数理解析研究所講究録 1432 巻 2005 年 13-17

ツリー上の拡張型コンタクトプロセスの大域的臨界値と局所的臨界値について
(On global and local critical points of extended contact processes on homogeneous trees)

独立行政法人科学技術振興機構 ERATO 合原複雑数理モデルプロジェクト
杉峰 伸明 (Nobuaki Sugimine)
Aihara Complexity Modelling Project, ERATO, JST

HIV や SARS または結核等の感染拡大について, 集団による感染率の違いをもったモデルを用いて解析する. 集団の大きさの違いや集団内ネットワークの違い, 集団間ネットワークの異方性等他にも重要な要因があり, 現実的なモデルにするには複雑なモデルが必要である. 一方, モデルの単純化は数学的な取り扱い安さから要求される. ここでは, [5, 6] で提案されたふたつの household model を考える. これらのモデルは, 連続時間マルコフ過程として定式化される (現時刻 t での状態を指定すれば, それ以後の時間発展は過去に影響されない).

集団間ネットワークを, (頂点集合, 辺集合) なるペアであるグラフで表す. 頂点は集団と対応している. 頂点を x, y 等で表わし, それらの隣接関係を $\sim$ で表す. 各頂点は $\{0, \ldots, N\}$ の状態を取り得るが, 状態 i というのは集団内に感染者が i 人いることを表す. 各集団に N 人と, 集団の大きさは一定とする. 集団内では各々緊密であるとし, 各自の影響は全員におよぶとする.

状態 ξ の遷移, すなわち集団内の感染者数の変化は, 確率的で次のルールに従うものとする.

- モデル I

$$\begin{cases} 0 \to 1 & \text{遷移率 } \lambda \sum_{y \sim x} \xi(y), \\ i \to i+1 & \text{遷移率 } \phi_i \quad (1 \le i \le N-1), \\ i \to 0 & \text{遷移率 } \delta_i \quad (1 \le i \le N), \end{cases}$$
$$\phi_i > 0, \quad 1 = \delta_1 \ge \delta_2 \ge \cdots \ge \delta_N > 0.$$

感染者がいない集団では, 周りの集団の感染者数に比例した割合で感染者がひとり現れる. 比例係数 λ は感染率を表す. 感染者がひとりでも現れた集団では, 集団内の影響が外からの影響に比べ強く, 外からの影響は無視される. 感染者数は, 割合 ϕ_i でひとりづつ増える. 状態 i から 0 への変化は死もしくは隔離等によるネットワークからの集団の除外と, 新たな非感染者集団の誕生を表す. 状態 i から $i-1$ へと段階的に遷移するモデルでも, 以下で紹介する結果は成り立つ. 正方格子上では, 感染拡大するかどうかが $\{\phi_i\}$ に依存する λ の領域があることが, Schinazi 氏によって示されている [5].

- モデルII

$$\begin{cases} i \to i+1 & \text{遷移率 } \phi_i + \lambda \sum_{y \sim x} \mathbf{1}_{\{\xi(y)=N\}} \quad (0 \le i \le N-1), \\ i \to 0 & \text{遷移率 } \delta_i \quad (1 \le i \le N), \end{cases}$$

$$\phi_0 = 0, \quad \phi_i > 0\ (1 \le i \le N-1), \quad 1 = \delta_1 \ge \delta_2 \ge \cdots \ge \delta_N > 0.$$

集団全員が感染している場合にのみ他の集団に影響を及ぼす. 状態が N にならないと他に影響しないので, 飽和状態 N になると他の生息地に移動するような生態モデルや, 状態が個人の内部段階 (例えばウイルス量) を表しているとするほうが適当かもしれない.

モデルIで $\phi_1 = 0$ としたときと, モデルIIで各 i に対して形式的に $\phi_i = \infty$ として $\delta_N = 1$ としたときは, 感染率 λ のコンタクトプロセスと等価になる. コンタクトプロセスはHarris氏によって導入され [1], その遷移ルールは次で与えられる:

$$\begin{cases} 0 \to 1 & \text{遷移率 } \lambda, \\ 1 \to 0 & \text{遷移率 } 1. \end{cases}$$

モデルIで各 i に対して形式的に $\phi_i = \infty$ として $\delta_N = 1$ としたときは, 感染率 $N\lambda$ のコンタクトプロセスと等価になる.

これより, 臨界値・定理・証明の概略等を述べる. 表記の便宜上, 各 i に対して $\phi_i = i\phi$, $\delta_i = 1$ として, ふたつのモデルを同一の記号 ξ_t(正確には $\{\xi_t\}_{t\ge 0}$) で表す.

臨界値. 感染が拡大するような感染率 λ の下限である大域的臨界値 λ_g と, 同一集団が感染を何度も繰り返すような感染率 λ の下限である局所的臨界値 $\lambda_l(\lambda_g \le \lambda_l)$ を考える: e_0 を特別に決められた頂点とする. $A_t = \{x \in \mathbb{T}^d : \xi_t(x) \ne 0\}$ とし,

$$\mathcal{A}_g = \{\text{ 任意の } t > 0 \text{ に対して } A_t \ne \emptyset\},$$

$$\mathcal{A}_l = \{\text{ 任意の } T \text{ に対して, } e_0 \in A_t \text{なる } t \ge T \text{ が存在する }\}$$

とする. 明らかに $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}_g$ である. 任意に $\phi > 0$ を固定して,

$$\lambda_g = \inf\{\lambda : \mathbb{P}_\lambda^{e_0,N}(\mathcal{A}_g) > 0\}, \qquad \lambda_l = \inf\{\lambda : \mathbb{P}_\lambda^{e_0,N}(\mathcal{A}_l) > 0\}$$

とする. ただし, $\mathbb{P}_\lambda^{e_0,N}$ を初期条件 $\xi(e_0) = N$, $\xi(x) = 0\ (x \ne e_0)$ をもつ ξ_t の分布とする.

局所的臨界値は局所的に決まるが, 大域的臨界値は決まらない. $\lambda_g < \lambda < \lambda_l$ ならば, 感染者が出現しつづける場合であっても各々はある時刻以降には感染しない.

定理. [8] ツリー $\mathbb{T}^d$(各頂点が $(d+1)$ 本の枝をもちサイクルがない) 上の ξ_t を考える. 全ての $\phi > 0$ に対して, $0 < \lambda_g < \lambda_l < \infty$ である.

サイクルがないことは, 証明のひとつの鍵になっているが, 人のネットワークにはみられない性質である. しかし, 次の意味においてこの点を補うことができる. グラフ $G=(V,E)$ に対して, チージャー定数は

$$i_E(G)=\inf\left\{\frac{|\partial_E S|}{|S|}: S\subset V,\ 0<|S|<\infty\right\},$$

$$\partial_E S=\{\{x,y\}\in E: x\sim y \text{ をみたす } x\in S \text{ と } y\notin S \text{ が存在する }\}$$

で与えられる. 最大次数を $D(G)$ とし, 最小次数を $d(G)$ とする.

$$i_E(G)>\frac{D(G)^2}{\sqrt{D(G)^2+d(G)^2}} \tag{1}$$

をみたす無限グラフ G 上のコンタクトプロセスにおいては, $\lambda_g<\lambda_l$ となることが知られている [7]. 同様のことが, 十分大きな ϕ に対する ξ_t についても成り立つ. この議論では, サイクルの有無を考慮する必要はない. 大きな次数をもつ均質なツリーは条件 (1) をみたしていることも分かる. 従って, グラフをツリーに限定するのは, 技術的な必要性からであって本質的ではないと考えられる.

[3, 4] 等にみられるように, スケールフリー性をもつグラフ上のコンタクトプロセス等の平均場近似モデルでは, 大域的臨界値がゼロになる. このような場合には特に, $\lambda_l-\lambda_g$ の大きさを調べることは重要である.

定理の証明の概略を述べる. 細かい計算の違いを除いて, 証明は [2]pp.78–103 に沿って与えられる. 添え字を省略した記号 $\mathbb{P}^{e_0,N}$ を用いる. $\mathbb{P}^{x,\xi(x)}$ で, 初期条件 $\xi(y)=0$ $(y\neq x)$ をもつ ξ_t の分布を表し, $\mathbb{P}^{x,\xi(x)}$ による平均を $\mathbb{E}^{x,\xi(x)}$ で表す.

グラフ表現. 初期条件 ξ をもつ ξ_t の分布 $\mathbb{P}^\xi$ を構成する方法にグラフ表現がある [2]. ここでは, モデル II を対象にして説明する. 各頂点 x に独立なポアソン過程 $\{D^x; I^{x,i}, 1\le i\le N-1; E^{xy}, y\sim x\}$ をおく. ただし, D^x は割合 1 の, 各 i に対して $I^{x,i}$ は割合 $i\phi$ の, 各 y に対して E^{xy} は割合 λ のポアソン過程である. これらは, 以下の事象が起こる時刻を知らせる鐘の役割をもつ. D^x が鳴った時刻 t において, $\xi_t(x)=0$ となる. $I^{x,i}$ が鳴った時刻 t において, $\xi_{t-}(x)=i$ ならば $\xi_t(x)=i+1$ となる. E^{xy} が鳴った時刻 t において, $\xi_{t-}(x)=N$, $\xi_{t-}(y)=k$ ならば $\xi_t(x)=N$, $\xi_t(y)=\min\{k+1,N\}$ となる. $(x,t)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}$ に, D^x が鳴れば recovery symbol を, E^{xy} が鳴れば x から y への infection arrow をおく.

時間列 $\{t_i\}_{i=0}^{n+1}$ を, $t_0=s$, $t_{n+1}=s'$ であって, 各 i に対して $t_i<t_{i+1}$ となるようにとる. 時間と頂点が交互に現れる列 $(t_0,x_0,t_1,x_1,\ldots,t_n,x_n,t_{n+1})$ が以下の条件をみたすとき, この列を (x_0,s) から (x_n,s') への (ξ_t における)active path と呼ぶ:

(i) 全ての i に対して, $\{x_i\}\times[t_i,t_{i+1}]$ 内に recovery symbol が現れない.

(ii) 全ての i に対して, 時刻 t_i に x_{i-1} から x_i への infection arrow が現れる.

(iii) 全ての i に対して, $\xi_{t_i-}(x_{i-1})=N$ である.

このとき,

$$\{y \in \mathbb{T}^d : \xi(x) \neq 0 \text{ なる } x \text{ に対して}, (x,0) \text{ から } (y,t) \text{ への active path がある }\}$$

は $\mathbb{P}^\xi$ の下での A_t と同じ分布をもつ. グラフ表現より, ξ, λ, ϕ に対する単調性や

$$\mathbb{P}^\xi(y \in A_t) \leq \sum_{x:\xi(x)\neq 0} \mathbb{P}^{x,\xi(x)}(y \in A_t) \tag{2}$$

が分かる.

レベル関数. 関数 $l : \mathbb{T}^d \to \mathbb{Z}$ を次のように帰納的に定める: $l(e_0) = 0$ とする. $l(x)$ が与えられたとき, x の近傍のひとつの頂点 y に対しては $l(y) = l(x) - 1$ とし, 残りの頂点 $\{y_i\}_{i=1}^d$ に対しては $l(y_i) = l(x) + 1$ となるようにする. 頂点集合 $\{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ を, 各 i に対して $l(e_i) = i$, $e_i \sim e_{i-1}$ をみたすようにとっておく.

$A \subset \mathbb{T}^d$ と $\rho > 0$ に対して,

$$w_\rho(A) = \sum_{x\in A} \rho^{l(x)}$$

とする. マルコフ性と単調性と (2) より $\log \mathbb{E}_\lambda^{e_0,N} w_\rho(A_t)$ が劣加法的なので, 極限

$$f(\rho) = f_\lambda(\rho) = f(\lambda,\rho) = \lim_{t\to\infty} \left(\mathbb{E}_\lambda^{e_0,N}\left[w_\rho(A_t)\right]\right)^{1/t}$$

が存在する. この極限 f は次の性質を持っていることが分かる:

(f1) f は (λ, ρ) に対して連続である.

(f2) $f_{\lambda_g}(1) = 1$ である. 特に, $\lambda = \lambda_g$ では $\mathcal{A}_g$ は起こらない.

(f3) λ では $\mathcal{A}_l$ が起こらないとする. このとき, $1/\sqrt{d} \leq \rho_1 < \rho_2$ であって $f_\lambda(\rho_2) \geq 1$ ならば, $f(\rho_1) < f(\rho_2)$ である.

(f4) ある $\rho > 0$ に対して $f_\lambda(\rho) < 1$ ならば, λ では $\mathcal{A}_l$ は起こらない.

証明 ($\lambda_g < \lambda_l$). $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}_g$ なので (f2) と (f3) より, 全ての $1/\sqrt{d} \leq \rho < 1$ に対して $f_{\lambda_g}(\rho) < 1$ となる. そのような ρ をとると, (f1) より $f_\lambda(\rho) < 1$ となる $\lambda > \lambda_g$ がとれる. この λ に対しては, (f4) より $\mathcal{A}_l$ が起こらないので, $\lambda_g < \lambda \leq \lambda_l$ を得る.

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする. 各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$u(n) = \mathbb{P}^{e_0,1}(e_n \in A_t \text{なる時刻 } t \geq 0 \text{ が存在する})$$

とすると, 強マルコフ性と単調性より $\log u(n)$ は優加法的になる. 従って, 極限

$$\beta(\lambda) = \lim_{n\to\infty} u(n)^{1/n}$$

が存在するが, この極限 β は次の性質を持っていることが分かる:

($\beta 1$) 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $u(n) \le \beta(\lambda)^n$.

($\beta 2$) $\beta(\lambda) > 1/\sqrt{d}$ ならば, $\inf_{t>0} \mathbb{P}_\lambda^{e_0,1}(e_0 \in A_t) > 0$.

<u>**証明** ($\lambda_l < \infty$).</u> 各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して,

$$v(n) = \mathbb{P}^{e_0,N}(e_n \in A_t\text{なる時刻}\, t \ge 0\,\text{が存在する})$$

とすると, $v(n) = \mathbb{P}^{e_n,N}(e_0 \in A_t$なる時刻 $t \ge 0$ が存在する) と強マルコフ性より

$$\bigl(1 + (d+1)\lambda\bigr)v(n+1) \ge \lambda \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{N-1} v(n) + d\lambda v(n+1). \tag{3}$$

さらに強マルコフ性より, 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $v(n)\kappa = u(n)$ をみたす $\kappa = \kappa(\phi) > 0$ がとれるので,

$$\lim_{n\to\infty} v(n)^{1/n} = \beta(\lambda). \tag{4}$$

定義より $v(0) = 1$ となるので, (3) と (4) と合わせて,

$$\beta(\lambda) \ge \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^N. \tag{5}$$

しかるに, 単調性より

$$\mathbb{P}^{e_0,N}(\mathcal{A}_l) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{P}^{e_0,N}(\cup_{t\ge T}\{e_0 \in A_t\}) \ge \inf_{t>0} \mathbb{P}_\lambda^{e_0,1}(e_0 \in A_t)$$

となるので, ($\beta 2$) と合わせて, $\lambda < \lambda_l$ ならば $\beta(\lambda) \le 1/\sqrt{d}$ である. これより, $\lambda_l = \infty$ とすると (5) に矛盾するので, $\lambda_l < \infty$ を得る.

参考文献

[1] T.E. Harris, Ann. Probab. 2 (1974) 969-988.

[2] T.M. Liggett, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999.

[3] J. Liu, J. Wu, Z.R. Yang, Physica A 341 (2004) 273-280.

[4] R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 3200-3203.

[5] R. Schinazi, Theoretical Population Biology 61 (2002) 163-169.

[6] R. Schinazi, Ann. Appl. Probab. in press.

[7] R.H. Schonmann, Commun. Math. Phys. 219 (2001) 271-322.

[8] N. Sugimine, N. Masuda, N. Konno, K. Aihara, On global and local critical points of extended contact processes on the homogeneous tree