

球対称オイラー方程式の新しい対称性のクラスとその不変解

名古屋大学理学研究科 村田宗一 (Souichi Murata)
 Department of physics, Ngaoya university

この論文では、Lie symmetry に基づく相似解の解法を拡張した方法として、新たな微分方程式の対称性に基づく相似型解の解法を提案する。

1 問題の背景

微分方程式の対称性に基づく厳密解の解法として、

1. 微分方程式が持つ対称性を求める。
2. 求められた対称性に対する不変解を求める。

という枠組がある (ここでは、不変解の解法と呼ぶ)。微分方程式が線形・非線形にかかに問わずその対称性を求める処方箋は分かっているので [1, 2]、不変解の解法はどのような非線形の微分方程式に対しても適用できる方法である。方程式の対称性に基づくという立場から解法を開発するために、ここでは不変解の解法を非線形偏微分方程式系へ適用することを考える。

微分方程式の対称性としてよく扱われているものに、Lie symmetry がある [3, 4]。これは、独立・従属変数にのみ作用し、微分方程式を不変とする局所変換群 (対称群) である。変換群はベクトル場として特徴付けられる。基本的な例としては、並進対称性やスケール対称性、回転対称性、解の重ね合わせ などがある。ここでは、Lie symmetry に対する不変解を相似解、Lie symmetry による不変解の解法から相似解を得る方法を、相似解の方法と呼ぶことにする。

この論文の目的は、相似解の解法を拡張することである。そのために、Lie symmetry を含む広いクラスに属する対称性の求め、その対称性に基づく不変解の解法を考える。まず、不変解の解法について説明する。

微分方程式系 $\Delta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = 0$, ($\nu = 1, \dots, l$) の対称群はベクトル場 \mathbf{V} で表されたとする。その時、対称群の不変解は

$$\Delta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l, \tag{1}$$

$$\mathbf{V}(u^i - \bar{u}^i) \Big|_{u^i = \bar{u}^i(\mathbf{x})} = 0, \tag{2}$$

を解くことにより与えられる。方程式 (2) は、invariant 条件と呼ばれる一階線形偏微分方程式で、特性曲線法により解くことができる。また、その特性曲線はベクトル場 (が特徴付ける対称群) により決まる。

多くの非線形偏微分方程式の Lie symmetry は、スケール対称性や時間・空間の並進対称性、回転対称性などのような自明な対称性に対応するものしかもたない場合が多い。その場合、相似解の解法からは物理的考察 (次元解析など) から得られるような解である場合が多い。

2 新しいクラスの対称性とそれに基づく不変解の解法 [5, 6]

n 階偏微分方程式系を

$$\Delta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l, \quad (3)$$

とおく。ここで $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^p)$, $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^q)$ はそれぞれ独立変数、従属変数であり、 $\mathbf{u}^{(n)}$ は n 階微分まですべて含む。

この方程式系に対して、補助方程式を追加する。補助方程式を

$$\tilde{\Delta}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = S(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (4)$$

と書くことにする。ここで、 $S(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ に微分が入らないことがポイントである。そして、拡張された方程式系 (3), (4) に対して Lie symmetry と同様にして対称性を求めることで、新しい対称性のクラスが得られる。Lie symmetry は方程式の解全体に対する対称性なのに対して、新しい対称性は、(補助方程式により) 制限された解全体に対する対称性である。このことから、新しい対称性は Lie symmetry を含む広いクラスの対称性となっている。新しい対称性に対する不変解を相似"型"解と呼び、新しい対称性に対する不変解の解法を相似型解の解法と呼ぶことにする。

3 3次元球対称断熱ガスに対するオイラー方程式 [5]

3次元球対称断熱ガスに対するオイラー方程式は以下のように書ける [3, 7, 8, 9]

$$\rho_t + u\rho_r + \rho\left(u_r + \frac{2}{r}u\right) = 0, \quad (5)$$

$$u_t + uu_r + \frac{1}{\rho}q_r = 0, \quad (6)$$

$$q_t + uq_r + \gamma q\left(u_r + \frac{2}{r}u\right) = 0. \quad (7)$$

$\rho(\mathbf{x}, t)$ は密度, $u(\mathbf{x}, t)$ は動径方向の速度, $q(\mathbf{x}, t)$ は圧力, t は時間で、 \mathbf{x} は極座標 (r, θ, ϕ) である。補助方程式として以下のような方程式を付け加える

$$\frac{1}{\rho}q_r = S(r, t). \quad (8)$$

方程式系 (5)-(8) の対称群と $S(r, t)$, τ は

$$\mathbf{V} = \tau(t)\partial_t + \frac{1}{2}\tau_t r \partial_r - \frac{3}{2}\tau_t \rho \partial_\rho + \frac{1}{2}(-\tau_t u + \tau_{tt} r)\partial_u - \frac{3}{2}\gamma\tau_t q \partial_q, \quad (9)$$

$$S(r, t) = -\frac{\tau_{ttt}}{(5\gamma - 3)\tau_t} r, \quad (10)$$

$$\left\{ \log\left(\frac{\tau_{ttt}}{\tau_t} \tau^{\frac{3\gamma-1}{2}}\right) \right\}_t = 0. \quad (11)$$

無限小作用素 (9) より、invariant 条件によって書き変えた方程式系 (5)-(7) は以下のように書ける

$$-\frac{3}{2}\tau_t\rho - \frac{1}{2}\tau_{tr}\rho_r + \tau\left(u\rho_r + \rho\left(u_r + \frac{2}{u}\right)\right) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{1}{2}(-\tau_t u + \tau_{tt}r) - \frac{1}{2}\tau_t u_r + \tau\left(uu_r + S\right) = 0 \quad (13)$$

$$-\frac{3}{2}\gamma\tau_t q - \frac{1}{2}\tau_{tr}q_r + \tau\left(uq_r + \gamma q\left(u_r + \frac{2}{u}\right)\right) = 0. \quad (14)$$

方程式系 (5)-(8) は従属変数に対して数が多いので、方程式系 (12), (14) を自動的に満足するように速度を与える

$$u = \frac{\tau_t}{2\tau}r. \quad (15)$$

方程式 (10), (11), (13) そして (15) より、 $f(t) = \sqrt{\tau}$ 変換すると

$$f_{tt} = \alpha f^{2-3\gamma}, \quad (16)$$

となる。 α は定数。

無限小作用素 (9) から導かれる Lie 方程式を積分することで方程式系 (5)-(8) の解が得られる

$$x = \frac{r}{f}, \quad \rho = \frac{R(x)}{f^3}, \quad u = f_t x, \quad q = \frac{Q(x)}{f^{3\gamma}}, \quad (17)$$

where

$$\frac{1}{R}Q_x = -\alpha x.$$

$R(x)$ は x の任意関数。

$\gamma = 5/3$ の時、方程式 (16) より $f_{tt} = \alpha f^{-3}$ となるので、解 (17) は従来の不変解の解法で得られていた解である。他の γ に対しては新しい解となる。

$a > 0, \gamma > 1$ の場合を考えてみる。この時、局在したガスは膨脹から収縮に転ずる運動をする。

方程式 (16) はポテンシャル $V(f)$ を用いて

$$f_{tt} = -V_f, \quad V(f) = \frac{\alpha}{3(\gamma-1)}f^{3(1-\gamma)}. \quad (18)$$

となる。 $f(t)$ はポテンシャル $V(f)$ によって与えられる。膨脹から収縮に転ずる時間 t_r をポテンシャルより評価する。初期条件として

$$f(t)|_{t=0} = 1, \quad f_t|_{t=0} = -|v_0|. \quad (19)$$

と取ると、 t_r は

$$t_r = \int_0^{f_r} \left| \frac{df}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2\alpha}{3(\gamma-1)}(1-f^{3(1-\gamma)})}} \right|, \quad (20)$$

where f_r is

$$f_r = \left(\frac{3(\gamma-1)}{2\alpha}v_0^2 + 1 \right)^{\frac{1}{3(1-\gamma)}}.$$

となる。

4 まとめ

この論文では、Lie symmetry に基づく相似解の解法を拡張するために、微分方程式の新しい対称性のクラスに基づいた不変解の解法を考えた(相似”型”解の解法)。微分方程式の制限された解の中で対称性を考えるために、補助方程式を追加した。新たな対称性のクラスに対する不変解を相似型解とよんだ。新たな対称性は Lie symmetry を含むために相似型解は相似解を含む解となっている。その例として、3次元球対流オイラー方程式を扱った。

参考文献

- [1] P. J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer, (1986).
- [2] Bluman G. W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations. Springer-Verlag, (1989).
- [3] N.H Ibragimov. CRC HANBOOK OF LIE GROUP ANALYSIS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS. vol1,2,3 CRC Press(1994).
- [4] 及川正行. 対称性と相似遞減. ながれ.19(2000)186.
- [5] S. Murata. Chao Solition & Fractals. Chao Solition & Fractals. 24 (2005)579. .
- [6] S. Murata, and K. Nozaki. JPSJ. Submitted.
- [7] Francesco. Oliveri and Maria.Paola. Speciale. Internat. J. Non-Linear Mech.34(1999)1077.
- [8] Francesco. Oliveri and Maria.Paola. Speciale. Internat. J. Non-linear Mech.37(2002)257.
- [9] S.Murata, and Nozaki K. Internat. J. Non-linear Mech. 39 (2004)963.