

## 非同期セル空間における順序機械構成

## Construction of Sequential Machines in an Asynchronous Cellular Space

齊金山・森田 憲一

Jin-Shan Qi, and Kenichi Morita

広島大学大学院工学研究科

Graduate School of Engineering, Hiroshima University

## 概要

ブロック写像形式の局所写像を持つ2状態9近傍の非同期セルオートマトンを提案した。この空間に、信号とその伝搬機構、信号の分岐、消滅、合流、および、ある種のフリップフロップを実現することにより、任意の順序機械が実現できることを示した。

**キーワード**：非同期セルオートマトン，ブロック写像，順序機械

**Keywords**：asynchronous cellular automaton, block-to-block mapping, sequential machine

## 1 まえがき

セルオートマトン (cellular automaton, CA) は同一の有限オートマトンを一様に配置、接続した並列システムである。各セルは自分自身と近傍セルの状態に依存して次の時刻の状態を決定する。通常のセルオートマトンは、すべてのセルが同時に状態遷移を行うものとして定式化されている。従って、全体の同期をとるためにはクロックが必要となり、セル数が巨大化した場合のクロックに伴って発生するエネルギー消費や放熱などが問題視されている。また、多数のセルの完全な同期を必要とすることから、実際にセル構造の計算機を構成するのに必ずしも適したものではない。そのため近年、非同期セルオートマトンの研究が多くみられるようになった [1, 2, 3, 4]。従来の計算モデルを非同期セル空間に埋め込むことによりこれらの問題点が回

避されると考えられる。文献 [1] では、状態数または近傍数を増やし、チューリング機械または同期セルオートマトンが模倣できる非同期セルオートマトンを提案している。一方、文献 [3] では、16 状態 5 近傍セルオートマトンで単純な遷移規則を持つものが提案され、任意の非同期回路を構成するための 5 種類の機能モジュールがそのセル空間に実現できることが示されている。このように非同期セル空間に計算モデルを簡潔に埋め込んで計算を行うのが活発な研究課題になっている。

本論文では、任意の順序機械が埋め込める一種の非同期セルオートマトンを提案する。これは、2 状態 9 近傍非同期ブロックセルオートマトンである。これは通常のセルオートマトンとは異なり「ブロック写像」と呼ばれる形式の局所写像 (局所遷移関数) を持つセルオートマトンである。つまり、原像と像が同一の幾何学的形状であるような局所写像である。また状態遷移の各ステップでは、そのような局所写像がセル空間のただ一箇所にのみ (非同期的に) 適用される。これは、等形アレイ文法 (isometric array grammar, IAG) [5] と同等のシステムであると考えられる。 (なお文献 [3] のモデルもこれに類するものと考えられる。つまり、1 つのセルがそれぞれ 2 状態からなる 4 部分に分割されているようなセルオートマトンであり、合計 8 個の 2 状態部分の状態から、次の時刻の 8 個の 2 状態部分の状態が決まる。) このように近傍を 9 近傍とし、また、局所写像を原像と像が同じ形状であるような写像にすることにより、状態数が 2、局所写像の規則スキーム数が 6 であるような単

純な非同期セルオートマトンが得られた。

ここではまず、このセル空間に信号とそれを伝えるための各種ワイヤと、信号の分岐、消滅のための機能を実現する。また順序回路の基本となる基本機能モジュール  $K$  と  $E$  [4] をこの非同期セル空間に実現する。  $K$  と  $E$  は非常に簡単であり、  $K$  は 2 つの入力を 1 つの出力へ合流させる機能を、  $E$  はある種のフリップフロップとしての機能を持つ。文献 [4] では基本モジュール  $K$  と  $E$  を適切に配線することによって任意の順序回路が実現できることが示されている。従って、今回提案したセル空間にこれらを適切に配置することにより、任意の順序回路が構成可能となる。

## 2 諸定義

**2次元9近傍非同期ブロックセルオートマトン** (asynchronous block-type cellular automaton, ABCA) は

$$A = (\mathbf{Z}^2, N_9, Q, f, q_0)$$

によって定義される。ここで、  $\mathbf{Z}$  は整数集合、従って  $\mathbf{Z}^2$  は 2次元セル空間を表す。  $N_9 = ((0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (2,0), (0,-1), (0,-2), (-1,0), (-2,0))$  は 9近傍の近傍型である。  $Q$  は有限かつ空でない状態集合である。  $f$  は  $f : Q^9 \rightarrow Q^9$  なる写像で局所写像という。  $q_0 \in Q$  は静止状態であり、  $f(q_0, \dots, q_0) = (q_0, \dots, q_0)$  を満たす。任意の  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i), (a', b', c', d', e', f', g', h', i') \in Q^9$  に対し、

$$f(a, b, c, d, e, f, g, h, i) = (a', b', c', d', e', f', g', h', i')$$

が成り立つときこれを

$$(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \rightarrow (a', b', c', d', e', f', g', h', i')$$

のように、あるいは図1のように表し、  $A$  の遷移規則と呼ぶ。図から分かるように、  $f$  の原像と像は同一の幾何学的形状を持っており、9つのセルの状態に依存して同じ9つのセルの次の状態が定まる。ここではこのような  $f$  をブロック写像と呼ぶ。

写像  $c : \mathbf{Z}^2 \rightarrow Q$  を  $Q$  上の(または  $A$  の) 状相と呼ぶ。  $Q$  上の状相すべての集合を  $\text{Conf}(Q)$  と

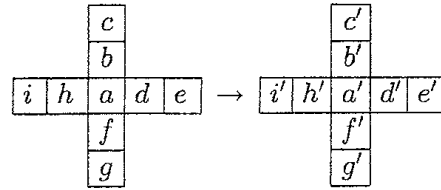


図 1: 9近傍非同期ブロックセルオートマトンの遷移規則

書く。つまり  $\text{Conf}(Q) = \{c \mid c : \mathbf{Z}^2 \rightarrow Q\}$ 。ここで、任意のセル  $x \in \mathbf{Z}^2$  に対し、  $x_0 = x, x_1 = x + (0,1), x_2 = x + (0,2), x_3 = x + (1,0), x_4 = x + (2,0), x_5 = x + (0,-1), x_6 = x + (0,-2), x_7 = x + (-1,0), x_8 = x + (-2,0)$  とおく。このとき、  $A$  の大域写像  $F : \text{Conf}(Q) \rightarrow 2^{\text{Conf}(Q)}$  は次のように定義される。

$$\begin{aligned} & \forall c, c' \in \text{Conf}(Q) \\ & [ c' \in F(c) \text{ iff} \\ & \exists x \in \mathbf{Z}^2 \\ & ( (c'(x_0), c'(x_1), c'(x_2), c'(x_3), c'(x_4), \\ & \quad c'(x_5), c'(x_6), c'(x_7), c'(x_8)) \\ & = f(c(x_0), c(x_1), c(x_2), c(x_3), c(x_4), \\ & \quad c(x_5), c(x_6), c(x_7), c(x_8)) \wedge \\ & \forall y \in \mathbf{Z}^2 (y \notin \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\} \\ & \quad \rightarrow c'(y) = c(y)) ) ] \end{aligned}$$

すなわち状相  $c'$  は、  $c$  に対して適当な遷移規則を一箇所にだけ適用して得られるものである。

## 3 2状態9近傍 ABCA $A_2$

本論文では次の 2状態9近傍 ABCA  $A_2$  を考える。

$$A_2 = (\mathbf{Z}^2, N_9, \{0,1\}, f_2, 0)$$

局所写像  $f_2$  はつぎの 6 つの遷移規則スキーム (R1)–(R6) によって与えられる遷移規則集合として定められる。但し、  $x, y, z \in \{0,1\}$  である。また、ここでは各規則の回転対称性を仮定している。すなわち、各遷移規則スキームの左辺と右辺を同時に 90, 180, 270 度回転して得られるスキームも含むが、それらは省略してある。また (R1)–(R6) 以外の左辺を持つ規則は両辺が同じ(状態が変化しない)規則であると仮定している。

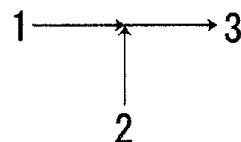
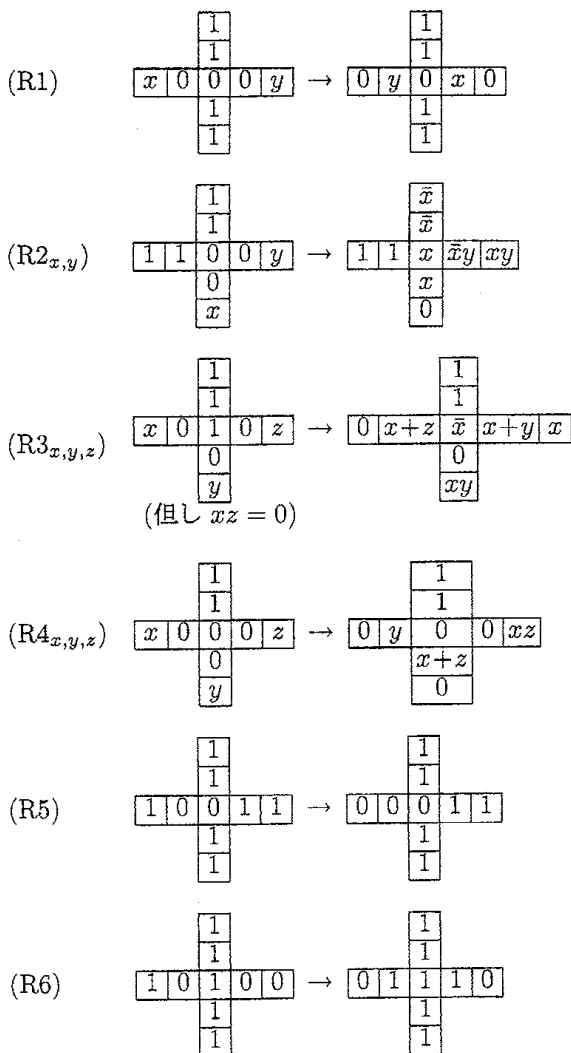


図 2: 基本モジュール K

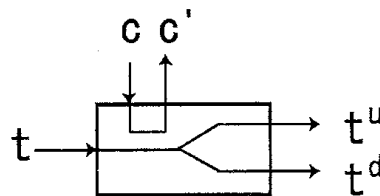


図 3: 基本モジュール E

リップフロップとして機能する. 形式的には  $E = (\{t, c\}, \{t^u, t^d, c'\}, \{u, d\}, \{(t, u) \mapsto (t^u, u), (t, d) \mapsto (t^d, d), (c, u) \mapsto (c', d), (c, d) \mapsto (c', u)\})$  である. つまり, 入力  $t$  により現在の状態を読み取ることができ (答は出力  $t^u$  または  $t^d$  として得られる), また, 入力  $c$  により状態を他の状態に変化させることができる. これらは図 2 と図 3 のように表す.

Bünig と Priesse [4] は, K と E を基本モジュールとして用いることにより (他の論理素子等は使わずに) 任意の順序機械が構成できることが示している.

#### 4 ABCA $A_2$ 空間への順序機械の埋め込み

Mealy 型順序機械は 4 項組  $M = (I_M, O_M, S_M, R_M)$  により定義される. ここで,  $I_M, O_M, S_M$  はそれぞれ, 入力記号, 出力記号, 状態の有限集合である. また  $R_M$  は  $I_M \times S_M \rightarrow O_M \times S_M$  なる写像で, 入力と現在の状態より次の時刻の状態と出力を決定する.

ここで文献 [4] で提案された K と E と記される単純な順序機械を示す. K は 1 状態の順序機械で, 2 つの入力を 1 つの出力へ合流させる働きを持つ. 形式的には  $K = (\{1, 2\}, \{3\}, \{s\}, \{(1, s) \mapsto (3, s), (2, s) \mapsto (3, s)\})$  と表現される. E は  $u$  (up) と  $d$  (down) の 2 状態を持つ 2 入力 3 出力の順序機械で, ある種のフ

定理 4.1 [4] 任意の順序機械は K と E だけを用いて実現できる.

本論文では次の結果を示す.

定理 4.2 ABCA  $A_2$  の空間に任意の順序機械を埋め込むことができる.

(証明) 定理 4.1 より, 信号とその伝搬、消去、分岐、および K と E の機能が  $A_2$  空間に実現できれば十分である. これらを順次示す. なお, 以下では  $A_2$  の各セルの状態 0 と 1 を, 空白と  $\bullet$  で表すことにする.

信号とその伝搬 (信号路)、消去、分岐 信号は 1 つの  $\bullet$  によって表現し, あらかじめ用意された信号路の中を通る. 多数のモジュール K と

Eを任意に結線するためには、信号の直進、右左折、交差が必要となる。それ以外に信号の消去や分岐が必要になる場合がある。

信号の直進は図4に示されるようにして実現できる(図中の矢印の上にあるのは数字はそのとき使われた遷移規の番号)。このとき、進行方向は信号路中の信号の置かれる位置によって決まる。また1つの信号路を2つ以上の信号が同方向または逆方向に相互に影響することなく伝搬できることは $A_2$ の規則集合から確かめられる。

また、信号の右折と左折はそれぞれ図5と図6のように実現できる。

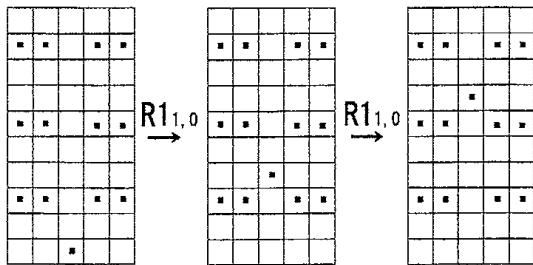


図4: 信号の伝搬

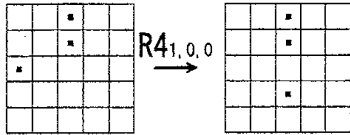


図5: 信号の右折

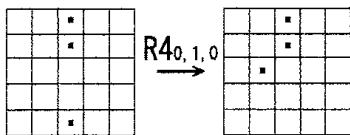


図6: 信号の左折

信号の交差は図7のように実現できる。図7の上図で示しているように2つの信号の交差ができる。これを非同期セル空間 $A_2$ 上に適切に埋め込んだものが図7の下図の図のようである。

図8は信号を消去する働きを持つ。図9は1つの信号を2つに分岐させる機能を持つ。分岐させ出力する。図9の上図では左からの1つの信号が2つに分岐されているのが確認できる。これを非同期セル空間 $A_2$ 上に適切に埋め込んだものが図9の下図の図のようである。

基本モジュール K と E

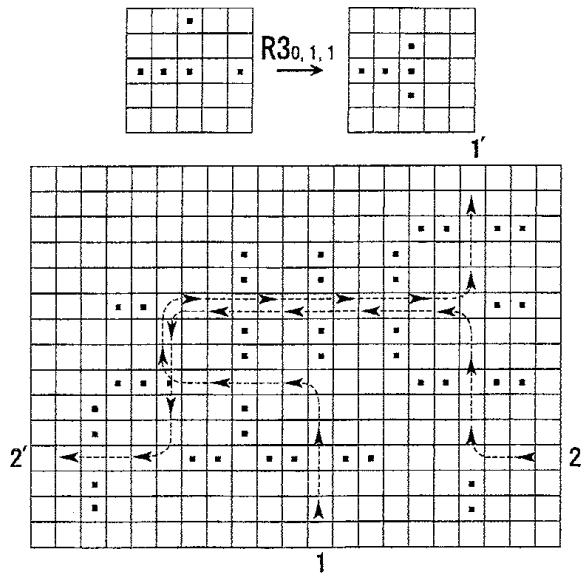


図7: 信号の交差

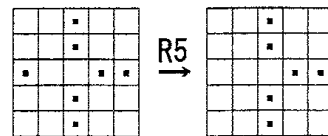


図8: 信号の消去

Kは図10のように実現できる。図10の上図で示しているように左右両方向からの2つの信号が合流して上方向へ出力されている。これを非同期セル空間 $A_2$ 上に適切に埋め込んだものが図10の下図の図のようである。

図11の(a)と(b)ではそれぞれEの状態uと状態dを示している。これらは入力cにより相互変換される。Eは入力tを状態uまたはdによりそれぞれ $t^u$ または $t^d$ から出力させる。

図12では入力cからの信号が状態uと状態dを相互変換させc'から出力され、入力tからの信号が状態uまたは状態dにより出力を $t^u$ または $t^d$ へ決定していることが確認できる。

これらの基本動作と基本モジュールKとEは非同期セル空間 $A_2$ において非同期的に状態遷移を行い、全体として入力から出力まで矛盾なく動作する。これにより、任意の順序機械が非同期セル空間 $A_2$ で実現できると言える。

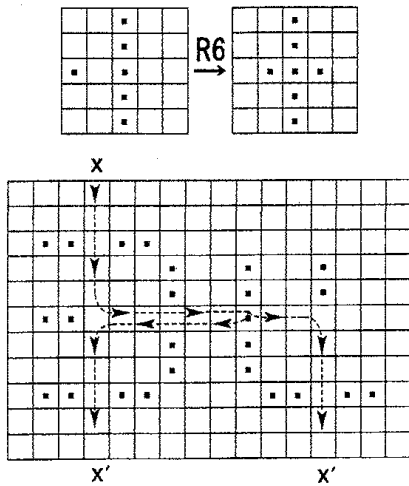


図 9: 信号の分岐

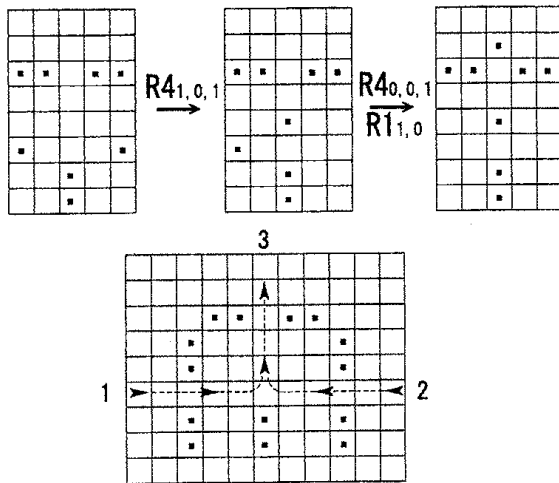


図 10: 基本モジュール K の実現

## 5 むすび

本論文では任意の順序機械がその空間に構成できるような非同期ブロック写像セルオートマトンを提案した。ここでは近傍を9近傍とし、また、局所写像を原像と像が同じ形状であるような写像にすることにより、2状態で実現できた。非同期機械構成の基本となるモジュール K と E をこの非同期セル空間上で設計した。これにより提案した非同期セル空間で任意の順序機械が実現できることが言える。

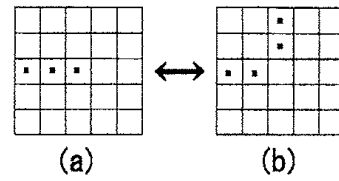


図 11: E の 2 つの状態

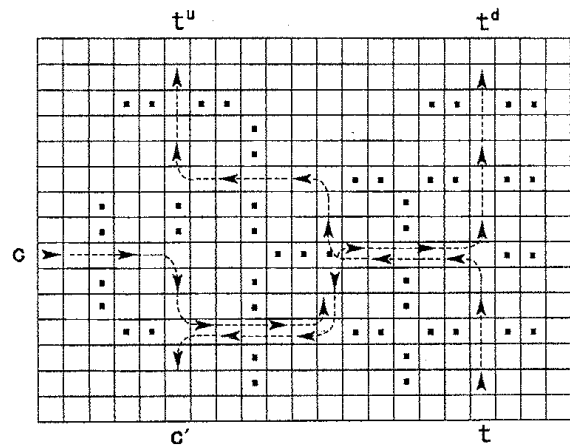


図 12: 基本モジュール E の実現

## 参考文献

- [1] 中村 克彦, 非同期セルオートマトンとその計算能力, 電子通信学会論文誌, **57-D**, No.10, 573-580, 1974.
- [2] J. Lee, S. Adachi, F. Peper, and K. Morita, Embedding universal delay-insensitive circuits in asynchronous cellular spaces, *Fundamenta Informaticae*, **58**, 295-320, 2003.
- [3] F. Peper, J. Lee, S. Adachi, and S. Mashiko, Laying out circuits on asynchronous cellular arrays: a step towards feasible nanocomputers, *Nanotechnology*, **14**, 469-485, 2003.
- [4] H. K. Büning, and L. Priese, Universal asynchronous iterative arrays of Mealy automata, *Acta Informatica*, **13**, 269-285, 1980.
- [5] A. Rosenfeld, *Picture Languages*, Academic Press, New York, 1979.