

連立非分散方程式の双対系の2ソリトン相互作用

Two-soliton interactions of dual system of the coupled dispersionless equations

角島 浩 (富山大工), 紺野公明 (日大理工)

Hiroshi Kakuhata (Toyama Univ.) and Kimiaki Konno (Nihon Univ.)

1 はじめに

連立非分散方程式

$$\partial_\tau^2 \mathbf{r} - \partial_\sigma^2 \mathbf{r} = (\partial_\tau \mathbf{r} + \partial_\sigma \mathbf{r}) \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}), \quad (1)$$

は一様かつ一定な外部電流 \mathbf{J} が作る外部磁場中を運動し, 内部電流と伸縮性を持つストリングを記述する可積分な方程式である [1, 2]。ここで $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$ はストリングの位置ベクトル, τ は時間, σ は弧長である。そのソリトン解は外部電流 \mathbf{J} に沿う方向に回転しながら伝播することができる。すなわち, 1ソリトン解は位相速度 v と角速度 Ω の2パラメータ解であり, 1+1の場の理論でありながら3次元的な特徴を持つ。このとき角速度が比較的小さいときにはソリトンはループ形状をなし, 大きいときにはループではなくなる。その相互作用は角速度が小さいときには弾性梁の運動 [6] に似るが, 角速度が大きいときには複雑なものになる。本稿ではこの系に相空間での $\frac{\pi}{2}$ 回転である相対変換を施し, 新しい系で2ソリトン解を求め, ソリトン相互作用を調べた。

2 連立非分散方程式の双線形化

適当な座標回転により外部電流を $\mathbf{J} = (0, 0, 1)$ にとると運動方程式 (1) は

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)X, \\ \partial_\tau^2 Y - \partial_\sigma^2 Y &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)Y, \\ \partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z &= (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X + (\partial_\tau Y + \partial_\sigma Y)Y, \end{aligned} \quad (2)$$

で与えられるが, ここではさらに, 円柱座標

$$\begin{aligned} X &= R \cos \theta, \\ Y &= R \sin \theta, \\ Z &= Z, \end{aligned} \quad (3)$$

を用いて

$$\begin{aligned}
 \partial_\tau^2 R - \partial_\sigma^2 R - R[(\partial_\tau \theta)^2 - (\partial_\sigma \theta)^2] + R(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z) &= 0, \\
 \partial_\tau (R^2 \partial_\tau \theta) - \partial_\sigma (R^2 \partial_\sigma \theta) &= 0, \\
 \partial_\tau (\partial_\tau Z - \frac{1}{2} R^2) - \partial_\sigma (\partial_\sigma Z + \frac{1}{2} R^2) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4}$$

としておく。この方程式においては2番目の方程式が角運動量の z -成分の保存則を表し、3番目が運動量の z -成分の保存則を表す。この方程式に双線形変換

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{\sqrt{Q\bar{Q}}}{F}, \\
 \theta &= \frac{1}{2i} \log \frac{Q}{\bar{Q}}, \\
 Z &= \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \log F,
 \end{aligned} \tag{5}$$

を行うと双線形方程式

$$\begin{aligned}
 (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q &= 0, \\
 (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot \bar{Q} &= 0, \\
 (D_\tau - D_\sigma)^2 F \cdot F - \frac{1}{2}|Q|^2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

を得る [3, 4, 5]。ここで Q は複素関数であり、 \bar{Q} は Q の複素共役、 D_τ と D_σ は

$$\begin{aligned}
 D_\tau^m a \cdot b &= (\partial_\tau - \partial_{\tau'})^m a(\tau, \sigma) b(\tau', \sigma)|_{\tau'=\tau}, \\
 D_\sigma^n a \cdot b &= (\partial_\sigma - \partial_{\sigma'})^n a(\tau, \sigma) b(\tau, \sigma')|_{\sigma'=\sigma},
 \end{aligned}$$

で定義される双線形演算子である。この双線形方程式から、通常の方法によって1ソリトン解

$$\begin{aligned}
 R &= A \operatorname{sech} \eta, \\
 \theta &= \Omega(\tau - v\sigma) + \theta_0, \\
 Z &= Z_0 + \sigma - A \tanh \eta,
 \end{aligned} \tag{7}$$

を求めることができる。ここで Z_0 は定数であり、 A は振幅

$$A = 2\sqrt{\frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v^2}}(1 + v),$$

η は位相

$$\begin{aligned}
 \eta &= \sqrt{\frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v^2}}(\sigma - v\tau) + \delta, \\
 \theta &= \Omega(\tau - v\sigma) + \theta_0,
 \end{aligned}$$

v は位相速度, Ω はソリトン回転の角速度である。 Z の σ についての導関数 $\partial_\sigma Z$

$$\partial_\sigma Z = 1 - \frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v} \operatorname{sech}^2 \eta,$$

において条件 $\partial_\sigma Z \geq 0$ を課すと

$$|\Omega| \geq |\Omega_{\text{cr}}| = \frac{1}{\sqrt{2(1 - v)}}, \quad (8)$$

では Z は単調増加になり, 1ソリトンはループ形状ではなくなるのがわかる。以下にその様子を図示する (図-1, 2)。なお2ソリトン解は第5節で与える。

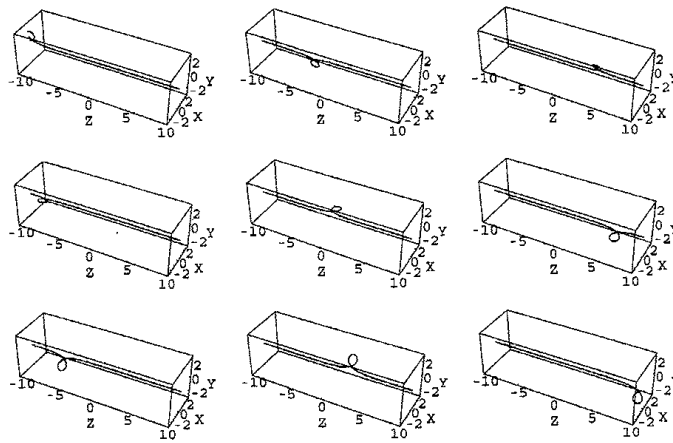


図 1: Loop soliton propagation $v = 0.24, \Omega = 0.12$

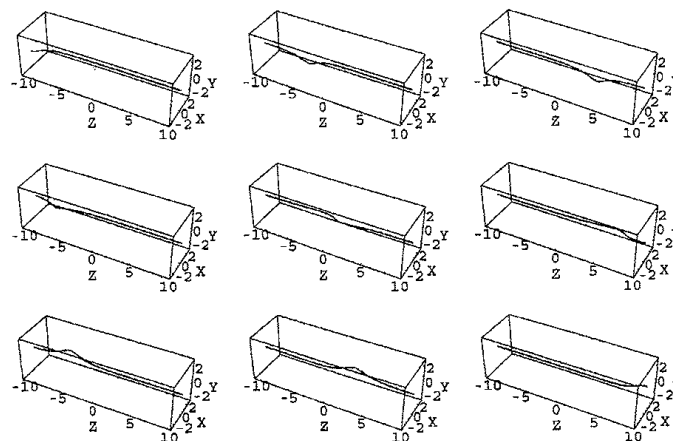


図 2: Non-loop soliton propagation $v = 0.24, \Omega = 0.9$

3 連立非分散方程式の双対変換

双対変換は正準変換である。これは線形格子や Toda 格子の挙動を理解する上で有用であった [7, 8, 9]。それは本質的に調和振動子の相空間における $\frac{\pi}{2}$ -回転であり、正準変換であるが故に力学系の本質を変えるものではない。

さて、円筒座標での連立非分散方程式 (4) に一般化座標での双対変換

$$\partial_\sigma \Theta = R^2 \partial_\tau \theta, \quad \partial_\tau \Theta = R^2 \partial_\sigma \theta, \quad (9)$$

を行うと双対系の運動方程式

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 R - \partial_\sigma^2 R + \frac{1}{R^3} [(\partial_\tau \Theta)^2 - (\partial_\sigma \Theta)^2] + R(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z) &= 0, \\ \partial_\tau \left(\frac{\partial_\tau \Theta}{R^2} \right) - \partial_\sigma \left(\frac{\partial_\sigma \Theta}{R^2} \right) &= 0, \\ \partial_\tau (\partial_\tau Z - \frac{1}{2} R^2) - \partial_\sigma (\partial_\sigma Z + \frac{1}{2} R^2) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

を得る。ここでも 2 番目の方程式が角運動量の z -成分の保存則を表し、3 番目が運動量の z -成分の保存則を表す。ここで双対変換 (9) が 2 つの系の角運動量保存則を表す方程式の Bäcklund 変換になっていることに注意しよう。従って、変換 (9) を用いれば、元の系の 1 ソリトン解 (7) から双対系の 1 ソリトン解

$$\begin{aligned} R &= A \operatorname{sech} \eta, \\ \Theta &= 4\Omega A(1+v) \tanh \eta, \\ Z &= Z_0 + \sigma - A \tanh \eta, \end{aligned} \quad (11)$$

を得ることができる。

ここで Θ をある 3 次元空間の角度変数と見なして $v = 0.12$ の時の解を図示する。 $\Omega = 0$ の時には両者は一致し、ループソリトンになる (図-3)。

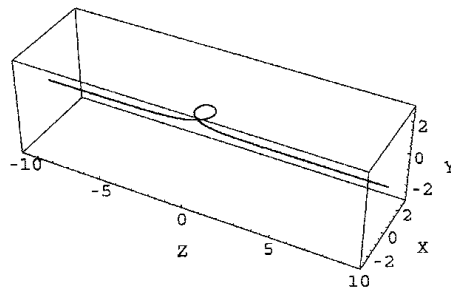


図 3: $\Omega = 0, v = 0.12$ Loop soliton

しかし、 $\Omega \neq 0$ ではループがほどけてくる。 $\Omega < \Omega_{\text{cr}}$ の間はストリングが z 軸上を前後するのでループの特性を残しているが (図-4,5), $\Omega = \Omega_{\text{cr}} \approx 0.81$ になると Z は準単調増加になり、元の解ではもはやループを形成しない (図-6)。また、このときソリトンはカ

スプ状になるが特異点ではない。さらに Ω が大きくなると、渦糸のようなねじれたソリトンになる (図-7)。 Θ は $\Theta \sim \tanh \eta$ で与えられるので、ソリトンは回転しているにもかかわらず定常に伝播していくように見える (図-8,9)。

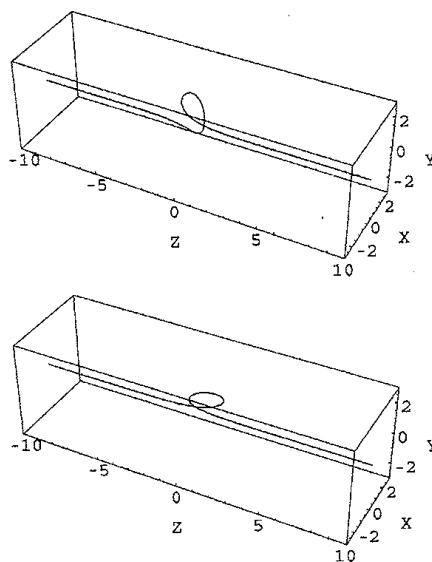


図 4: $\Omega = 0.1$ (上図が (7), 下図が (11))

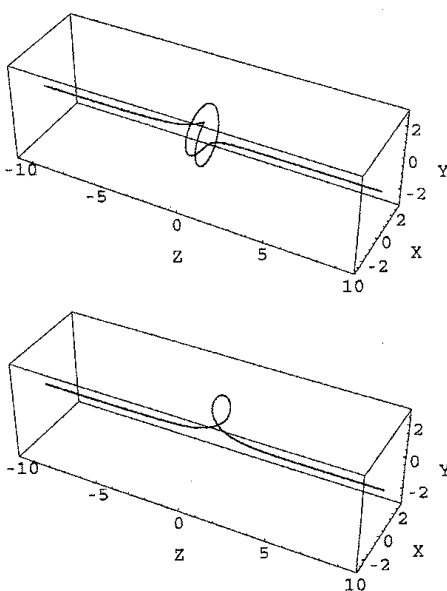
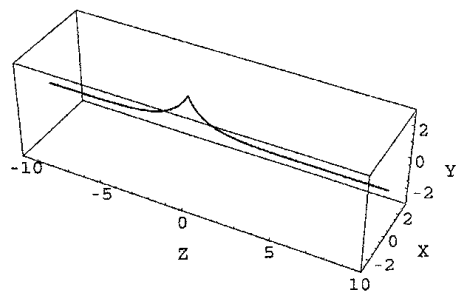
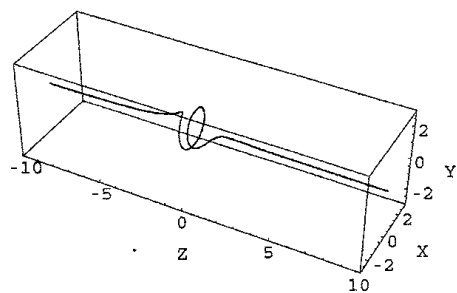
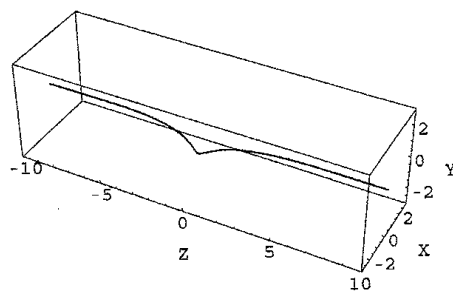
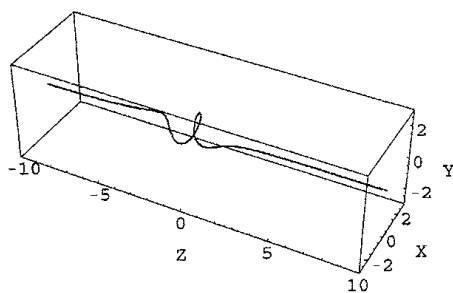


図 5: $\Omega = 0.5$

☒ 6: $\Omega = 0.81$ ☒ 7: $\Omega = 0.9$

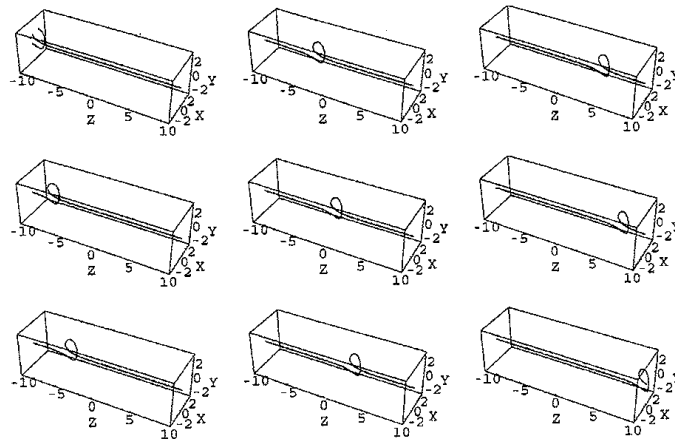


図 8: Dual soliton propagation $v = 0.24, \Omega = 0.12$

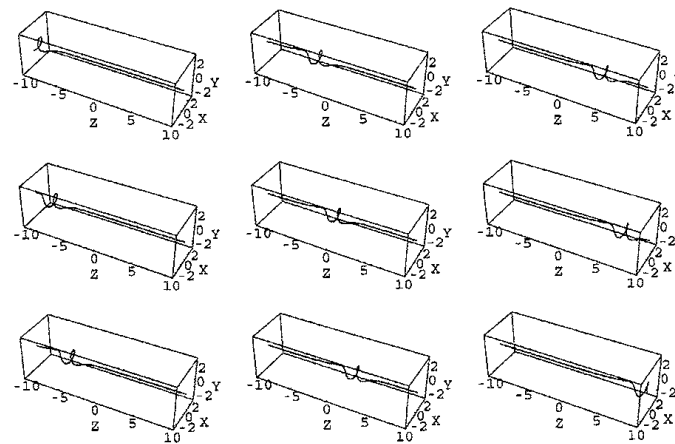


図 9: Dual soliton propagation $v = 0.24, \Omega = 0.9$

4 双対変換と双対系の双線形化

一般化座標の双対変換 (9) を用いて双対系の 2 ソリトン解を求めるのは計算が複雑になる。そこで連立非分散方程式の双線形変換 (5) に加えて

$$\Theta = \frac{S}{F}, \quad (12)$$

なる変換を行うと双対変換 (9) の双線形形

$$\begin{aligned} D_\sigma S \cdot F &= \frac{1}{2i} D_\tau Q \cdot \bar{Q}, \\ D_\tau S \cdot F &= \frac{1}{2i} D_\sigma Q \cdot \bar{Q}, \end{aligned} \quad (13)$$

を得ることができる。この変換は

$$S \rightarrow S + \epsilon F, \quad (14)$$

に対して不変である。これは双対系での角運動量保存則に対応している。これらをあわせると双対系に対する双線形変換が以下で与えられることがわかる。

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sqrt{Q\bar{Q}}}{F}, \\ \Theta &= \frac{S}{F}, \\ Z &= \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \log F \end{aligned} \quad (15)$$

この変換により、双対系の運動方程式から双対系に対する双線形方程式

$$\begin{aligned} (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q &= 0, \\ (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot \bar{Q} &= 0, \\ (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)S \cdot Q &= 0, \\ (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)S \cdot \bar{Q} &= 0, \\ (D_\tau - D_\sigma)^2 F \cdot F - \frac{1}{2}|Q|^2 &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

と同時に双対変換の双線形形 (13) が得られる。 F と S は同じ双線形方程式を満足するように見えるが、 S に対しては $(D_\tau - D_\sigma)^2 F \cdot F - \frac{1}{2}|Q|^2 = 0$ に対応する方程式は存在しない。また、双線形双対変換 (13) において Q と \bar{Q} は互いに複素共役であり、一般に独立であるので F と S も独立な関数である。

5 2ソリトン解

系 (4) の2ソリトン解は

$$\begin{aligned} Q &= e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + c_1 e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1 + \eta_2} + c_2 e^{\eta_1 + \eta_2 + \bar{\eta}_2}, \\ F &= 1 + b_1 e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1} + \bar{b}_{12} e^{\bar{\eta}_1 + \eta_2} + b_{12} e^{\eta_1 + \bar{\eta}_2} + b_2 e^{\eta_2 + \bar{\eta}_2} + d_{12} e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1 + \eta_2 + \bar{\eta}_2}, \end{aligned} \quad (17)$$

で与えられる。係数は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4(\bar{\omega}_n + \omega_n - k_n - \bar{k}_n)^2} \quad (n = 1, 2), \\ b_{12} &= \frac{1}{4(\omega_1 + \bar{\omega}_2 - k_1 - \bar{k}_2)^2}, \\ c_1 &= 4(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2)^2 b_1 \bar{b}_{12}, \\ c_2 &= 4(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2)^2 b_2 b_{12}, \\ d_{12} &= 4^2 |\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2|^4 b_1 b_2 |b_{12}|^2, \end{aligned} \quad (18)$$

これから双線形双対変換 (13) において、通常のように S の摂動展開

$$S = \varepsilon^2 s_2 + \varepsilon^4 s_4 + \varepsilon^6 s_6 + \cdots, \quad (19)$$

を行うと (ε^0 -次は変換 (14) に対する対称性から, 0 とすることができる) 双対系の 2 ソリトン解は非分散連立方程式の 2 ソリトン解 (17) の F と Q に,

$$S = 2i[(\omega_1 - k_1)^2 - (\bar{\omega}_1 - \bar{k}_1)^2]b_1e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1} + 2i[(\omega_2 - k_2)^2 - (\bar{\omega}_1 - \bar{k}_1)^2]\bar{b}_{12}e^{\bar{\eta}_1 + \eta_2} + 2i[(\omega_1 - k_1)^2 - (\bar{\omega}_2 - \bar{k}_2)^2]b_{12}e^{\eta_1 + \bar{\eta}_2} + 2i[(\omega_2 - k_2)^2 - (\bar{\omega}_2 - \bar{k}_2)^2]b_2e^{\eta_2 + \bar{\eta}_2} + 2i[(\omega_1 - k_1)^2 - (\bar{\omega}_1 - \bar{k}_1)^2 + (\omega_2 - k_2)^2 - (\bar{\omega}_2 - \bar{k}_2)^2]d_{12}e^{\eta_1 + \bar{\eta}_1 + \eta_2 + \bar{\eta}_2} \quad (20)$$

を加えたものになる。

6 2 ソリトン相互作用

この節ではもとの系 (4) と変換された系 (10) の 2 ソリトンの相互作用を示す。ただし相互作用は同じ大きさで逆向きの位相速度での正面衝突で角速度は同じ大きさで逆向きの場合に限る。回転しない場合 (この場合にはどちらの系も全く同じである), 特に同一平面内での 2 ソリトン相互作用は, 1) 相対速度が小さい場合ソリトン同士が重なり合わず弾くように相互作用する, 2) 相対速度が大きい場合には小さいループのソリトンが大きいソリトンの内部を回る, 3) 正と負の振幅を持ったソリトンの場合には小さいソリトンが瞬間的に消失し大きなソリトンの振幅が増大する, の 3 つに大別される。

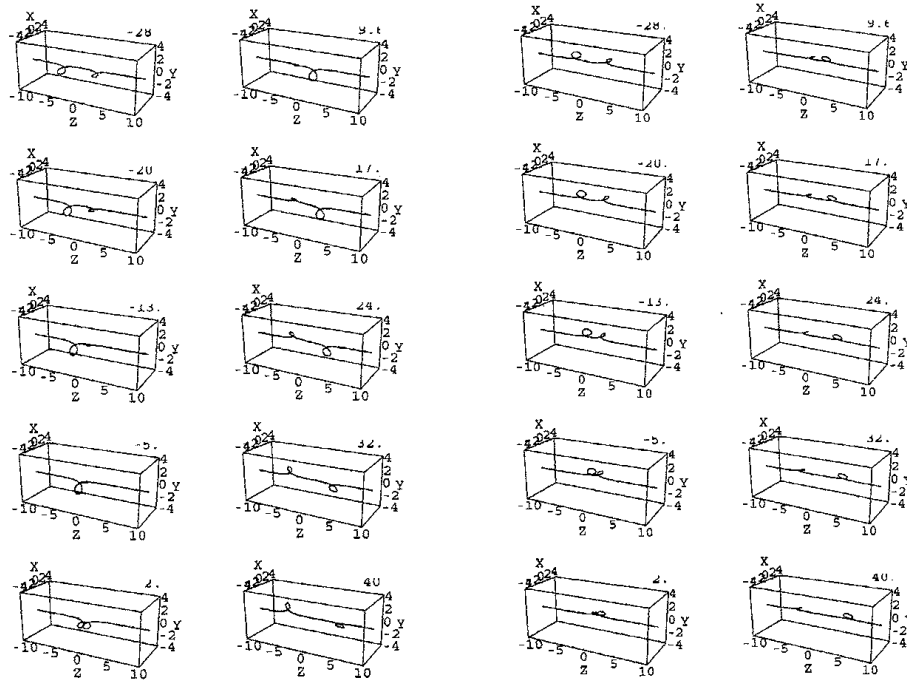


図 10: $v_1 = 0.1, \Omega = 0.04, v_2 = -0.1, \Omega = -0.04$, 左図が方程式 (4), 右図が (10)

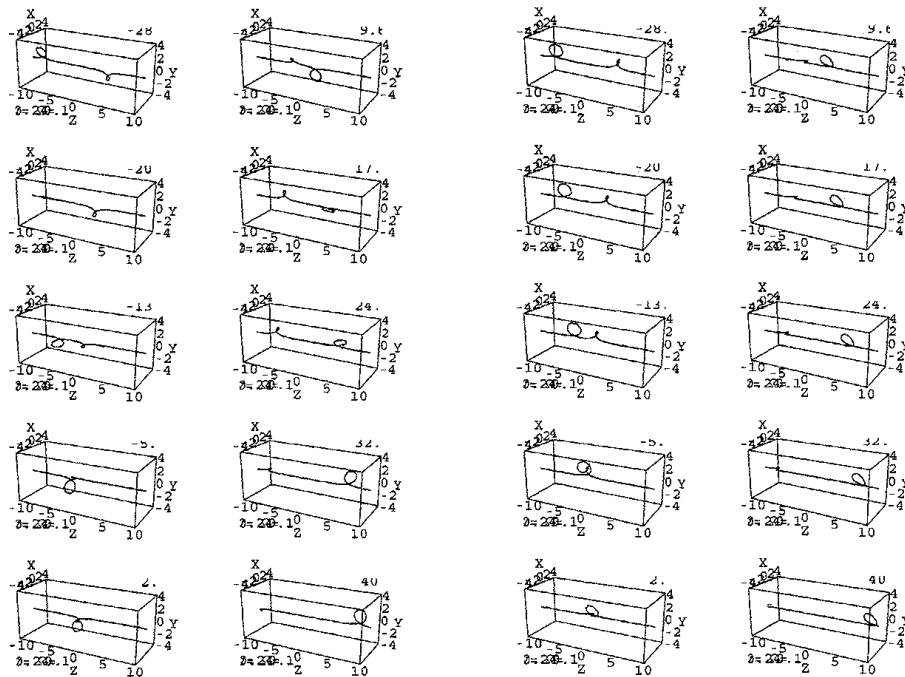


図 11: $v_1 = 0.24, \Omega = 0.1, v_2 = -0.24, \Omega = -0.1$

回転しているソリトンの相互作用では状況は異なる。小さな角速度に対する2ソリトン相互作用は、両者とも位相速度が小さいときにはソリトン同士が重なり合わず弾くように相互作用し(図-10)、位相速度が大きいときにはループ状のソリトンが大きいソリトンの内部を回る現象が観測される(図-11)。すなわち、両者とも同様な相互作用をし、平面内での相互作用に類似している。図-13は伝播しないブリーザである。系(4)では「正」の振幅を持ったループと「負」の振幅を持ったループが相互作用し一つの大きなループになる相互作用を周期的に繰り返す。双対系(10)の方は同一面内でループ状のソリトンが周期的に相互作用していることが判る。図-12は系(4)でループがなくなる臨界値付近の相互作用である。図では判りにくいですがソリトン同士が近づくと激しく振動しながら相互作用している。このとき一時的にループ状のものが形成される。図-14は位相速度が0.05と非常に小さい場合の相互作用である。連立非分散方程式(4)の相互作用はブリーザと非常に似ているが、相対速度が小さいにもかかわらず、時折、ループ状のものが大きなソリトン内を回るような相互作用を行う。これは平面内の連立非分散方程式の相互作用とは異なっている。これに対して双対系(10)での相互作用はかなりねじれた形で相互作用しており判然としない。しかし最も近づいたときにはループ状のものが形成されブリーザと似た相互作用をしている。

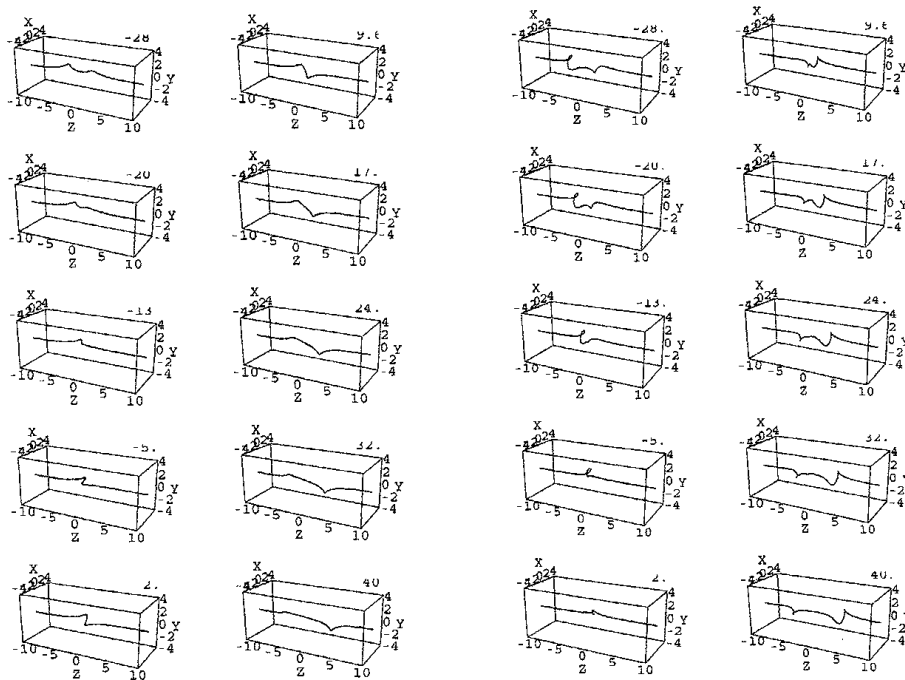


图 12: $v_1 = 0.12, \Omega = 0.81, v_2 = -0.12, \Omega = -0.81$

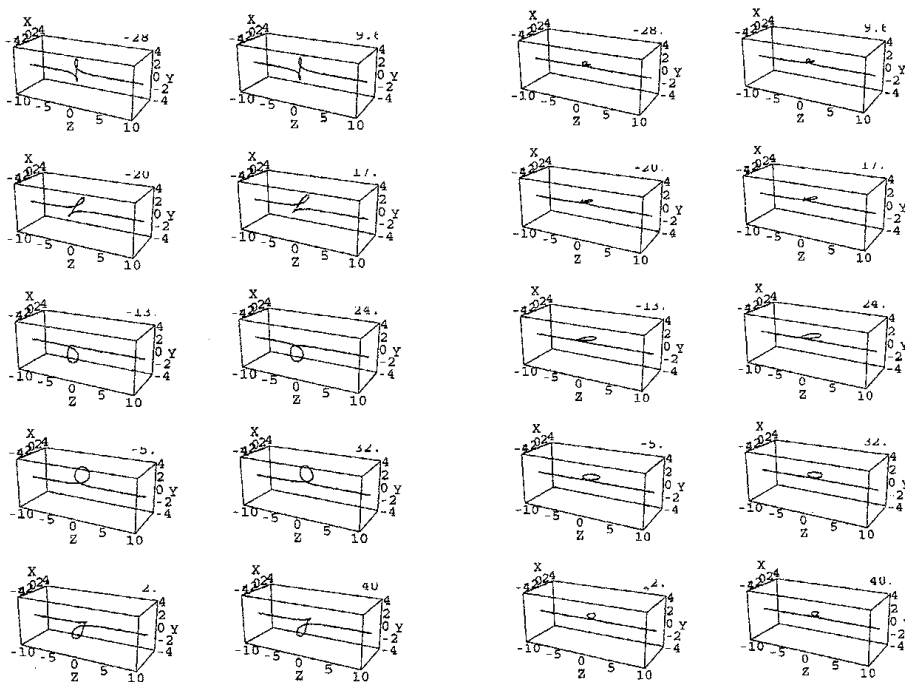


图 13: $v_1 = 0.0, \Omega = 0.5, v_2 = -0.0, \Omega = -0.5$

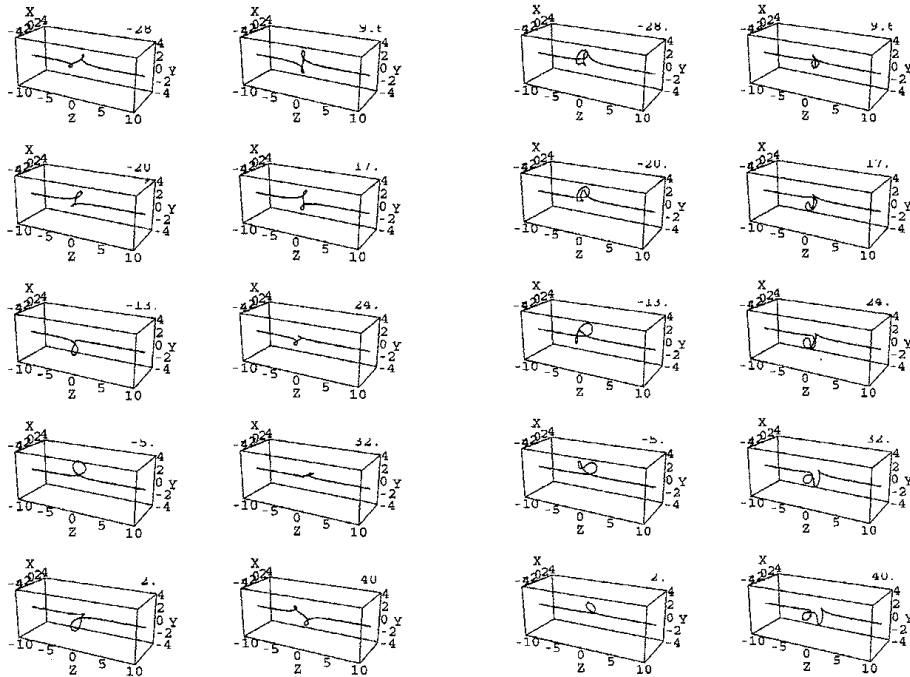


図 14: $v_1 = 0.05, \Omega = 0.5, v_2 = -0.05, \Omega = -0.5$

7 まとめ

以上、双対系のソリトン解を双対変換が角運動量保存則の Bäcklund 変換になっていることを利用して用いて導出した。双対変換は「相対角度」と「角運動量」を入れ替えたことに対応している。1ソリトン解については

- $\Omega = 0$ のとき、双対ソリトンはループであるが、有限の Ω に対してはループを形成しない。
- 特に、 $\Omega > \frac{1}{\sqrt{2(1-v)}}$ では渦糸のようなねじれたソリトンになる。

ことを示した。非分散連立方程式 (4) とその双対系 (10) の 2ソリトン相互作用を報告した。

- ソリトン相互作用は少なくとも小さな Ω に対しては元の系 (4) の相互作用に類似の振る舞いを示す。
- 大きな Ω に対しては両者の振る舞いは複雑である。
- ブリージング・モードとプリーザ的に振る舞う一時的な束縛状態（共鳴）が存在することを発見した。

以下に疑問点を二つあげる。

- この変換は連立非分散方程式に理解に役立つか？
- 双対系に対応する現実の物理系が存在するか？

前者に対する答えは部分的には Yes である。双対系 (10) ではソリトンが角運動量を持つにもかかわらず定常的に伝播するのでその相互作用は変換前の系よりおとなしい。従って相互作用を見るのは双対系の方がおおむね容易である。後者は依然として未解決である。

参考文献

- [1] K. Konno, *Applicable Analysis*, **57** (1995) 209.
- [2] H. Kakuata and K. Konno, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68** (1999) 757.
- [3] T. Alagesan and K. Porsezian, *Chaos, Solitons & Fractals* **7** (1996) 1209.
- [4] T. Alagesan and K. Porsezian, *Chaos, Solitons & Fractals* **8** (1997) 1645.
- [5] H. Kakuata and K. Konno, *Theor. Math. Phys.* **133** (2002) 1673.
- [6] K. Konno and A. Jeffrey, "The loop soliton" in *Advances in Nonlinear Waves Vol.1*, ed. L. Debnath (Pitman Advanced Publishing Program 1984).
- [7] M. Toda, *J. Phys. Soc. Jpn.* **20** (1965) 2095.
- [8] M. Toda, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **36** (1966) 113.
- [9] M. Toda, *J. Phys. Soc. Jpn.* **22** (1967) 431, **23** (1967) 501.