと，$s-u-t$ の場合が考えられる．さらにこの T_c が偶数列に存在するか，奇数列に存在するかで場合分けをする．2 Color Compatible の条件より，その偶奇によって残りの端点の色が決定する．あとは残りの端点の位置に対して特殊な場合などを考え，洩れのないように考える．結果，このように場合分けしたときに導かれた解の存在する形には解を導く分割を与えることができた．逆に祖それ以外の形にはそれぞれ解が存在しない証明を与えた．

2-2 型
2つずつ端点のある列をそれぞれ T_1, T_2 とする．さらに T_1 より左の rectangle を R_l, T_1 と T_2 で囲まれた部分を R_c, T_2 の右側を R_r とする．まず T_1, T_2 上にどのように端点が配置されているかで場合分けを考える．このとき場合分けは3通りあり，それぞれの列に $s-t$ と $u-v$, $s-u$ と $t-v$, $s-u$ と $v-t$ のときである (左にある端点の方が y 座標が小さいとする)．さらに T_1 上の2つの端点の色が異なるか等しいかで場合分けをする．色が異なる場合，T_1, T_2 上の端点の置かれ方は2通り存在するのに対し，色が同じ場合は1つの可能性のみである．このそれぞれの場合の組合せに対して，R_l, R_c, R_r の幅が0か1か偶数か奇数かで場合分けをさらに行う．このように場合分けをすると，3-1 型同様に解がある形には解法を，解が無いものにはそれぞれ解が存在しない証明を与えることができた．

さて残りの3つの型の場合であるが，2-1-1 型と 1-2-1 型は1番右の端点を移動させることでそれぞれ一意に 2-2 型，1-3 型に，1-1-1-1 型も両側の端点を移動させることで一意に 2-2 型になる．よって，できあがる 3-1, 2-2 型に解が存在しなければ，もとの形にも解が無いということが言える．これらの配置による解のない条件は定数個であるので，解判定は定数時間でできることがわかる．またアルゴリズムも，あらかじめ2つの型に対する解法を準備することにより，$O(m)$ で実装可能となる

4 × (偶数) 2-リンクパズルについても同様の

考察を行うことで解の判定と導出が可能となる．ところが, 3 × (偶数) サイズの問題に比べて配置による解のない条件や, 準備しておく解法の数が極端に多くなることが示せた．

5 まとめと今後の課題

本研究では, ナンバーリンクのグラフ理論的解釈である「k-リンクパズル」というものを定義し, 主に 2-リンクパズルの解析を行った．一般の 2-リンクパズルにおいて, 4 端点の位置は同じだが配置によって解が存在性が変化するという現象が見られたが, 十分大きなサイズにおいてはこれは起こらない, という予想が立てられた．本研究ではこの予想を (6 以上) × (6 以上) ならば上述の現象は起こらないと仮定し, 小さなサイズである 3 × (偶数) 型と, 4 × (偶数) 型の 2-リンクパズルについて考察した．その結果, ともに各列にいくつ端点があるか, またその端点の偶奇による場合分けにより配置による解のない形を特定することができた．このような形の総数は入力である幅 $2m$ によらず一定で, よって定数時間で解の存在判定が可能であることを示した．また解の存在する問題に対して, それらの解を $O(m)$ で導くアルゴリズムを構成した．

今後の課題としては, 本研究で考察しなかった他のサイズの 2-リンクパズルの多項式時間解法が挙げられる．しかしこの問題は高さが定数と固定されるのあるならば, 3 × (偶数) 型と同様に端点の偶奇とその配置で場合分けをして考えれば良い．よって定数× m(とくに偶数に限定しなくても良い) の 2-リンクパズルは多項式時間で解けるであろう, と考えられる．しかし実際に考えたい問題は高さ, 幅ともに入力として受け取る問題であるので, 仮定した予想の証明が当面の目標である．また, 今回は $k = 2$ のときであったが他の k や, k も入力として受け取るときの k-リンクパズルが P なのか NP 完全なのか, またその証明なども今後の課題として挙げられる．

参考文献

[1] F.Luccio, and C.Mugnai, *Hamitonian paths on rectangular chessboard*, 16th Annnual Allerton Conference, 1978, pp.73-78.

[2] Y.Perl, and Y.Shiloach *Finding Two Disjoint Paths Between Two Pairs of Vertices in a Graph*, Journal of the Association for Computing Machinery 25(1), 1978, pp.1-9.

[3] A.Itai, C.H.Papadimitriou, and J.L.Szwarcfiter, *Hamiton paths in grid graphs*, SIAM Journal on Computing 11(4), 1982, pp.676-686.

[4] H.Everett, *Finding Hamitonian Paths in Non-rectangular Grid Graphs*, Congressus Numerantium 53,1986, pp.185-192.

[5] K.L.Collins, and L.B.Krompart, *The Number of Hamiltonian Paths in a Rectangular Grid*, Discrete Mathmatics 169, 1997, pp.29-38.

[6] T.Yato, スリザーリンクの NP 完全性について, 情報処理学会, 2000.

[7] S.D.Chen, H.Shen, and R.Topor, *An efficient algorithm for constructing Hamiltonian paths in meshs*, Parallel Computing 28, 2002, pp.1293-1305.