

“freak wave” の出現確率と非線形性の関連に関する数値的研究

岐阜大工 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)
Faculty of Engineering, Gifu University

1 イントロダクション

大規模な海洋観測や人工衛星によるリモートセンシングがもたらす膨大なデータの活用によって、海洋波浪場の力学に含まれる物理現象のモデル化およびパラメタリゼーションの改良も進み、現在では WAM や wavewatchIII など、全球規模でほぼ実用的な精度を有する数値波浪推算モデルが開発され、日々現業にも活用されるに至っている。これらの数値波浪推算モデルは日本海など日本の近海にも適用され、有義波高や有義周期、波向などについては、かなりの精度で現地データを再現する能力があることが確認されている。

現在の数値波浪推算モデルは、エネルギー平衡方程式に基づいて、波浪場の波数ベクトルスペクトル、もしくはそれと同等である方向スペクトル¹の時間空間発展を予測するという方法を採用している。しかしスペクトルには本来的に位相情報が欠如しているため、それだけからでは実際に起こる波形（水面変位）の情報を十分に得ることはできない。たとえスペクトルが推算できたとしても、例えば実際にどの程度の波高の波がどの程度の確率で起こるのか、大波高を有する危険な波の出現頻度などを正確に知る手段は、現在のところまだ十分には整備されていないように思われる。

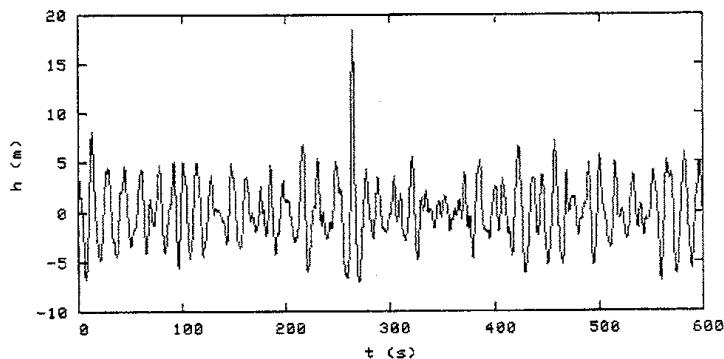


図 1: New Year Wave: 典型的な freak wave の観測例

特に近年 ‘freak wave’ もしくは ‘rogue wave’ と呼ばれる波に注目が集まっている。freak wave とは、比較的静穏な海洋波浪場に突如出現する大波高の波であり、ある報告によると 1969 年から 1994 年の間に太平洋・大西洋で少なくとも 22 隻の大型貨物船が freak wave との遭遇によって沈没、525 名が死亡し、またこの他インド洋でもかなり多数の遭難があるとのことである。図 1 は “New Year Wave” と呼ばれるよく知られた freak wave の観測例で、1995 年 1 月 1 日に北海の Draupner platform という海底油田のプラットフォームにおいて観測されたものである。このときの有義波高は 10.8m であったのに対し、その 2 倍以上の 25.6m の波高を持つ巨大波が突如出現している状況を見ることができる。freak wave については最近の解説 (Kharif and Pelinovsky 2003) およびそこの引用文献を参照されたい。

¹周波数と伝播方向に関するスペクトル

本研究は、海洋波の代表的なスペクトルである Pierson-Moskowitz スペクトルを有する不規則波動場を多数作り、その時間発展を非線形水面波の支配方程式に則って決定論的に追跡することによって、非線形な波動場における波高分布の特徴や、freak wave の出現確率と非線形性の関連などについての知見を得ることを目的とするものである。

2 Rayleigh 分布

不規則波動場の波高分布の理論においては、通常 Rayleigh 分布

$$p(\xi) = \frac{\xi}{4} \exp\left(-\frac{\xi^2}{8}\right), \quad \xi = \frac{H}{\sigma_\eta}, \quad \sigma_\eta = \sqrt{\eta^2} \quad (1)$$

がその出発点とされる。ここで H は波高、 η は自由表面の変位を表す。Rayleigh 分布が実現するためには、

1. 狭帯域スペクトルであること (このとき $H \approx 2a$)
2. 成分波がすべて独立であること (線形理論, 中心極限定理によりガウス過程)

という2つの基本的な仮定が成立している必要があるが、現実の海洋波浪場はこのどちらの仮定も十分には満足していない。

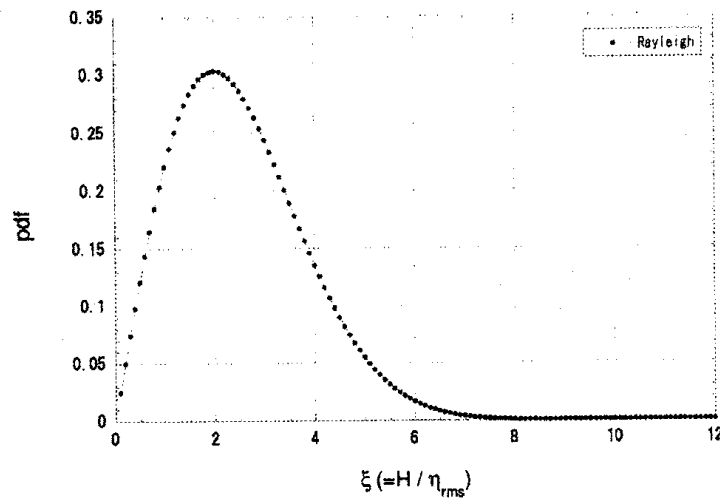


図 2: Rayleigh 分布

有限バンド幅や非線形性によってもたらされる Rayleigh 分布からのずれに関しては多くの研究はあるものの、問題の複雑さゆえにどれも最低次の効果を解析的に導出するといった摂動的なアプローチによる研究であり、海洋波として現実的な程度の広帯域スペクトルを有する不規則波動場の波高分布に対して、非線形性の影響を系統的に調べた研究は未だ十分になされていないのが現状である。従来の研究については例えば合田 (1990), Massel (1996) などを参照されたい。

Rayleigh 分布が成り立っているとすると、波高の代表的な指標である平均波高 \bar{H} 、2乗平均平方根波高 H_{rms} および有義波高 $H_{1/3}$ と水面変位 η の標準偏差 σ_η の間には、それぞれ

$$\bar{H} = \sqrt{2\pi}\sigma_\eta, \quad H_{rms} = 2\sqrt{2}\sigma_\eta, \quad H_{1/3} = 4.004\sigma_\eta \quad (2)$$

という関係がある。これらの関係は無次元波高 ξ を用いれば、それぞれ

$$\bar{\xi} = \sqrt{2\pi}, \quad \xi_{\text{rms}} = 2\sqrt{2}, \quad \xi_{1/3} = 4.004 \quad (3)$$

となる。数値波浪推算においてスペクトルから有義波高 $H_{1/3}$ を推定するときは (2) の関係が用いられる。

なお本論文では、 $H > 2H_{1/3}$ を満足する波を freak wave と呼ぶことにする。Rayleigh 分布によるとこのような波の出現確率は

$$e^{-8} = 3.35 \times 10^{-4} \approx 1/3000 \quad (4)$$

となる。ただし Rayleigh 分布は、有限バンド幅の線形不規則波動場に適用した場合、大波高波の出現確率を過大評価する傾向があることが知られているので、少なくとも線形に近い状況 ($\overline{\eta^2} \ll 1$) ではこれほどの確率で出現することはないと思われる。

3 手法と計算条件

水は非粘性、非圧縮性とし、流速場は渦なしのポテンシャル流とする。流速場はまた、水平方向に 1 次元、鉛直方向に 1 次元の 2 次元的とする。したがって波の伝播は 1 次元的で、伝播方向の広がりはない。自由表面の変位を $\eta(x, t)$ 、速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ の自由表面における値、すなわち $\phi(x, \eta(x, t), t)$ を $\psi(x, t)$ と書くと、水の波の運動を支配する基礎方程式はこのとき

$$\psi_t + g\eta + \frac{1}{2}(\psi_x)^2 - \frac{1}{2}W^2 \{1 + (\eta_x)^2\} = 0, \quad (5)$$

$$\eta_t + \psi_x \eta_x - W \{1 + (\eta_x)^2\} = 0 \quad (6)$$

となる。ここで $W(x, t)$ は自由表面における鉛直水粒子速度

$$W = \phi_z|_{z=\eta(x,t)} \quad (7)$$

を表す。(5),(6) にしたがって波動場の時間発展を追跡するためには鉛直水粒子速度 W を知る必要があるが、そのためには各時刻で速度ポテンシャル ϕ に対する Laplace 方程式の Dirichlet 問題を解かなければならない。この W の求め方はいくつかの手法が知られているが、ここでは広大な水面を対象としつつも現実的な計算時間での計算を可能とする高次スペクトル法と呼ばれる高精度高効率な手法を採用する。ここでは高次スペクトル法についての説明は省略するので、興味ある読者は例えば田中 (1998), Tanaka (2001), およびそこでの引用文献などを参照されたい。 W が求められたのちは (5),(6) にもとづいて、4 次精度のルンゲ・クッタ法により時間についての積分を行う。高次スペクトル法では非線形相互作用を任意の次数 M まで取り込むことが可能である。本研究では $M = 5$ と固定しており、これは 6 波相互作用まで考慮することを意味する。

高次スペクトル法では高速離散フーリエ変換 (FFT) が活用されるため、空間メッシュ数 n_x は 2 のべき乗であることが好ましく、ここでは $n_x = 2^{12} = 4096$ とする。離散フーリエ変換に付随して発生する aliasing error を除去するため、最大モード番号は k_{max} は $k_{\text{max}} < n_x / (M + 1)$ を満足するように取る必要がある、

これより $k_{\max} = 682$ と決まり、われわれの不規則波動場は 682 個の異なる波数を有する成分波より構成されることになる。この k_{\max} に対して、スペクトルピークの 10 倍高調波程度までが計算に含まれることを要求すると、ピークに対応するモード番号 k_p が $k_p = k_{\max}/10 = 68$ と決まる。これは計算領域の長さが、スペクトルピークに対応する波長 λ_p の 68 倍であることを意味する。

初期波動場のスペクトルには、十分発達した風波に対する標準スペクトルとしてよく知られる Pierson-Moskowitz スペクトル (以下 P-M スペクトルと略記する)

$$\Psi(\omega) = 5e\omega^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4\omega^4}\right) \quad (8)$$

を採用する。なおこの式を含め本論文では、重力加速度 $g = 1$, スペクトルピーク振動数 $\omega_p = 1$ となるような時間空間の規格化を用いる。P-M スペクトルは周波数スペクトルなので、初期の空間波形 $\eta(x, 0)$ および自由表面における速度ポテンシャル $\psi(x, 0)$ の構築にあたっては、線形分散関係を用いて波数スペクトルに変換している。682 個の成分波の初期振幅は P-M スペクトルによって規定される。一方スペクトルからは不確定なそれぞれの初期位相は $[0, 2\pi]$ の一様乱数を用いて与える。統計量を求める際には、スペクトル的には同等で、初期位相の乱数のみが異なる計算を 1500 ケース行い、それらについてのアンサンブル平均を取ることにする。このケース数の妥当性については後に検討をおこなう。

(8) に含まれる e は、

$$\int_0^{\infty} \Psi(\omega) d\omega = e \quad (9)$$

から分かるように、エネルギー密度、すなわち単位長さあたりの波動エネルギーの意味を持ち、非線形性があまり大きくない範囲では近似的に $e = \overline{\eta^2}$ が成り立つ。ここではエネルギー密度 e を $e = 0.001 \sim 0.005$ の範囲で 0.001 キザミで変化させ、それによる波高分布の変化を調べる。この e の範囲は、近似的に成立する関係 $H_{1/3} \approx 4\sqrt{e}$ を用いて、例えばピーク周期 8 秒 (波長 $\approx 100\text{m}$) の場合に換算すると、ほぼ $H_{1/3} = 2.0 \sim 4.5\text{m}$ 程度という現実的な海況に対応する。

4096 の空間メッシュ点のうちから η の値を時系列として保存する点 (観測点) を適切に選び、そこで得られた時系列データに対してゼロ・ダウンクロス法² を適用することによって連続的な時間波形を個々の波に分割し、それぞれの波高 H を検出する。(図 3 参照) こうして集めた波高データを基に波高の確率密度分布

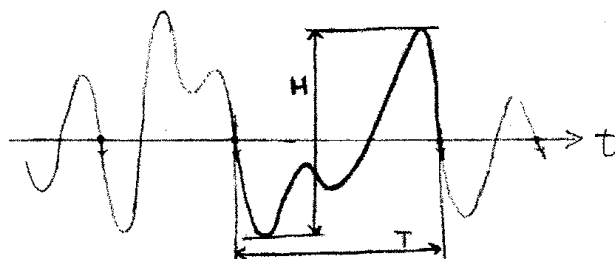


図 3: ゼロ・ダウンクロス法による波高の検出

$p(\xi)$ を算出し、Rayleigh 分布との比較や、非線形性の影響などを調べることになる。 η の連続的な時系列

² η が 0 を下向きに横切る時刻を個々の波の区切りと考える方法

を個々波に分解する方法としてはゼロ・ダウクロス法と並んでゼロ・アップクロス法もよく用いられるが, feak wave など巨大な波の船舶への危険度などを考えると, 深いトラフとそれに引き続く高いクレストを一組として扱うゼロ・ダウクロス法の方が好ましいであろうと考えた。

図4および図5は $e = 0.005$ の場合に時間間隔 $0 < t < 25T_p$ の時間発展 1500 ケースの平均から得られた第1および第 i メッシュ点における表面変位 η の時系列の相関係数

$$cc(i) = \overline{\eta_1(t)\eta_i(t)} / \sqrt{\overline{\eta_1^2(t)}} \sqrt{\overline{\eta_i^2(t)}} \quad (10)$$

を示している。極端な場合として 4096 の空間メッシュ点すべてで η の時系列を残すなど, 観測点を密に取れば取るほど, 一回の計算で得られる波高のサンプル数は増大する。しかし隣接する点における η の時系列には強い相関があり, したがってそのような点で取得したデータに基づいた波高データでは, 見かけ上のサンプル波がいくら増えても, 結果の信頼度を左右する統計的自由度が増えることにはならない。図5によると, 異なる x における η は間隔が $0.7\lambda_p$ 程度, すなわちここで採用しているメッシュ間隔 Δx に換算すると $42\Delta x$ 程度以上になると, 相関係数が 0.1 未満になることを示している。この結果を踏まえて, η の時系列を保存する「観測点」は 42 点おきの 98 箇所とする。

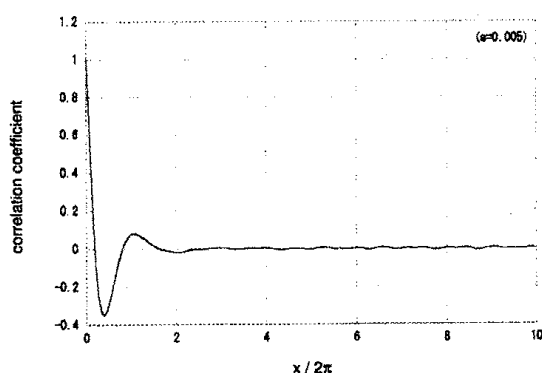


図4: 2地点の η の相関係数

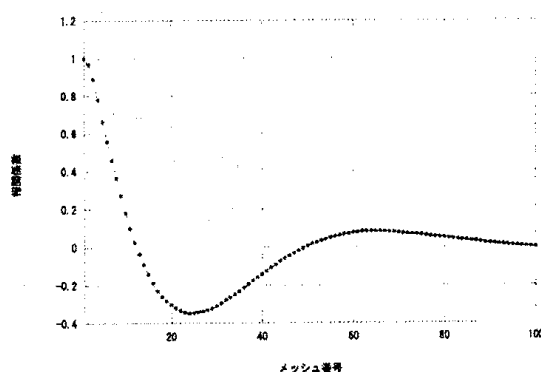


図5: 2地点の η の相関係数 (クローズアップ)

図6は瞬間的な空間波形から求めた η の skewness および kurtosis の時間発展を, 線形の場合, $e = 0.002$, $e = 0.005$ について示したものである。それぞれについて初期位相の乱数の取り方だけが異なる 1500 ケースについての平均値の時間変動を示している。skewness, kurtosis とともに初期の 5 周期程度の間急激に値が変化し, その後はほぼ平衡状態に達していることが分かる。また平衡状態における値はガウス分布に対する値, すなわち skewness = 0, kurtosis = 3 から上方に外れ, そのずれは e が大きいほど大きくなること分かる。初期条件は線形分散関係に基づいて P-M スペクトルから構築しており, 本来非線形な波動場に含まれるべき束縛波成分が一切含まれていない。そのような波動場を非線形な基礎方程式に則って時間発展をさせた直後は, 自由波とそれに付随すべき束縛波がコンシステントな形で含まれる非線形波動場への急速な移行が起こるものと考えられる。この遷移段階は非線形波動場の波高分布を議論するうえでは不適切であるので, 波高分布求める際には最初の 5 周期は無視して, $5T_p < t < 25T_p$ の 20 周期の間の η のみを考慮するものとする。

波高データを多数収集するためにはより長時間の時間発展を追跡するのが好ましいが, あまり長時間発

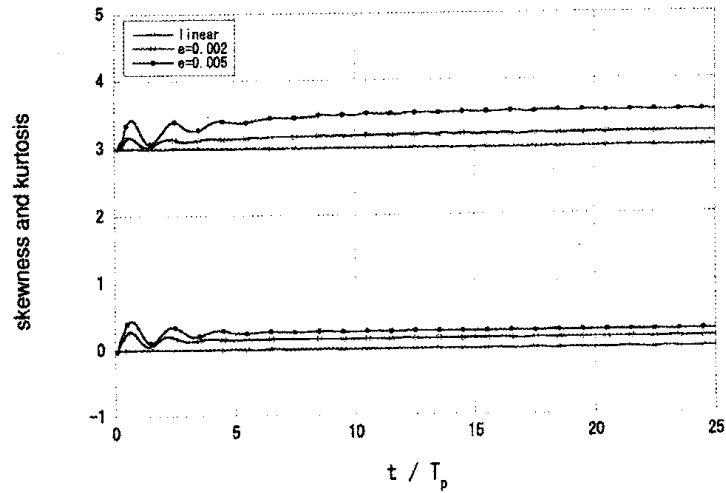


図 6: η の skewness および kurtosis の平均値の時間発展

展させた結果スペクトルに顕著な変化が生じるようでは、一体どのようなスペクトルに対して波高分布を議論しているのが判然としなくなる。図 7 は $e = 0.005$ の 1500 ケースから得られた最終時刻 $t = 25T_p$ における波数スペクトルと、初期に与えた P-M スペクトルを比較したものであるが、少なくともスペクトルの主要な部分に関しては系統的な変化はほとんど見られない。そもそもスペクトルの変化は非線形性をもたらすものであり、一定時間内に発生するスペクトルの変動は非線形性、すなわち e が大きいほど大きい。本研究で扱う e の中の最大値である $e = 0.005$ に対してのこの結果は、ここで対象とするすべての e の値に対して、 $t = 25T_p$ 程度までの時間発展についてはスペクトル変動はほとんどないものと見做して構わないことを示しており、したがって以下で提示するさまざまな統計量はすべて P-M スペクトルを対象としたものであるとすることができる。

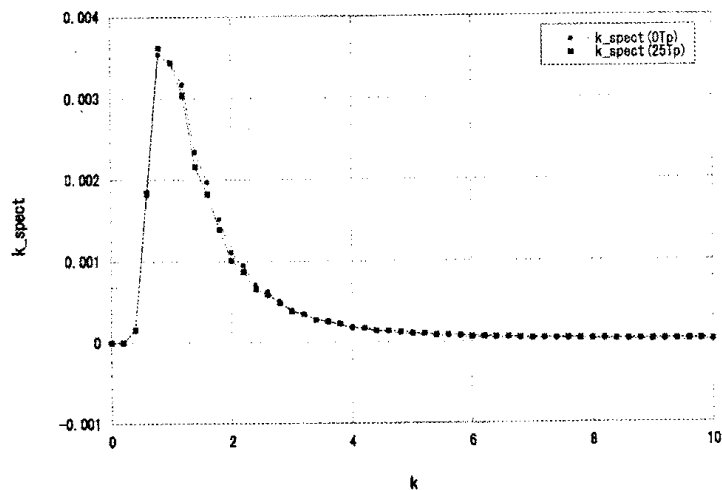


図 7: 最終時刻 $t = 25T_p$ における波数スペクトルと初期に与えた P-M スペクトルの比較

4 計算結果

前節で説明したように、4096の空間メッシュ点のうち、 $0.7\lambda_p$ 程度離れた98箇所の観測点において η の時系列を $t = 5T_p$ から $t = 25T_p$ の20周期にわたって記録する。これにゼロ・ダウンクロス法を適用すると、1箇所の時系列から25波程度の個々波が検出され、したがってひとつの初期条件から出発した計算に対して約2500波の個々波の波高が得られる。これを、各成分波の初期位相を与える乱数のみが異なり、スペクトル的には同等な1500個の初期条件に対して繰り返すことによって、一つの e の値に対してほぼ375万個の波高データが得られる。以下ではこうして収集された波高データに基づいて得られた波高分布や超過確率、freak waveの出現確率などを示す。

4.1 波高分布

まず波高分布（波高の確率密度分布） $p(\xi)$ 、および超過確率 $P(\xi)$ を計算した。超過確率はある ξ を超える波高の出現確率であり、 $p(\xi)$ とは

$$P(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} p(\xi') d\xi' \quad (11)$$

の関係にある。 $p(\xi)$ がRayleigh分布の場合、 $P(\xi)$ は

$$P(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{8}\right) \quad (12)$$

となる。図8は数値計算から得られた波高の確率密度分布 $p(\xi)$ を、リニアースケール（左図）および片対数グラフ（右図）にて示したものであり、また図9は超過確率の確率密度 $P(\xi)$ を示す。参考までにRayleigh分布に対応する分布および、すべての非線形項を消去した計算から得られた結果（図中では‘linear’と表示）もあわせて示した。この図より、スペクトル形状がP-Mスペクトルの場合、非線形性をまったく考慮

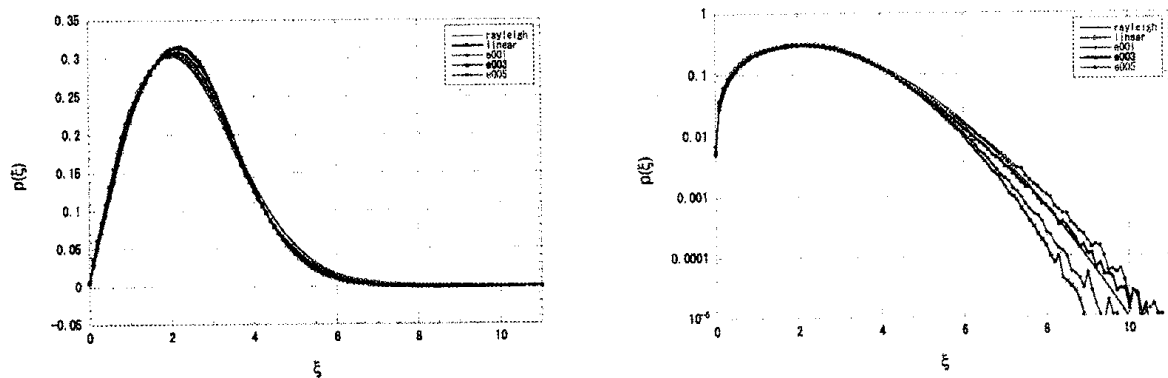


図 8: 無次元波高 ξ の確率密度関数 $p(\xi)$

しなくても確率的な要因だけでfreak waveが出現することが分かる。³ただしその出現確率はほぼ16,000波に1波程度であり、Rayleigh分布から予想されるものの1/5にも満たない。この結果は、線形不規則波動場に有限スペクトル幅の影響を取り入れると、freak waveを含め大波高波の出現確率が、Rayleigh分布

³freak wave はほぼ $\xi > 8$ に対応する。

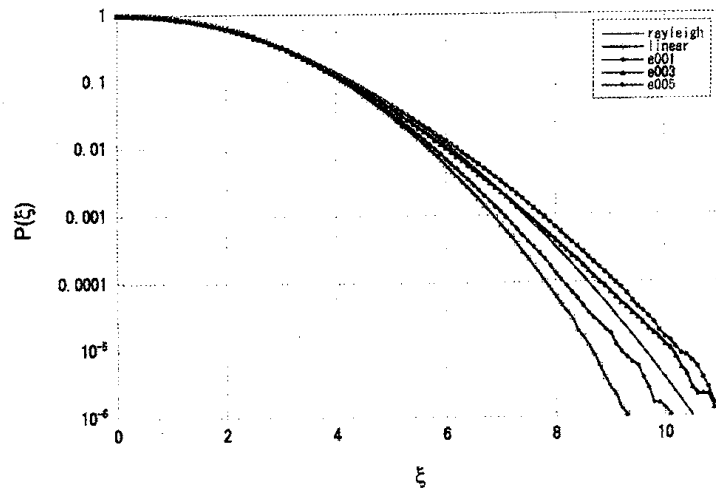


図 9: 無次元波高 ξ の超過確率密度関数 $P(\xi)$

から予測される値より小さくなるという古くから知られた結果と整合するものである。またこの図9は、スペクトル形状を P-M スペクトルに固定し、エネルギー密度 e を大きくした場合、freak wave を含む大波高波の出現確率は単調に増大し、 e の値によっては Rayleigh 分布の予測は大波高波の出現確率をむしろ過小評価する危険な状態になる可能性があることも示している。この傾向をより明確な形で把握するために、以下では freak wave の出現確率や最大波高とエネルギー密度 e の関係を考える。

4.2 freak wave の出現確率

本研究では $H > 2H_{1/3}$ なる条件を満たす波を freak wave と定義する。図 10 は freak wave の出現確率、すなわち同一の e を持つ 1500 ケースのシミュレーションで検出される約 375 万波のうちの $H > 2H_{1/3}$ を満たす波の数の比率を e の関数として示したものである。 e の増大とともに freak wave の出現確率も単調に増大し、 $e \geq 0.0016$ では Rayleigh 分布が freak wave の出現確率に対して過小評価の状態になることを明瞭に示している。

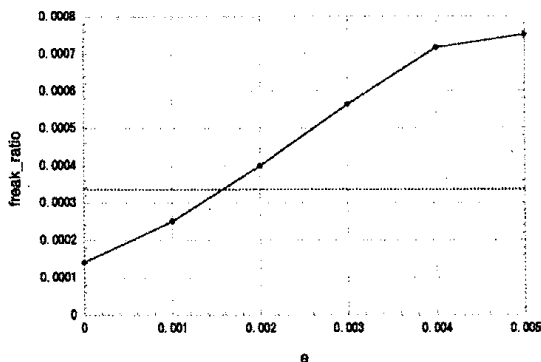


図 10: e の増大に伴う freak wave の割合の増大

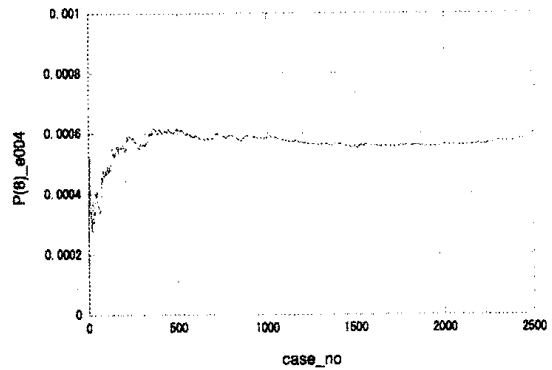


図 11: ケース数の増大に伴う $P(8)$ の収束 ($e = 0.004$)

念のため、われわれが用いているケース数が、アンサンブル平均の収束にはたして十分なのかどうか、ここで検討しておく。図 11 は $e = 0.004$ の場合に、アンサンブル平均を取るケース数を 2500 ケースまで徐々に増やしていったときの、freak wave の出現確率に近い値を与えると思われる $P(\xi = 8)$ の振舞いを示している。⁴ 本研究ではすべての e に対して、初期場の成分波の位相のみが異なる 1500 ケースのシミュレーションを行い、そこから得られる波高の標本からさまざまな確率を求めているが、図 11 は、この 1500 というケース数がさまざまな確率密度や期待値を算出するにあたってほぼ十分な量であることを示している。

4.3 最大波高

最大波高 H_{\max} 、したがってそれを σ_η で無次元化した ξ_{\max} は確率変数であり、また対象とする波の数が増えるにしたがってその期待値が限りなく増大することは Rayleigh 分布を基礎とする確率的な議論でよく知られている。 N 波中の最大波高が ξ_{\max} となる確率密度 $p_{\max}^{(N)}(\xi)$ は ξ の確率密度 $p(\xi)$ と超過確率 $P(\xi)$ より

$$p_{\max}^{(N)}(\xi_{\max}) = Np(\xi_{\max})[1 - P(\xi_{\max})]^{N-1} \quad (13)$$

で与えられる。

一つの初期条件からスタートする数値シミュレーションからは約 2500 個の波高のデータが得られ、その中の最大の無次元波高 ξ_{\max} を検出する。一つの e に対して 1500 ケース繰り返しているので、1500 個の ξ_{\max} のサンプルが得られることになる。 $e = 0.001$, $e = 0.003$, $e = 0.005$ に対して、このようにして求めた $p_{\max}(\xi)$ を図 12 に示す。図では比較のために Rayleigh 分布に基づく $p_{\max}^{(N)}$ もあわせて示した。Rayleigh 分布に対する $p_{\max}^{(N)}$ では、数値シミュレーションで 1 ケースあたりに検出される波の数の平均値が 2545 であることから $N = 2545$ としている。この図から H_{\max} の分布が e の増大とともに単調に高波高側にシフトしていくこと、また分布の幅が Rayleigh 分布に基づくものに比べて広くなる傾向があることなどが分かる。図 13 は、 ξ_{\max} の平均値（期待値）を e の関数として示したものであるが、やはり e とともに単調に増大している。

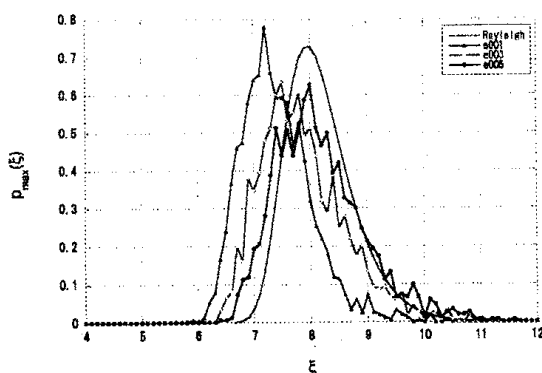


図 12: ξ_{\max} の確率密度分布

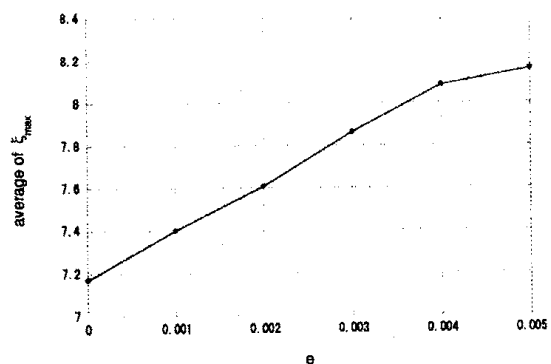


図 13: ξ_{\max} の期待値の e に伴う増大

⁴波高分布が Rayleigh 分布の場合、freak wave の出現確率は $P(8.008)$ で与えられる。

5 結論と議論

5.1 結論

本研究では非粘性、ポテンシャル流、1次元伝播という単純化された枠組みの中で、海洋波にとって標準的なスペクトルである Pierson-Moskowitz スペクトルという比較的広帯域スペクトルを有する非線形水面重力波動場の時間発展を直接数値シミュレーションにより決定論的に追跡することにより、波高分布や freak wave の出現確率などを求めた。この研究を通して得られた主な結果は以下のようにまとめることができる。

1. 従来からの線形理論や弱非線形理論が予言しているとおり、エネルギー密度が低く非線形性があまり重要でない場合には、確かに Rayleigh 分布は大波高波の出現確率に対して過大評価になる。
2. しかし、スペクトル形状を相似に保ったままエネルギー密度を上げると、freak wave を含む大波高波の出現確率は単調に増大し、Rayleigh 分布がむしろこれら大波高波の出現確率を過小評価するという危険な状態が、十分現実的なエネルギー密度の範囲においても発生しうる。
3. 波の数を固定した場合に出現する最大波高の確率分布および期待値も、非線形性の増大に伴って単調に高波高側へ移行していく。

5.2 今後の課題

図 14 は $e = 0.005$ のあるケースで freak wave と判定された波が出現した時刻における空間波形を示している。このケースの $t = 25T_p$ までの時間発展の中で、4096 すべての空間メッシュ点における η の値を

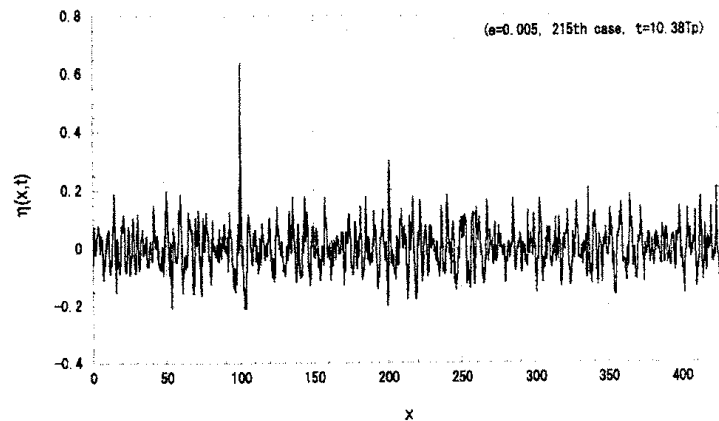


図 14: freak wave が出現した時刻の空間波形の一例 ($e = 0.005$, 215th, $t = 10.38T_p$)

みると、その値域は $-0.360 \leq \eta \leq 0.637$ となっており、平均水位 $\eta = 0$ を挟んで正負の非対称性が際立っている。一方、このケースとまったく同じ初期条件から、すべての非線形項を削除して線形理論に基づいて時間発展させた場合の η の値域は $-0.339 \leq \eta \leq 0.341$ であり、値域の正負対称性が保たれている。図 15 は、図 14 の freak wave が出現したケースの $\eta(x,t)$ の時空間発展のイメージ図をグレースケールで示したものであるが、ほぼ群速度で伝播する波群構造が明瞭に認められる。一般に P-M スペクトル程度の広帯域スペクトルを有する不規則波形に対して、議論の余地のない形で、現実的にも意味のある包絡波形

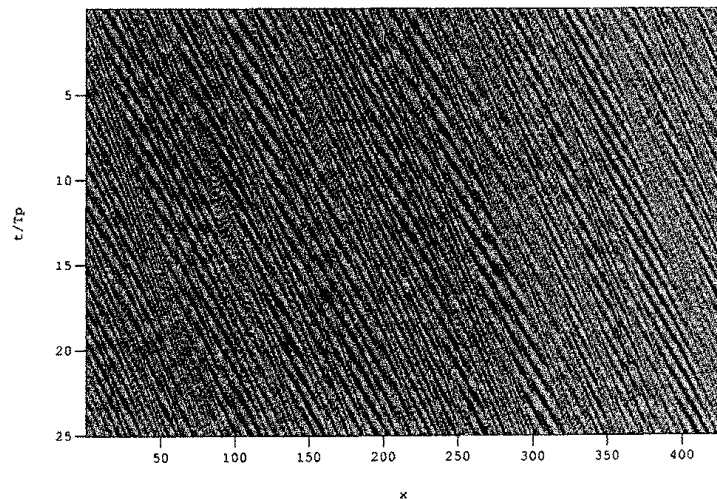


図 15: freak wave が出現したときケースの $\eta(x, t)$ のイメージ図 ($e = 0.005$, 215th)

(envelope) を定義する方法はないと思われる。Hilbert 変換など使って強引に (pseudo-)envelope を計算することはできたとしても、その空間変化スケールが波形そのものの変化スケールと同程度であることを見ると、その実際的な有用性にはやはり疑問が残る。しかし図 15 を見ると、やはり波群的構造およびその盛衰の力学が freak wave など異常波の出現に深くかかわっているのは間違いがないように思われる。純粹に確率的原因で偶然に出現した大波高、もしくはそれを含む波群に対し、系の非線形性が何らかのメカニズムでその成長を選択的に促進する、何かそのようなことがあるのかも知れない。とにかく、非線形性の増大に伴う freak wave 出現確率の増大を理解するためには、中程度の非線形性と広帯域スペクトルという 2 つの要因の双方を見据えた上での「波群の力学」と言ったものを今後構築していく必要があるであろう。その他にも、ここでは P-M スペクトルに固定して波高分布や freak wave の出現確率を調べたが、それらのスペクトル形に対する依存性の調査や、より現実に近い 2 次元平面場への拡張とそれによる方向分布の影響の調査などなど、今後調べるべきことはまだいろいろと残されている。

参考文献

- [1] Kharif, C. and Pelinovsky, E. 2003 Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon *Eur. J. Mech. B/Fluids* **22**, 603–634.
- [2] Massel, S.R. 1996 *Ocean surface waves: their physics and prediction* (World Scientific)
- [3] Tanaka, M. 2001 A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation. *Fluid Dynamics Research*, **28**, 41–60.
- [4] 合田良實 1990 港湾構造物の耐波設計—波浪工学への序説 (増補改訂) (鹿島出版会)
- [5] 田中光宏 1998 海洋波のための数値スキームの研究数理研講究録 **1030**, 162–172.