

# 高階線型常微分方程式の変形における virtual turning point の役割について

京都大学数理解析研究所 佐々木俊介 (Shunsuke SASAKI)

RIMS, Kyoto University

## 1 序文

本論文では、Painlevé hierarchy の一種である野海-山田方程式系の Stokes geometry の研究を通じて、高階線型常微分方程式の完全 WKB 解析における virtual turning point の重要性を具体的に示すことを目的とする。

野海-山田方程式系の WKB 解析に関しては、[T]において、turning point の近傍でその Stokes geometry が付随する線型方程式系 (Lax pair と呼ばれる) の Stokes geometry と密接に関係していることが示された。本論文ではそれをうけて、野海-山田方程式系の中でも特に  $P_{IV}$ -hierarchy と考えられる系列の 1 番目および 2 番目の方程式について、それに付随する Lax pair の Stokes geometry を計算機を用いてより大域的に調べる。

この問題は、 $P_I$  および  $P_{II}$ -hierarchy に対しては、すでに [N][KKNT1][KKNT2] において詳しい解析がなされている。野海-山田方程式系とこれらの  $P_I, P_{II}$ -hierarchy との大きな違いは、付随する Lax pair のサイズが 3 以上であるという点である。高階線型方程式においては、通常の Stokes curve 上以外の点で Stokes 現象が起き ([N] において発見された西川現象はその非線型版である)、その Stokes geometry の大域的な構造を記述するためには new Stokes curve や virtual turning point を導入しなければならないことが知られている ([AKT1], 本論文の §2 も参照)。本論文では、これらの概念が線型方程式系の変形や、その両立条件として現れる (高階) Painlevé 方程式の解析にどのように関わってくるかということを中心に、議論を行っていく。



すなわち

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} - \eta A, \frac{\partial}{\partial t} - \eta B \right] = 0 \quad (7)$$

で定まる  $t$  に関する微分方程式が  $(NY)_{2m}$  (と同値) になるのである.

*Remark.*  $m = 1$  の場合, すなわち  $(NY)_2$  は Painlevé 第 4 方程式  $P_{IV}$  と同値であり,  $P_{IV}$  の対称形式として知られている.

最初に  $(NY)_{2m}$  の零パラメータ解, すなわち次のような  $\eta^{-1}$  に関する形式冪級数解を構成する:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= {}^t(\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{2m}), \\ \hat{u}_j &= \hat{u}_j(t, \eta) = \hat{u}_{j,0}(t) + \eta^{-1}\hat{u}_{j,1}(t) + \dots \quad (j = 0, 1, \dots, 2m). \end{aligned} \quad (8)$$

ここで  $\eta^{-1}$  に関する top term  $\hat{u}^{(0)}(t) = {}^t(\hat{u}_{0,0}, \hat{u}_{1,0}, \dots, \hat{u}_{2m,0})$  は代数方程式

$$V_j(u_0, \dots, u_{2m}) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, 2m), \quad u_0 + \dots + u_{2m} = t, \quad (9)$$

ただし

$$V_j = u_j(u_{j+1} - u_{j+2} + \dots - u_{j+2m}) + \alpha_j \quad (j = 0, 1, \dots, 2m) \quad (10)$$

を解いて得られる  $t$  の多価関数であり,  $\hat{u}_{j,k}(t)$ ,  $0 \leq j \leq 2m$ ,  $k = 1, 2, \dots$  は帰納的に,  $\hat{u}^{(0)}(t)$  の Riemann 面上一意に定まる  $(\hat{u}^{(0)}(t))$  の Riemann 面については Appendix 参照).

以下,  $(L)_{2m}$  および  $(D)_{2m}$  の係数には  $(NY)_{2m}$  の零パラメータ解  $\hat{u}$  を代入し,

$$\begin{aligned} A &= A(x, t, \eta) = A_0(x, t) + \eta^{-1}A_1(x, t) + \dots \\ B &= B(x, t, \eta) = B_0(x, t) + \eta^{-1}B_1(x, t) + \dots \end{aligned}$$

のように展開しておく.

さて, 計算機を用いて  $(L)_2$  ( $m = 1$ ) の Stokes curve を描くと, Fig. 1.1(1),(2) のような configuration が観察される. これらの図は,  $(NY)_2$  のある 1 本の Stokes curve  $\Gamma$  上の異なる 2 点における  $(L)_2$  の Stokes curve の configuration である.

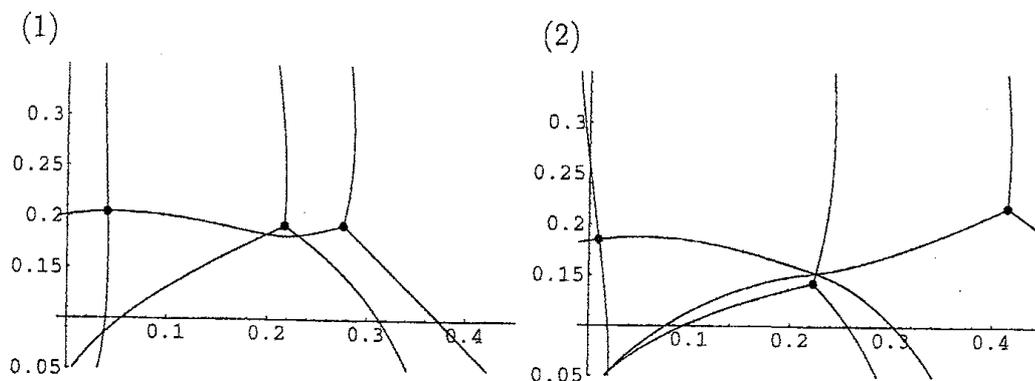


Figure 1.1.

$\Gamma$  の始点である turning point  $\tau$  により近い方の点では Fig. 1.1(1) が得られ, [T] で示されているように, 通常の Painlevé 方程式 (cf. [KT]) と同様, double turning point と simple turning point が Stokes curve で結ばれている. ところが, 同じ Stokes curve  $\Gamma$  上でありながら  $\tau$  からより遠い方の点での  $(L)_2$  の Stokes curve の configuration は Fig. 1.1(2) のようになっており, turning point が Stokes curve で結ばれるという意味の退化は観察されない.

(高階) Painlevé 方程式に対する Stokes 現象の反映として, その Stokes curve の上では付随する線型方程式系の Stokes geometry に退化が起こるだろうという一般的な期待を思い起こせば, これは一見矛盾が生じているように見える. この“矛盾”を, virtual turning point や new Stokes curve という概念を用いてうまく説明することが, 本論文の主要な目標である.

本論文の構成は次の通りである.

まず §2 において, いくつかの準備を行う. §2.1 で以下で必要となる, 高階方程式特有の概念である virtual turning point や new Stokes curve について, 定義と簡単な性質を述べた後, §2.2 では [T] に従って, 野海 - 山田方程式系の WKB 解析に関する諸定義や局所理論について復習し, 以下の議論のための設定を行う.

§3 以降が本論である. §3 で “Stokes geometry の切り替え” の最も単純な場合を説明し, それを用いて §4 で  $(NY)_2$  の Stokes curve 上での Lax pair  $(L)_2$  の Stokes geometry を調べる. いくつかの切り替えの様子を調べることにより, virtual turning point および new Stokes curve を導入することによって変化が自然に説明される様子を観察する. さらに §5 では,  $m = 2$  の場合の Lax pair の Stokes geometry につい

て述べ、より複雑な, virtual turning point の必要性や役割がより明確になる例を紹介する. その後 §6 でそれらの変化を積分関係式を通した定量的な視点から見直し, 最後に §7 でまとめを行う.

この論文を書くにあたり, 丁寧にご指導下さった河合隆裕先生, 竹井義次先生に心からの感謝を捧げたい.

## 2 準備

### 2.1 Virtual turning point と new Stokes curve

ここでは [AKKSST] に従い, 以下で必要となる高階方程式特有の概念について, 定義といくつかの性質を簡単に復習しておく. ただし, [AKKSST] では単独高階の方程式を扱っているのに対し, 本論文では 1 階の system

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\psi &= \eta A\psi, \quad \psi: m \text{ 次元ベクトル}, \\ A = A(x, \eta) &= A_0(x) + \eta^{-1}A_1(x) + \cdots: m \times m \text{ 行列} \end{aligned} \quad (11)$$

の形の方程式を扱うので, ここではそれに合わせた形で定義を行う.

$p(x, \xi) = \det(\xi - A_0(x))$  とおき,  $\xi$  に関する方程式  $p(x, \xi) = 0$  を (11) の特性方程式と呼ぶ.  $\xi_j = \xi_j(t)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) を特性方程式  $p(x, \xi) = 0$  の根とする. まず次の定義から始める:

定義 2.1. (i) 特性方程式  $p(x, \xi) = 0$  が重根を持つ点  $x = a$  を, 方程式 (11) の turning point という. 特に,  $a$  が特性方程式の判別式の 1 位の零点であるとき simple turning point, 2 位の零点であるとき double turning point と呼ぶ. また,  $\xi_j(a) = \xi_k(a)$  となる turning point を type  $(j, k)$  の turning point と呼ぶ.

(ii)  $x = a$  を type  $(j, k)$  の turning point とするとき,

$$\operatorname{Im}(\xi_j - \xi_k)dx = 0 \quad (12)$$

の解曲線で  $x = a$  から出るものを, (type  $(j, k)$  の) Stokes curve という. より詳しく, その曲線上  $\operatorname{Re} \int_a^x (\xi_j - \xi_k)dx > 0$  ( $\operatorname{Re} \int_a^x (\xi_j - \xi_k)dx < 0$ ) であるとき, type  $j > k$  (type  $j < k$ ) の Stokes curve という.

高階方程式 (あるいはサイズが3以上の system) においては, Stokes curve どうしが交わることがしばしば起こる. このとき, Stokes curve の type によって様子が異なってくる. 交わる2本の Stokes curve の type が  $j < k, k < l$  のようになっているとき, その交点を ordered crossing point といい, そうでないとき non-ordered crossing point という.

Ordered crossing point の近傍では, 元々の Stokes curve 上の点以外にも, Stokes 現象を起こす点が存在する. それらは交点から片側にのびる曲線をなすことがわかる. 一方, non-ordered crossing point の近傍ではそのようなことは起こらない.

[AKT1] で論じられたように, この曲線は実は, 次のように定義される virtual turning point を始点とする Stokes curve である.

$\tilde{p}(x, \xi, \eta) = \eta^m p(x, \xi/\eta) = \det(\xi - \eta A_0(x))$  とおき, Hamilton 系

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \eta} \\ \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \\ \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \\ \tilde{p}(x(t), \xi(t), \eta(t)) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

の解として得られる  $T^*\mathbb{C}_{(x,y)}^2$  内の曲線を bicharacteristic strip, その  $\mathbb{C}_{(x,y)}^2$  への射影を bicharacteristic curve という.

この観点から見れば, 通常の turning point は bicharacteristic curve の cuspidal singularity (の  $x$ -成分) に当たる. そこで, それ以外の特異点である bicharacteristic curve の self-intersection point を, virtual turning point と定義する. また, virtual turning point から出る Stokes curve を, (特に区別する場合には) new Stokes curve と呼ぶ.

New Stokes curve 上では必ずしも Stokes 現象が起こるわけではない. Stokes 現象が起こる部分を実線, 起こらない部分を点線で表せば, 実線・点線の区別は次の規則によって定められる:

1. virtual turning point の近傍では点線とする.
2. type  $j < l$  の点線の new Stokes curve が type  $j < k, k < l$  の Stokes curve が交わる ordered crossing point を通るときは, 通過後を実線とする.

3. 点線の new Stokes curve が non-ordered crossing point を通るときは, 点線のままとする.

実線になった new Stokes curve が再び別の交点を通る場合は, 複雑になるのでここでは述べない (cf. [AKT1], [AKoT]). 2. で実線になった部分が, 上で述べた ordinary Stokes curve 上以外で Stokes 現象が起こる点のなす曲線に他ならないのである.

上の定義は非常に一般的であるが, (13)の解曲線の self-intersection point を求めることは一般に極めて難しく, 計算機を用いて計算を行う際には実用的でない. それゆえ実際には以下のように各 Stokes curve の交点に対して virtual turning point を計算する方法を用いる (詳しくは [AKKSST] 参照).

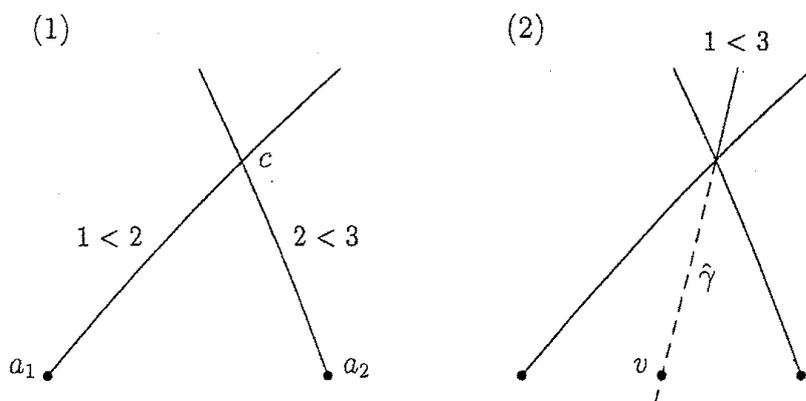


Figure 2.1.

Fig. 2.1(1) のような type をもつ, 2つの turning point  $a_1, a_2$  から出る Stokes curve が交わっている場合を考える. この場合交点  $c$  は ordered crossing point である. Bicharacteristic curve の具体的な表示を用いることにより,

$$\int_{a_1}^v \xi_1 dx = \int_{a_1}^{a_2} \xi_2 dx + \int_{a_2}^v \xi_3 dx \quad (14)$$

を満たす  $v$  を求めればよいことがわかる. これは  $c$  を用いて

$$\int_v^c (\xi_3 - \xi_1) dx = \int_{a_1}^c (\xi_2 - \xi_1) dx + \int_{a_2}^c (\xi_3 - \xi_2) dx \quad (15)$$

と書き換えられることに注意しておく.

1. まず,  $c$  を通り type (1, 3) の, すなわち

$$\operatorname{Im} \int_c^x (\xi_3 - \xi_1) dx = 0$$

で定義される Stokes curve  $\hat{\gamma}$  を描く.

2. 次に, 1. で描いた  $\hat{\gamma}$  上で積分

$$\varrho(x) := - \int_c^x (\xi_3 - \xi_1) dx$$

を考える. これは  $\hat{\gamma}$  上実数値かつ単調である. したがって, 一般に

$$\varrho(x_0) = \int_{a_1}^c (\xi_2 - \xi_1) dx + \int_{a_2}^c (\xi_3 - \xi_2) dx$$

となる点  $x_0$  を見つけることができる (Stokes curve の定義より右辺は実数であることに注意). (15) よりこの  $x_0$  が求めたい virtual turning point  $v$  (の 1 つ) であることがわかる.

Non-ordered crossing point の場合も同様に求められる. あとは上述の規則にしたがって実線・点線の区別を定めればよい. この場合であれば Fig. 2.1(2) のようなる.

## 2.2 野海 - 山田方程式系の WKB 解析

[T] では野海 - 山田方程式系  $(NY)_l$  の完全 WKB 解析に関する一般論が展開されている. ここではその内容を,  $l = 2m$  すなわち本論文で扱う場合に限定して, 以下の議論で必要となる部分を中心に簡単にまとめておく.

まず,  $u = \hat{u}$  における  $(NY)_{2m}$  の線型化方程式, すなわち  $u_j = \hat{u}_j + \Delta u_j$  を  $(NY)_{2m}$  に代入し,  $\{\Delta u_j\}$  に関する 1 次 の項をとった方程式を考える. この線型方程式系を  $(\Delta NY)_{2m}$  で表し, その係数行列を  $C = C(t, \eta)$  とする:

$$\frac{d}{dt} \Delta u = \eta C \Delta u, \quad C(t, \eta) = C_0(t) + \eta^{-1} C_1(t) + \dots \quad (16)$$

非線型方程式  $(NY)_2$  の turning point および Stokes curve を, 線型化方程式  $(\Delta NY)_{2m}$  の turning point および Stokes curve として定義する.

$A, B, C$  の  $\eta^{-1}$  に関する top degree part  $A_0, B_0, C_0$  に関して, 以下の命題が成り立つ.

命題 2.1.

$D_{A_0}, D_{B_0}$  をそれぞれ特性方程式  $\det(\lambda - A_0(x, t)) = 0, \det(\mu - B_0(x, t)) = 0$  の判別式とし,  $B_0(x, t)$  の固有値  $\{\mu_n\}$  に対して  $D(x, t) = \prod_{1 \leq n < n' \leq 2m+1} (\mu_n + \mu_{n'})$  とおく. このとき  $D(x, t)$  は  $x$  の  $m$  次多項式であり, 次の関係式が成り立つ:

$$D_{A_0}(x, t) = x^{-2m(2m+1)} D(x, t)^2 D_{B_0}(x, t) \quad (17)$$

従って, generic には  $D(x, t)$  の零点が(3)の double turning point を,  $D_{B_0}(x, t)$  の零点(すなわち(4)の turning point) が(3)の simple turning point を与える.

命題 2.2.

特性根  $\lambda_n(x, t), \mu_n(x, t)$  に適当に番号を付ければ, 1-form  $\omega_n = \lambda_n dx + \mu_n dt$  は closed, すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_n = \frac{\partial}{\partial x} \mu_n \quad (18)$$

が成り立つ.

命題 2.3.

$g_{\text{odd}}(\mu, t) = (\det(\mu - B_0(x, t)) - \det(-\mu - B_0(x, t)))/2$  を  $B_0$  の特性方程式の odd degree part とするとき,

$$\det(\nu - C_0(t)) = 2^{2m+1} g_{\text{odd}}(\mu, t)|_{\mu=\nu/2} \quad (19)$$

が成り立つ. 特に, ある  $z$  の  $m$  次多項式  $f(z, t)$  を用いて  $\det(\nu - C_0(t)) = \nu f(\nu^2, t)$  と書ける.

命題 2.3 より,  $(NY)_{2m}$  の turning point には 2 種類あることがわかる. すなわち 1 つは  $f(0, t)$  の零点, もう 1 つは  $f(z, t)$  の  $z$  に関する判別式の零点である. 前者を第 1 種 turning point, 後者を第 2 種 turning point という. 特に,  $m = 1$  の場合には turning point はすべて第 1 種である. ただし本論文では第 2 種 turning point は扱わないので, 誤解の恐れがなければ第 1 種 turning point を単に turning point という.

第 1 種 turning point に関して次の定理が成り立つ.

定理 2.4. ([T, Theorem 2.1.])

$t = t_0$  を  $(NY)_{2m}$  の第 1 種 turning point とする.

(i)  $t = t_0$  において,  $(L)_{2m}$  のある double turning point  $d(t)$  とある simple turning point  $s(t)$  が合流する. さらに,  $x = s(t)$  で重なる  $A_0(x, t)$  の固有値は  $x = d(t)$  でも重なる.

(ii)  $\lambda_+$  および  $\lambda_-$  を  $x = s(t), d(t)$  で重なる  $A_0(t)$  の固有値とし,  $\nu_+$  および  $\nu_-$  を  $C_0(t)$  の固有値で  $\nu_+(t_0) = \nu_-(t_0) = 0, \nu_- = -\nu_+$  を満たすものとする. このとき ( $t_0$  のある近傍において)

$$\int_{d(t)}^{s(t)} (\lambda_+ - \lambda_-) dx = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (\nu_+ - \nu_-) dt \quad (20)$$

が成り立つ. 特に,  $t$  が  $t = t_0$  から出る  $(NY)_{2m}$  の Stokes curve 上の点であって  $t_0$  に十分近いならば, double turning point  $x = d(t)$  と simple turning point  $x = s(t)$  が  $(L)_{2m}$  の Stokes curve で結ばれる.

第 2 種 turning point に関しても同様の定理が成り立つが, ここでは省略する.

### 3 Stokes geometry の切り替え

パラメータ  $t$  を変化させて  $(L)_2$  の Stokes geometry を追跡していくと, しばしば simple turning point が別の turning point から出た Stokes curve を横切るという現象が起こる. これは [N][KKNT1][KKNT2] で議論された  $P_I, P_{II}$ -hierarchy の場合には見られなかった. なぜならこれらの hierarchy に付随する Lax pair のサイズは 2 であり, Stokes curve を定めるベクトル場は 1 種類しかないからである.

こうした “simple turning point が別の turning point から出た Stokes curve を横切る” という現象は, 高階線型方程式 (あるいはサイズが 3 以上の system) の変形, すなわちパラメータ依存性を論じる際には頻繁に観察される. さらに, 数理物理における quantized Hénon map の問題においても, 同様の現象が起こることが知られている ([SI]).

そこで本節では, この現象のうち基本的と考えられる場合を, 高階方程式の変形という一般的な枠組みのなかで考察し, その後次節において, 序文で見た  $(L)_2$  の Stokes geometry の解釈を行う. これらの現象のうちのいくつかは [AKSST] でも紹介されている.

以下, 次のような状況を考える (Fig. 3.1):

- (C): simple turning point  $s$  から出る 1 本の Stokes curve が, 別の turning point  $a$  から出る Stokes curve  $\gamma$  と交わっていて,  $s$  が  $\gamma$  に近づいていく.  
ある点  $t = t_c$  において  $s$  が  $\gamma$  上に入り, それを過ぎた後は  $s$  から出る 2 本の Stokes curve が  $\gamma$  と交わる configuration になる.

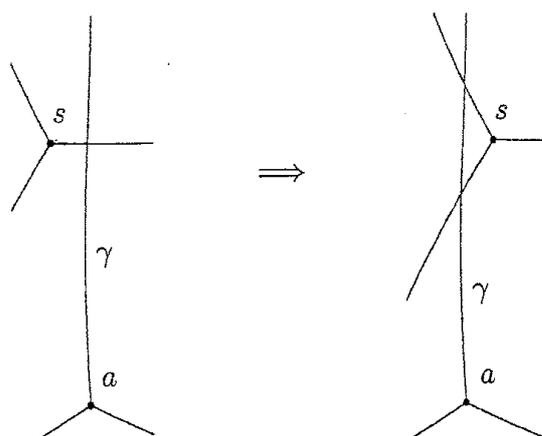


Figure 3.1.

最初 2 本の Stokes curve が  $\gamma$  と交わっていて, 通過後 1 本になる場合は,  $\gamma$  を逆向きに横切ったと考える. このとき現象 (C) は,  $s$  および  $\gamma$  の type によって 3 通りの場合に分けられる:

- (i) **ordered 型**. 横切る前の交点  $s$  が ordered crossing point.
- (ii) **non-ordered 型**.  $s$  と  $\gamma$  の type に共通する番号があるが, 横切る前の交点は non-ordered crossing point.
- (iii) **disjoint 型**.  $s$  と  $\gamma$  の type に共通する番号がない. これは 4 階以上の方程式に対してのみ起こりうる.

このうち (iii) の場合は,  $\gamma$  を定める vector field が  $s$  で非特異であるため, 特に変ったことは起こらないと考えられるので, 以下の議論では除外する. なお, 以下特に断らない限り, 図は  $x$ -plane (線型方程式) の Stokes 図形を表し,  $t$ -plane (非線型方程式) の図に対してはその都度明示する.

## 3.1 Ordered 型の場合

[AKSST] で述べられている場合がこれに相当する. この場合, 通過前の Stokes curve の type は Fig. 3.2(1) のようになっているとしてよい. 不等号の向きがすべて逆の場合も同様である. また,  $\lambda_j$  の branch を定めるための cut を図のように入れておく.

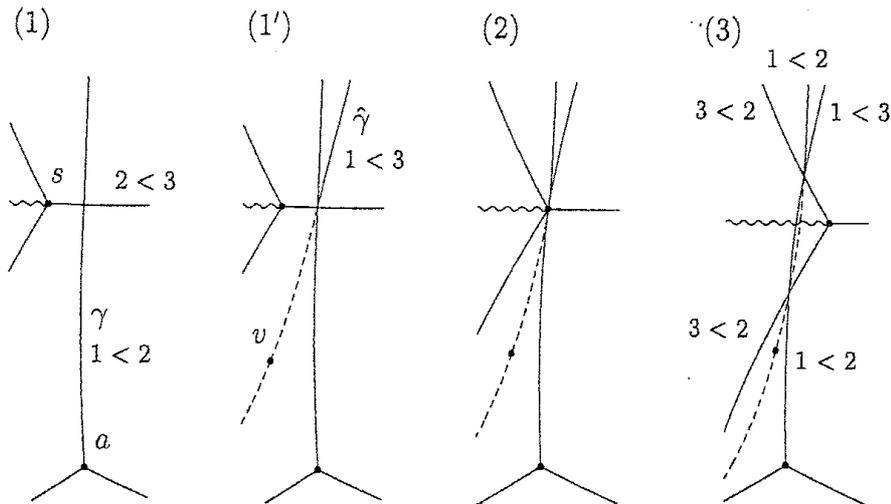


Figure 3.2.

この図に virtual turning point  $v$  および new Stokes curve  $\hat{\gamma}$  を書き加えると Fig. 3.2.(1') のようになる (cf. [AKKST]).

$s$  が  $\gamma$  にぶつかると, Fig. 3.2(2) の configuration になる. このとき  $\gamma$  と  $\hat{\gamma}$  は 3/2 次の接触をしている ([AKSST]).

通過後の configuration は Fig. 3.2(3) のようになる. この図では ordinary turning point  $a$  から出た Stokes curve  $\gamma$  が図の上方で右側に, virtual turning point  $v$  から出た  $\hat{\gamma}$  が左側にのびていることがわかる. 図 1 では右側が new Stokes curve, 左側が ordinary Stokes curve であった. すなわち ordinary Stokes curve と new Stokes curve の役割が入れ替わっていることがわかる.

ここで, Stokes curve  $\gamma$  が cut を越え, それにより type が変化していることに注意しておく. すなわち cut より下方では type  $1 < 2$  であったのが, 上方では type  $1 < 3$  となっている.  $\hat{\gamma}$  についても同様である. ところが, 図の上方での configuration に注目してみると, それら 2 本のうち左側が type  $1 < 2$ , 右側が type  $1 < 3$  という点は変わっておらず, この切り替えは十分遠方 (この図で言えば上方) での configuration

には影響を与えていないと考えられる。なお、通過後交点が2つできるが、それら2つの交点から定まる new Stokes curve および virtual turning point は (generic には) 一致することが示される ([AKKST]).

*Remark.* 図2では  $s$  から左側に cut を入れたが、他の入れ方をしても同様である。例えば  $s$  から右上に cut を入れると, type は Fig. 3.3 のようになる。この場合, 通過前に  $\gamma$  が cut を越え, 上方での type が変わることになるが, 上と同様, 通過の前後で十分遠方での type は変化していない。この事実を踏まえて, 今後必要に応じてこのような cut の入れ方も用いることがある。

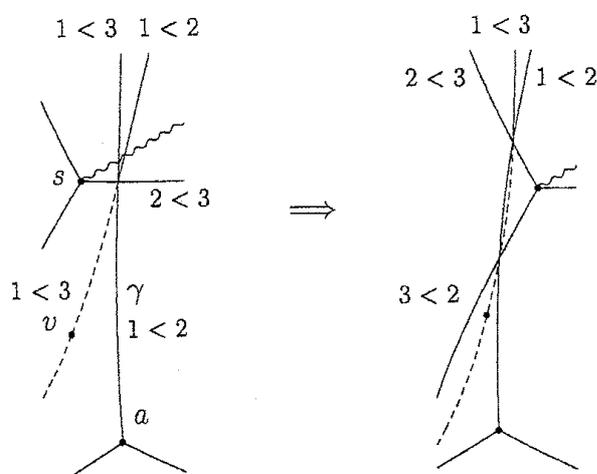


Figure 3.3.

### 3.2 Non-ordered 型の場合

通過前の交点が non-ordered の場合, type は Fig. 3.4(1) のように定められる。この場合の new Stokes curve は Fig. 3.4(1') のように交点を通っており, 交点の前後でいずれも点線である。

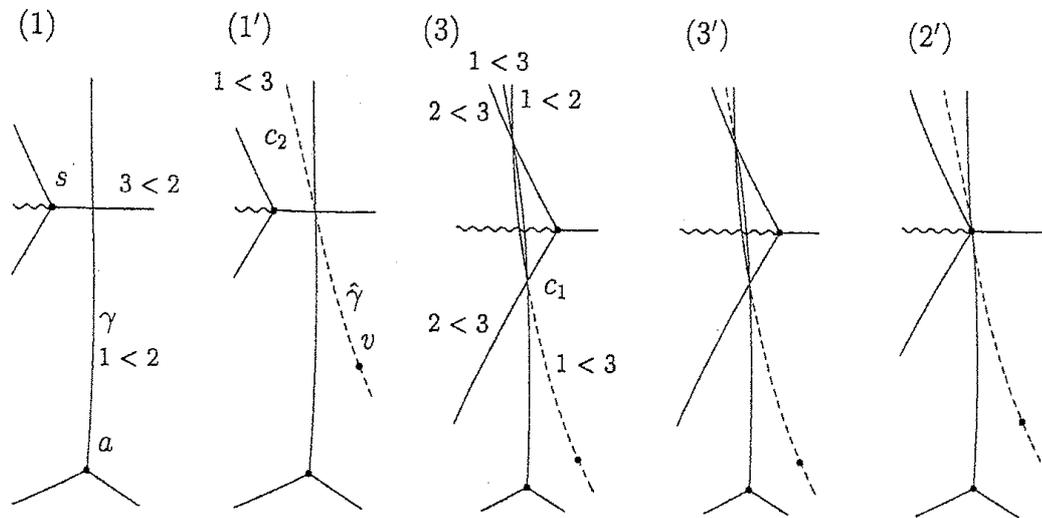


Figure 3.4.

この場合、通過後の configuration は Fig. 3.4(3) のようになる ([AKKST]). (i) の場合と同様、図の上方で ordinary Stokes curve と new Stokes curve の役割は入れ替わったが、左側が type  $1 < 3$ 、右側が type  $1 < 2$  という点は変わっていない。しかし、この2つの図において type  $1 < 3$  の Stokes curve の実線点線の区別が変化していることに気づく。ところが、[AKT2][AKoT] と同様の議論を用いた次の命題により、 $\gamma$  の  $c_2$  より上方の部分は点線になっている (Stokes 現象を起こさない) ことがわかる (Fig. 3.4(3')).  $s$  が  $\gamma$  にぶつかったところも同様である (Fig. 3.4(2')).

### 命題 3.1.

高階でも本質的には3階の場合と同じであるので、簡単のため3階として述べる。

Fig. 3.5 のように type  $1 < 2$ ,  $2 < 3$ ,  $3 < 2$  の Stokes curve および type  $1 < 3$  の new Stokes curve が交わっているとす。さらに、各 Stokes curve の type およびその上での (turning point から見て正の向きに回ったときの) Stokes 係数が Fig 3.5 の

ように表されているとする. すなわち

$$\begin{aligned}
 K_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & i \\ & & 1 \end{pmatrix}, \\
 K_{12} &= \begin{pmatrix} 1 & \beta & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \\
 K_{13} &= \begin{pmatrix} 1 & \kappa & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \\
 K_{32} &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & i & 1 \end{pmatrix}, \\
 \tilde{K}_{12} &= \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\beta} & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

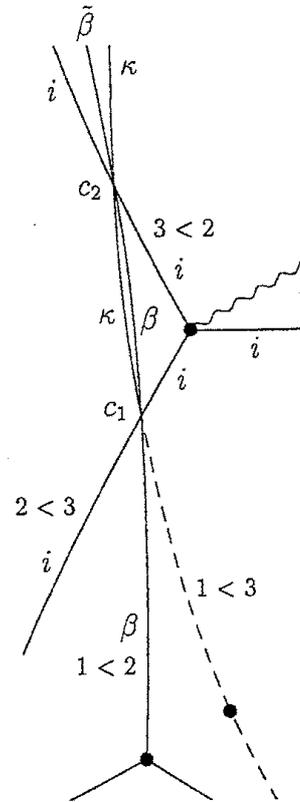


Figure 3.5.

とおいたとき, WKB 解の基本系  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  の Borel 和が type  $(j < k)$  ( $(j, k) = (2, 3), (3, 2), (1, 3)$ ) の Stokes curve を越えるとき

$$\Psi \implies \Psi K_{jk}$$

のように, また type  $(1 < 2)$  の Stokes curve を越えるとき交点  $c_2$  の下側では  $\Psi \implies \Psi K_{12}$ , 交点  $c_2$  の上側では  $\Psi \implies \Psi \tilde{K}_{12}$ , のように変化するとする. ここで,  $s$  から出る Stokes curve 上での Stokes 係数が  $i$  となるように  $\Psi$  を規格化し, また [AKT2] に基づき, type  $j < k, k < l, j < l$  の Stokes curve が交わるとき, type  $j < k, k < l$  の Stokes curve に関しては交点の前後で Stokes 係数が変化しないと仮定した. このとき  $\tilde{\beta} = 0$ , すなわち  $\gamma$  のうち交点  $c_2$  から上の部分では Stokes 現象は起こらない.

証明. 交点  $c_1$  のまわりで解が 1 価であることから  $K_{12}K_{23}^{-1} = K_{23}^{-1}K_{12}K_{13}$  すなわち  $K_{13} = K_{12}^{-1}K_{23}K_{12}K_{23}^{-1}$  が得られ, これより  $\kappa = -i\beta$  となる.  $c_2$  のまわりで同様の

議論を用いると  $\tilde{K}_{12} = K_{13}^{-1} K_{32} K_{12} K_{13} K_{32}^{-1}$  となるが,  $K_{32} K_{12} K_{13} K_{32}^{-1} = K_{13}$  が直接の計算で確かめられるので,  $\tilde{K}_{12} = I$  すなわち  $\tilde{\beta} = 0$ .  $\square$

例 3.1.

Fig. 3.6 は  $(NY)_2$  のパラメータを  $\alpha_0 = 1 - 0.4i, \alpha_1 = 0.4 - 0.7i$  とおき,  $t_1 = -0.86 + 1.285i$  ( $\hat{u}_{0,0} = -0.6723 - 0.1426i, \hat{u}_{1,0} = 0.5574 + 0.2782i$ ) から  $t_2 = -0.8637 + 1.281i$  を経て  $t_3 = -0.87 + 1.275i$  まで動くときの,  $(L)_2$  の Stokes 図形の変化を表したものである.  $t_1$  (Fig. 3.6(1)) から  $t_2$  (Fig. 3.6(2)) へ動くときに ordered 型,  $t_2$  から  $t_3$  (Fig. 3.6(3)) へ動くときに non-ordered 型の切り替えがそれぞれ起こっており, その過程で図の上方での Stokes curve の type および実線・点線の区別は変わっていないことがわかる.

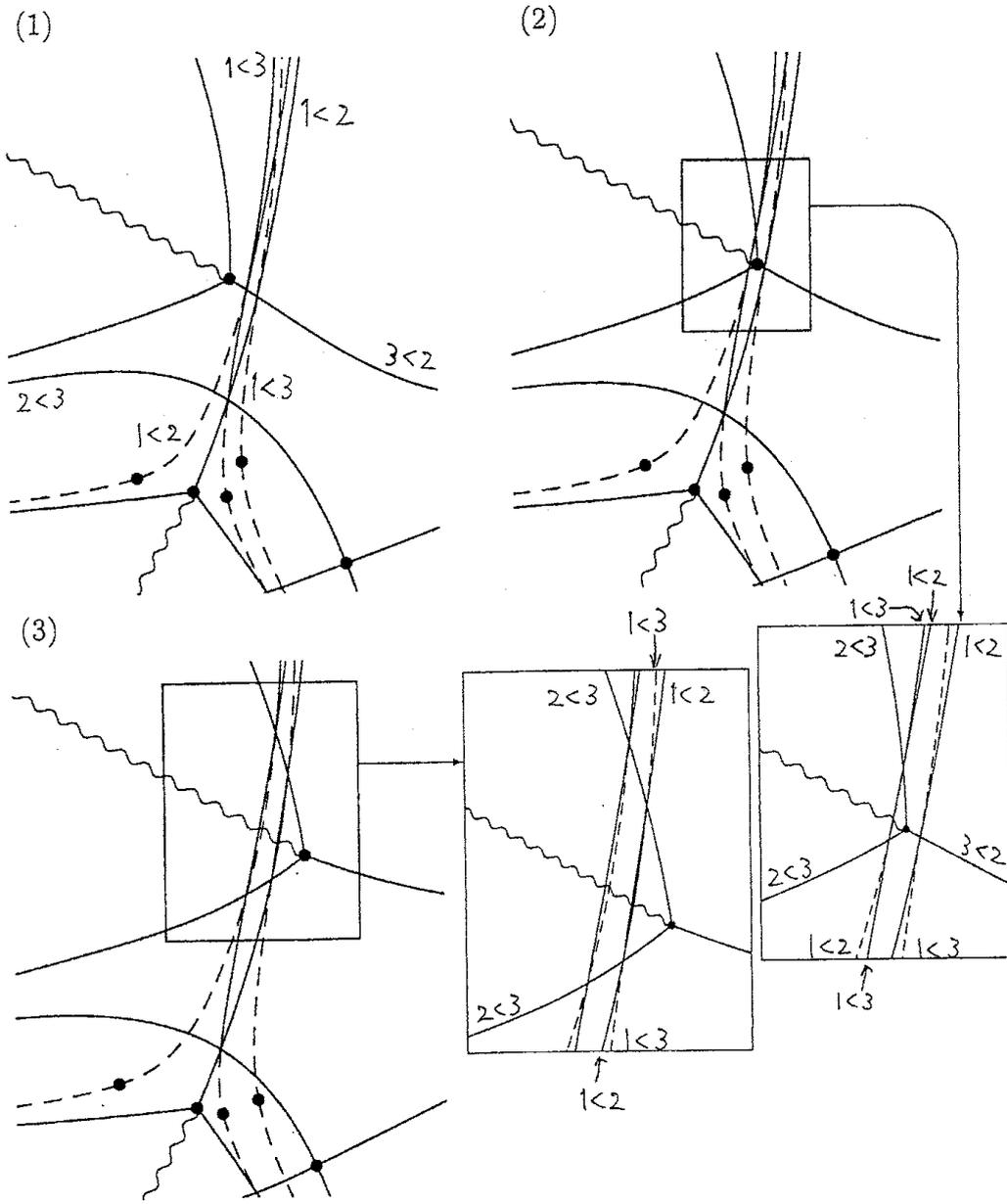


Figure 3.6

#### 4 $(NY)_2$ の Stokes curve 上での切り替え

本節では前節の議論をもとに,  $m = 1$  の場合, すなわち  $(NY)_2$  および  $(L)_2$  の Stokes geometry について考察する.  $(L)_2$  は 2 つの simple turning points および 1 つの double turning point を持つ.

序文で見たように,  $(NY)_2$  の turning point  $\tau = -1.6276 - 0.0986i$  から出る Stokes curve  $\Gamma$  上の点  $t_1$  (Fig. 4.1(0)) において  $(L)_2$  の Stokes geometry は Fig. 4.1(1) のようになっており, 確かに定理 2.4 の主張する通り, double turning point  $d$  と simple turning point  $s_1$  が Stokes curve で結ばれている. 一方, 同じ Stokes curve 上であるが turning point から離れた点  $t_3$  においては, Fig. 4.1(2) のようになっている. この図においては 3 本の Stokes curve  $\gamma_d, \gamma_1, \gamma_2$  が 1 点で交わるという特徴的な configuration になっているが, どの 2 つの (ordinary) turning point も結ばれておらず, 定理 2.4 の主張する形にはなっていない.

それでは, どこで, どのようにして, 今までにない Fig. 4.1(2) のような configuration が出現したのであろうか?

なお, 本節で用いる図は,  $(NY)_2$  のパラメータを  $\alpha_0 = 1 + 0.6i$ ,  $\alpha_1 = 0.2 - 0.1i$  とおいたものである.  $(NY)_2$  の零パラメータ解が定める Riemann 面の構造等,  $(NY)_2$  の Stokes geometry の詳細については Appendix にまとめておいた.

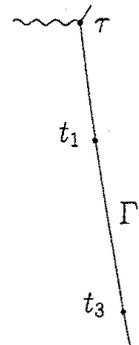


Figure 4.1(0)  
( $t$ -plane)

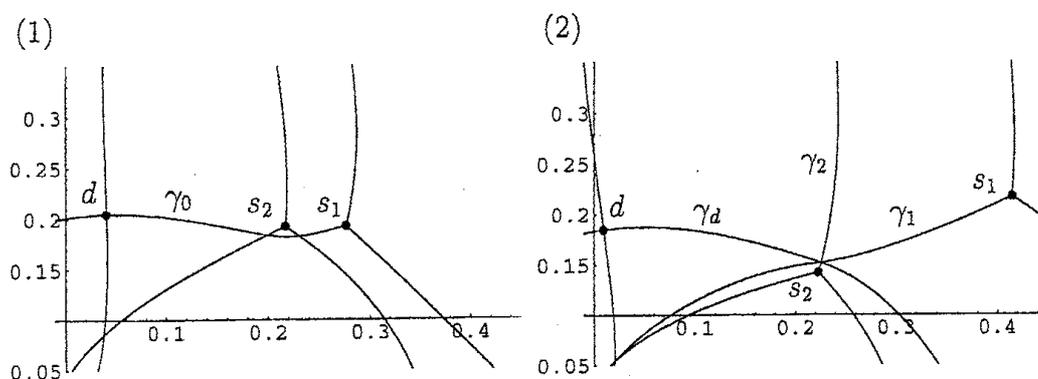
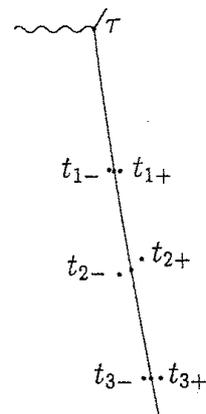


Figure 4.1.

前節の議論から、この場合にも Stokes curve の type を specify して議論を行うことが有効であると考えられる。ところが Fig. 4.1.1 における Stokes curve  $\gamma_0$  は  $d$  から出る Stokes curve と  $s_1$  から出る Stokes curve が重なったものであるから、type が一意に定義されておらず、前節の議論をそのまま適用することができない。

そこで、いったん  $(NY)_2$  の Stokes curve から外したところで考え、その後 Stokes curve 上に戻るという方法をとる。Fig. 4.2(1 $_{\pm}$ ),  $\dots$ , (3 $_{\pm}$ ) はそれぞれ Fig. 4.2(0) の  $t_{1\pm}, \dots, t_{3\pm}$  における  $(L)_2$  の Stokes curve を描いたものである。なお、以下簡単のため、virtual turning point や new Stokes curve は注目している部分にある実線の Stokes curve どうしの交点から定まるもののみを描き、それ以外は省略することにする。

Figure 4.2(0) ( $t$ -plane)

以下本節では、常に  $s_1$  から右上、 $s_2$  から下に cut を入れるものとし、cut を入れた  $x$ -plane 上で特性根の番号付けを次のように定める。  $t_1 = -1.6104 - 0.2268i$  ( $\hat{u}_{0,0} = -0.7986 - 0.7894i$ ,  $\hat{u}_{1,0} = 0.0986 + 0.1583i$ ) において、一般点  $x_0 = 0.23 + 0.25i$  をとり

$$\lambda_1(x_0) = 0.4079 - 0.1092i, \lambda_2(x_0) = -0.1154 + 0.8617i, \lambda_3(x_0) = -0.2926 - 0.7525i$$

となるように番号をつける. このとき,  $x = s_1$  で  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $x = s_2$  で  $\lambda_2 = \lambda_3$ ,  $x = d$  で  $\lambda_1 = \lambda_3$  が成り立ち,

$$\begin{cases} \lambda_1(x) \sim 0.3444 - 0.3952i + (0.6704 + 1.4280i)(x - s_1)^{1/2} \\ \lambda_2(x) \sim 0.3444 - 0.3952i - (0.6704 + 1.4280i)(x - s_1)^{1/2} \end{cases} \\ (x \rightarrow s_1 = 0.2765 + 0.1929i)$$

$$\begin{cases} \lambda_2(x) \sim -0.3698 - 0.0019i + (2.3408 + 2.9013i)(x - s_2)^{1/2} \\ \lambda_3(x) \sim -0.3698 - 0.0019i - (2.3408 + 2.9013i)(x - s_2)^{1/2} \end{cases} \\ (x \rightarrow s_2 = 0.2172 + 0.1923i)$$

$$\begin{cases} \lambda_1(x) \sim 0.4279 - 1.4444i + (8.2642 + 7.2276i)(x - d) \\ \lambda_3(x) \sim 0.4279 - 1.4444i + (2.5376 + 7.5122i)(x - d) \end{cases} \\ (x \rightarrow d = 0.0405 + 0.2046i)$$

となっている (ただし平方根は  $x - s_j > 0$  のとき  $(x - s_j)^{1/2} > 0$  となるようにとる ( $j = 1, 2$ )). 他の  $t$  に対しては, cut を上で定めた通りに入れた上で, これを連続的に動かしたものをを用いる. なお,  $d$  と  $s_1$  を結ぶ Stokes curve を cut が横切っているため,  $d$  と  $s_1$  の type が異なっていることに注意しておく.

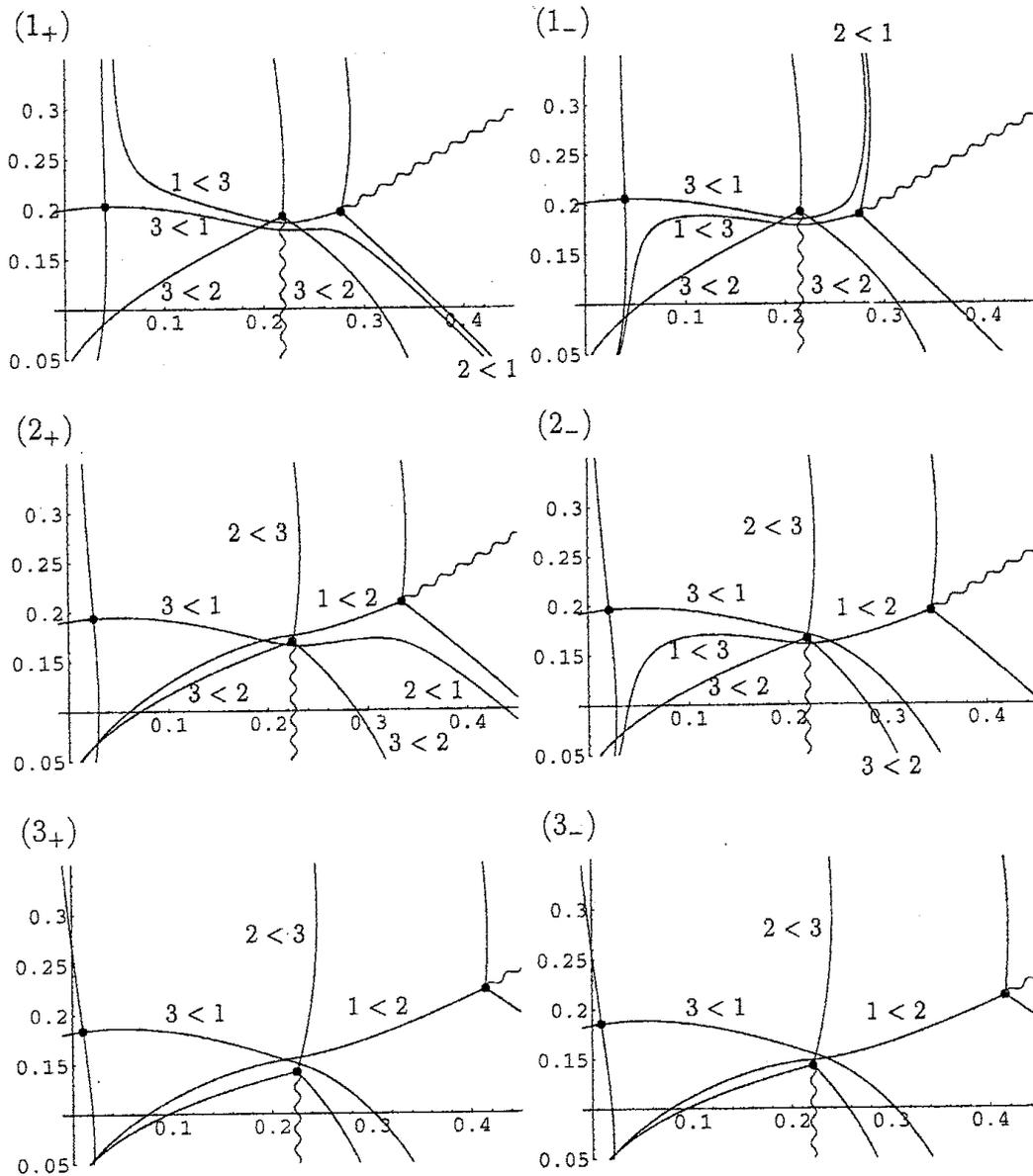


Figure 4.2

Fig. 4.2 ではやはり変化が不連続に見えるが, Fig. 4.3.(1<sub>±</sub>), ..., (3<sub>±</sub>) のように virtual turning point および new Stokes curve を書き加えると, 実は前節で見た切り

替えの組み合わせにすぎないことがわかる. すなわち,  $t_{1+} \rightarrow t_{2+} \rightarrow t_{3+}$  と動いていくと, (横切る向きは前小節と逆であるが) ordered 型の切り替えが2度起こっていることがわかる.  $t_{1-} \rightarrow t_{2-} \rightarrow t_{3-}$  でも同様である.

ただし, Fig 4.3(1<sub>+</sub>) と Fig 4.3(1<sub>-</sub>) に現れる  $v_3$  が同じ点 (の解析接続) であることは自明ではない.  $v_3$  を定める交点を作っている Stokes curve が異なるからである. このことについては §6 で証明する.

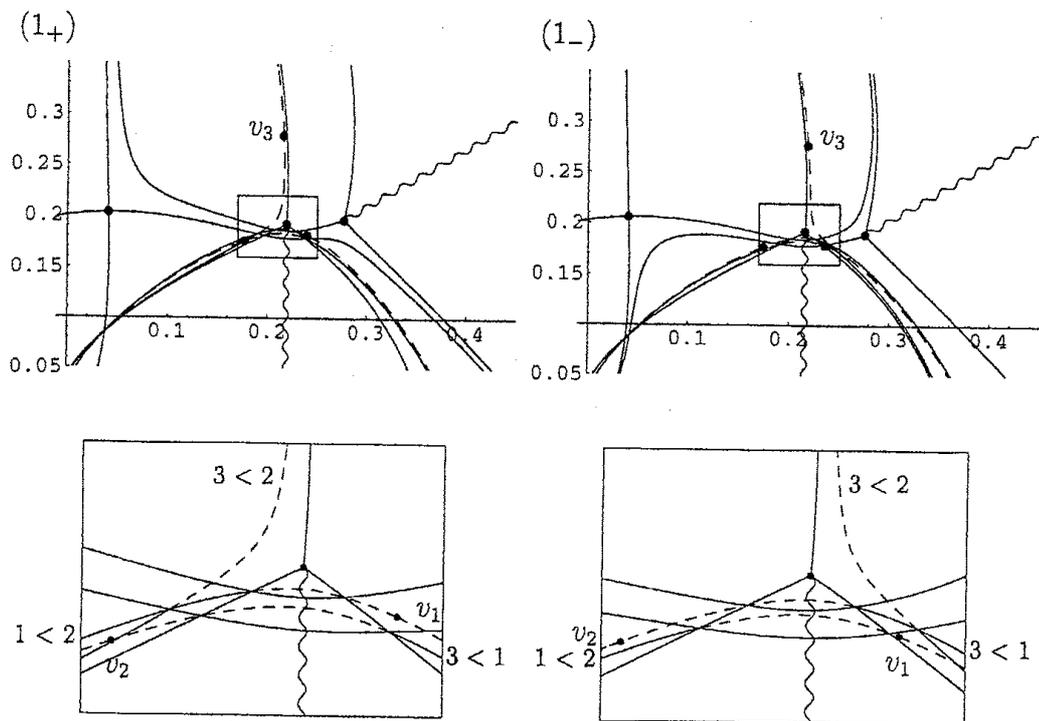


Figure 4.3.

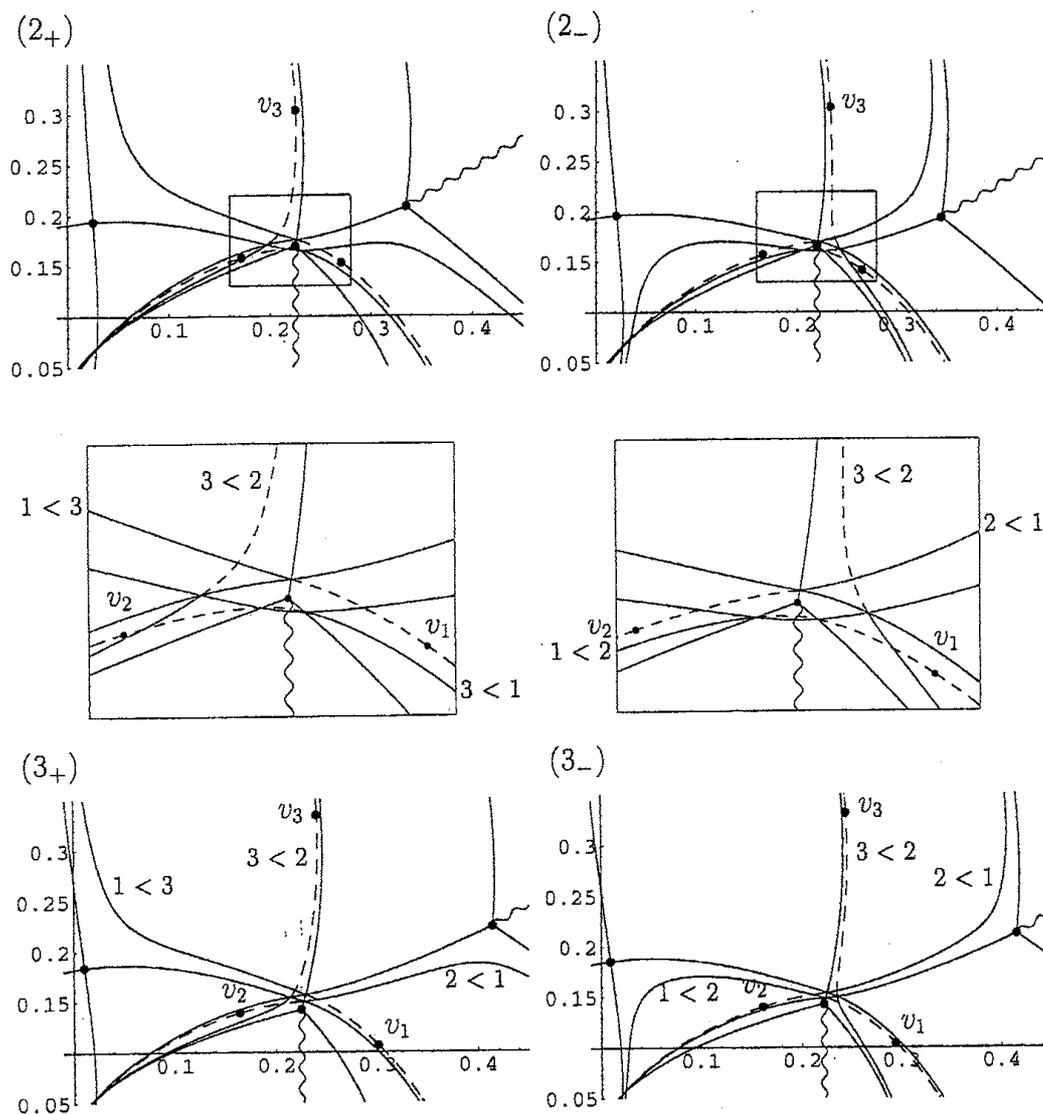


Figure 4.3.

これらの“極限”として Fig. 4.1(1)(2) を考えると, Fig. 4.4(1)(3) のように virtual turning point (および new Stokes curve) が導入されるべきであると考えられる. これは  $\gamma_0$  は 2 本の Stokes curve を分けて考えて, また 3 本交わっているところは 2 本ずつの各ペアに対して, 交点から Stokes curve を描き, virtual turning point を求めたものに他ならない.

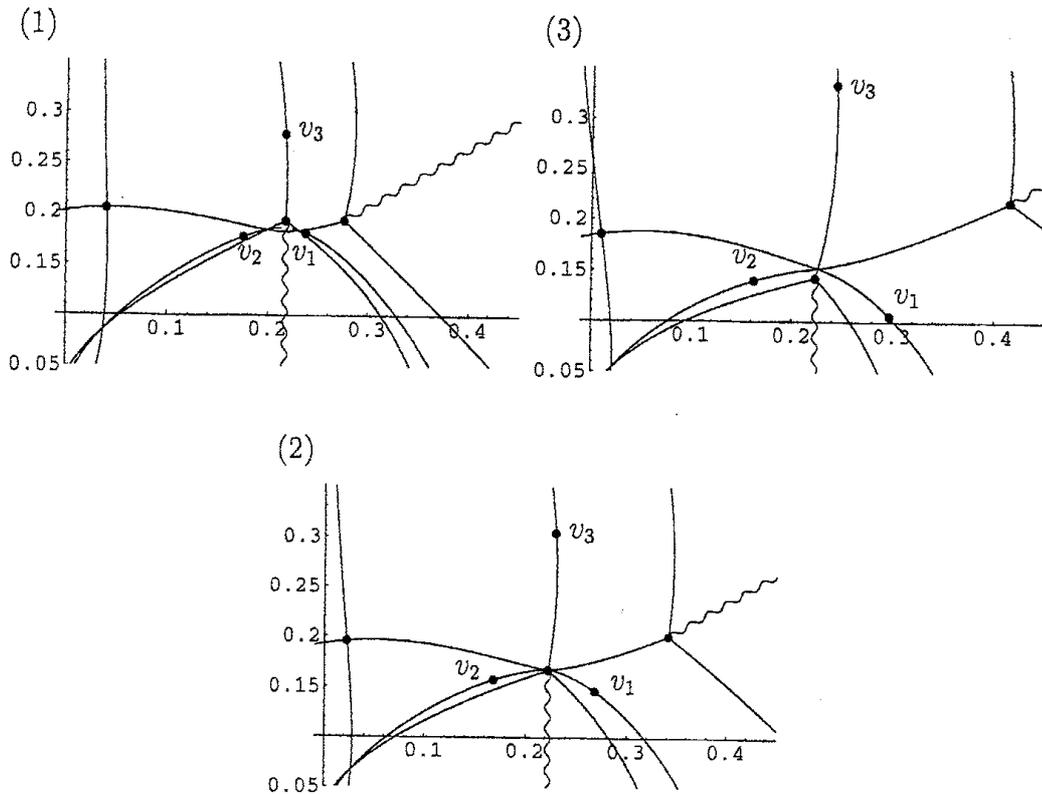


Figure 4.4.

なお, Stokes curve が 2 本重なっている場合, 重なっている 2 本のうちの少なくとも 1 本が実線の場合は実線で, 2 本とも点線の場合は点線で描くものとする.

実際  $t$  が  $t_1$  から  $t_3$  まで  $(NY)_2$  の Stokes curve 上を動いていくと, 途中のある点  $t_2$  で  $s_2$  が  $\gamma_0$  にぶつかり, これを横切ることがわかる (Fig. 4.4(2)).  $t_{1\pm}$  から  $t_{3\pm}$  までそれぞれ動く間に 2 度切り替えが起こるが, Stokes curve 上ではそれらの点は一致し, それらが  $t_2$  に相当している.

ここで最も注目すべき点は, Fig. 4.4(3) において  $d$  と  $v_1$  および  $s_1$  と  $v_2$  が, それぞれ結ばれている点である. すなわち, (simple または double の) ordinary turning point 同士は結ばれていないが, その代わりに ordinary turning point と virtual turning point が Stokes curve で結ばれているという意味で, Stokes geometry の退化が起こっているといえる. 同様に, Fig. 4.4(1) においても  $v_1$  と  $v_2$  が結ばれていることがわかる. これらは Stokes curve の交点に注目すれば図から容易に読み取れるが, §6 で

この点についてももう少し詳しく調べる.

Ordinary turning point と virtual turning point, ordinary Stokes curve と new Stokes curve をそれぞれ区別しなければ, この切り替えは単に結ばれる turning point の組合わせが変化しただけであり,  $t_2$  の前後で Stokes curve の configuration の変化は連続的に起こっていることがわかる. virtual turning point および new Stokes curve を導入したことによって, このような自然な説明が可能になったのである.

## 5 $(NY)_4$ & $(L)_4$ の場合

次に本節では,  $m = 2$  の場合に見られた現象について述べる.  $(L)_4$  には simple turning point が 4 個, double turning point が 2 個存在する. 以下本節で用いる図は,  $(NY)_4$  のパラメータを  $\alpha_0 = 1 - 0.35i, \alpha_1 = 0.45 - 0.7i, \alpha_2 = -0.5 - 0.2i, \alpha_3 = -1.05 + 0.25i$  とおいたものである.

Fig. 5.1 は  $(NY)_4$  の turning point  $\tau = -2.4873 - 1.0085i$  から出る Stokes curve 上の点  $t = t_1 = -2.9171 - 0.7313i$  ( $\hat{u}_{0,0} = -0.6561 - 0.0149i, \hat{u}_{1,0} = 0.0959 - 0.9711i, \hat{u}_{2,0} = 0.3069 - 0.1701i, \hat{u}_{3,0} = -0.4708 + 0.3290i, \hat{u}_{4,0} = -2.1930 + 0.0958i$ ) における  $(L)_4$  の Stokes curve を描いたものである. ここで以下の議論に関係ない部分の new Stokes curve および virtual turning point は省略している.

この図において, §4 で見られたのと同じく, 3 本の Stokes curve が 1 点で交わるという configuration が現れていることがわかる (Fig. 5.1'). これは  $t$  が  $\tau$  から  $t_1$  まで動く間に, §4 で見たような切り替えを経て生じたものと考えられる. ただし変化の起こる箇所が非常に細かいため, この間の変化を詳細に追跡することは現時点ではまだできていない.

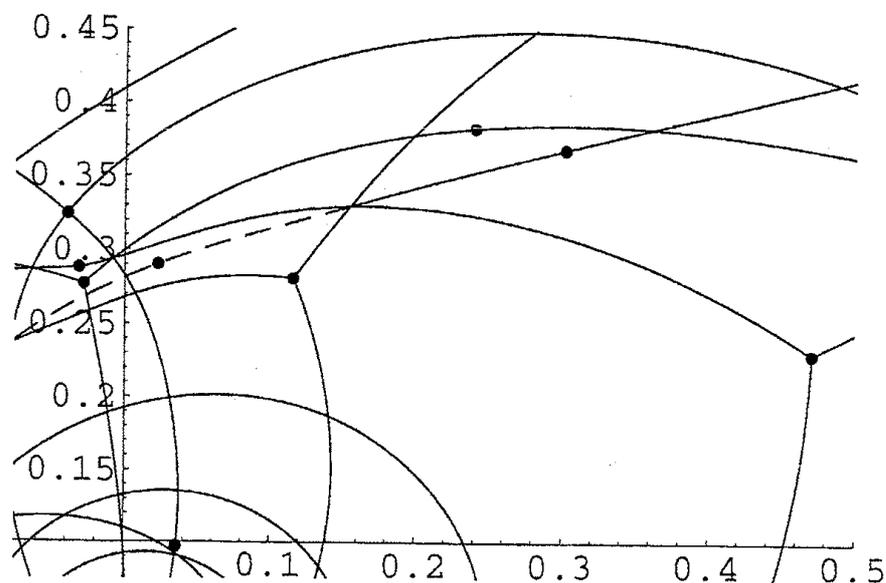


Figure 5.1.

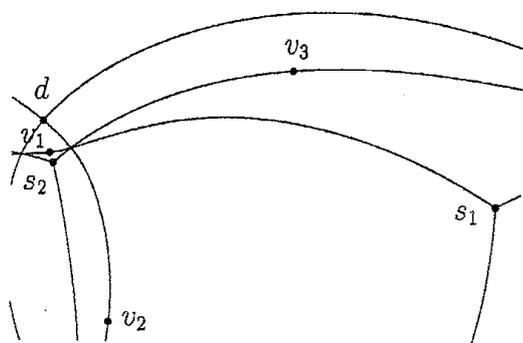


Figure 5.1'.

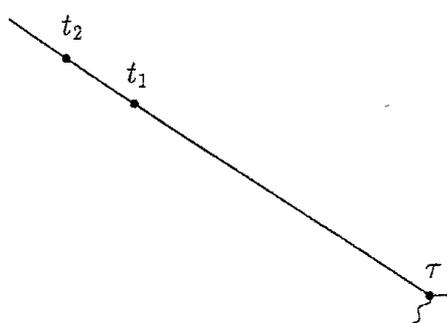


Figure 5.2. ( $t$ -plane)

ここで  $(L)_2$  では見られなかった現象を見るため,  $t$  を  $(NY)_4$  の Stokes curve に沿って,  $t_1$  を越えてさらに遠くへ動かすことを考える.

すると  $t = t_2$  においては, 2つの virtual turning point  $v_1$  と  $v_4$  が new Stokes curve で結ばれている configuration が観察される (Fig. 5.3).

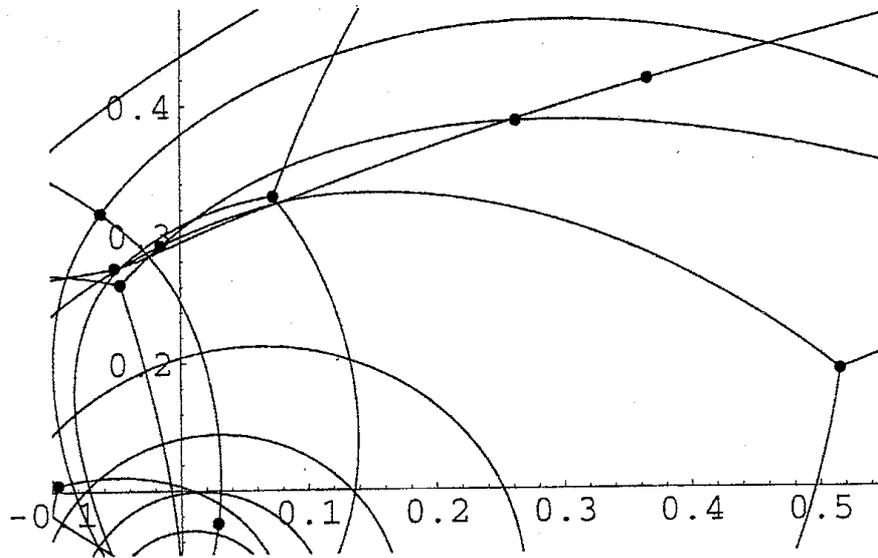


Figure 5.3.

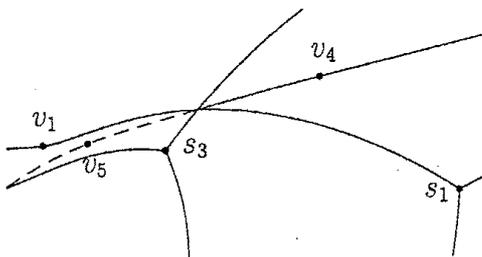


Figure 5.1''.

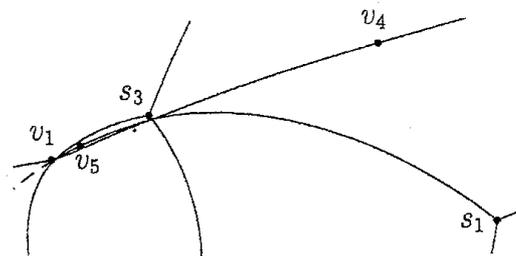


Figure 5.3'.

Fig. 5.1'' と Fig. 5.3' を比較すると,  $t_1$  と  $t_2$  の間のある点において, simple turning point  $s_3$  が  $s_1$  から出る ( $s_1$  と  $v_1$  を結ぶ) Stokes curve を横切り, その結果  $s_1$  から出た Stokes curve が  $v_5$  と,  $v_1$  から出た Stokes curve が  $v_4$  とそれぞれ結ばれていることがわかる.

先に述べたように  $\tau$  と  $t_1$  の間ですでに一度切り替えが起こっていると考えられるため, ここでは  $\tau$  から出る Stokes curve 上で二度目の Stokes geometry の切り替えが起こったことになる. そのために 2 つの virtual turning point が実線の new Stokes

curveで結ばれるという現象が起こったのである。この現象は4つの ordinary turning pointが関与しているため、ordinary turning pointが計3個しかない  $(L)_2$  の場合には見られなかったものである。もし new Stokes curveを導入しなければ、やはり前節と同様、不連続的、不自然な変化が生じることになる。この configuration を説明するためには、virtual turning point および new Stokes curves の概念を導入することが不可欠である。

このとき、virtual turning point  $v_1$  が §4 における double turning point  $d$  と同様の役割を果たしていることにも注意しておく。この事実は WKB 解析において virtual turning point が通常の turning point と同等の役割を果たすという事実を示すものである (cf. [AKSST, Assertion A]).

なお、ここで起こった切り替えは横切られる Stokes curve と交わっている、 $s_3$  から出る Stokes curve の本数が §4 で扱ったものと異なることから、configuration も多少異なっている。この場合も本来退化をほどいて (非線型方程式の Stokes curve から外して) 議論すべきであるが、 $t_1$  と  $t_2$  の間で  $s_3$  から左にのびる Stokes curve が  $s_2$  を横切っているなど図が非常に煩雑になっているため、ここでは省略する。

## 6 積分関係式

前節までは計算機による結果をもとに議論を進めてきたが、本節ではそれらを積分関係式の観点から見直す。

ここでは Fig. 6.1 に示す通り、§4 で観察した状況を考えるが (図の番号と  $t$  との対応は §4 と同様とする)、§5 で見た virtual turning point が絡む場合などでも議論は全く同様であるため、ここでは両端の turning point  $a, b$  の種類は区別しないものとする。すなわち

2つの turning point  $a, b$  を結んでいる Stokes curve  $\gamma_0$  が、別の simple turning point  $s_2$  から出る2本の Stokes curve と交わっている。その後  $s_2$  が  $\gamma$  にぶつかり、通過後は  $s_2$  から出る Stokes curve と  $a, b$  から出る Stokes curve がそれぞれ ordered crossing point を作る。

ただし cut の入れ方を必要に応じて変更するため、それに伴い type が変わることがある。ここでは  $t_1$  の近傍においては、 $s_2$  から右上に cut を入れるものとする。

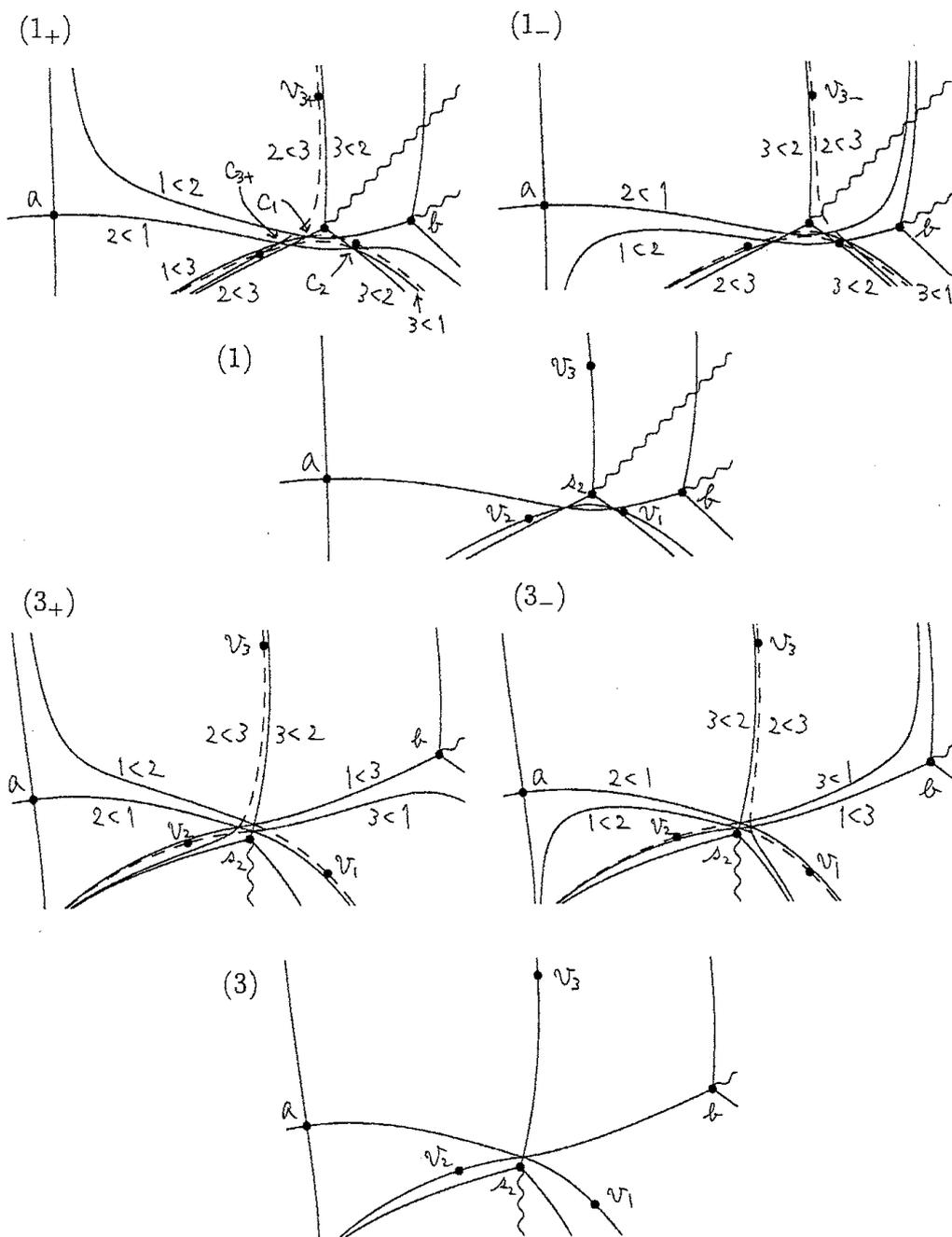


Figure 6.1.

命題 6.1.

(i)  $t_1$  の近傍において,

$$\int_{a(t)}^{b(t)} (\lambda_1 - \lambda_2) dx = \int_{v_1(t)}^{v_2(t)} (\lambda_3 - \lambda_1) dx = \int_{s_2(t)}^{v_3(t)} (\lambda_2 - \lambda_3) dx \quad (21)$$

が成り立つ.

(ii)  $t_3$  の近傍において,

$$\int_{a(t)}^{v_1(t)} (\lambda_1 - \lambda_2) dx = \int_{b(t)}^{v_2(t)} (\lambda_3 - \lambda_1) dx = \int_{s_2(t)}^{v_3(t)} (\lambda_2 - \lambda_3) dx \quad (22)$$

が成り立つ.

証明. (i) (15)より

$$\begin{aligned} \int_{v_1}^{c_1} (\lambda_3 - \lambda_1) dx &= \int_b^{c_1} (\lambda_2 - \lambda_1) dx + \int_{s_2}^{c_1} (\lambda_3 - \lambda_2) dx \\ \int_{v_2}^{c_2} (\lambda_1 - \lambda_3) dx &= \int_a^{c_2} (\lambda_1 - \lambda_2) dx + \int_{s_2}^{c_2} (\lambda_2 - \lambda_3) dx \end{aligned}$$

が成り立ち (積分路は下端の turning point から出る Stokes curve をとる. 以下同様), これを変形して

$$\int_b^{v_1} \lambda_1 dx = \int_b^{s_2} \lambda_2 dx + \int_{s_2}^{v_1} \lambda_3 dx, \quad (23)$$

$$\int_a^{v_2} \lambda_1 dx = \int_a^{s_2} \lambda_2 dx + \int_{s_2}^{v_2} \lambda_3 dx. \quad (24)$$

これら 2 式の差をとって変形すれば左辺 = 中辺が得られる.

右辺は branch の問題が絡んできてやや複雑であるため, 非線型方程式の Stokes curve から外した図をもとに考える.  $t_{1+}$  ( $t_{1-}$ ) 側の図に現れる  $v_3$  を  $v_{3+}$  ( $v_{3-}$ ) と書くことにすると,  $t_{1+}$  側では上と同様にして示される. すなわち

$$\int_{v_{3+}}^{c_{3+}} (\lambda_3 - \lambda_2) dx = \int_a^{c_{3+}} (\lambda_1 - \lambda_2) dx + \int_{v_1}^{c_{3+}} (\lambda_3 - \lambda_1) dx$$

を変形して

$$-\int_a^{v_1} \lambda_1 dx = -\int_a^{v_{3+}} \lambda_2 dx + \int_{v_1}^{s_2} \lambda_3 dx + \int_{s_2}^{v_{3+}} \lambda_3 dx$$

が成り立っているので, (23)と辺々加えれば

$$\int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2) dx = \int_{s_2}^{v_{3+}} (\lambda_2 - \lambda_3) dx$$

が得られる.

一方,  $t_{1-}$  側では  $s_2$  から出る cut が Stokes curve を横切っているので, 一旦 Fig. 6.2 のように cut を左上方向に入れ直す. このとき

$$\begin{aligned} & \int_{v_{3-}}^{c_{3-}} (\lambda_2 - \lambda_3) dx \\ &= \int_b^{c_{3-}} (\lambda_2 - \lambda_1) dx + \int_{v_2}^{c_{3-}} (\lambda_1 - \lambda_3) dx \end{aligned}$$

および(24)から,  $t_{1+}$  側と同様にして

$$\int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2) dx = \int_{s_2}^{v_{3-}} (\lambda_3 - \lambda_2) dx$$

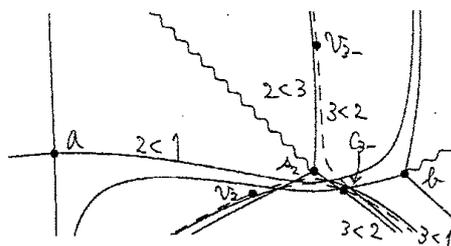


Figure 6.2.

がいえる. ここで,  $s_2$  が type (2,3) の simple turning point であることから  $\lambda_3 - \lambda_2 = (x - s_2)^{1/2} \times$  (正則函数) という形に書けるので, cut を右上方向に戻せば右辺は  $\int_{s_2}^{v_{3-}} (\lambda_2 - \lambda_3) dx$  に等しい. したがって,  $t$  が非線型方程式の Stokes curve 上の点に近づくと  $v_{3\pm}$  がそれぞれ  $s_2$  から出る Stokes curve 上の点に収束し, しかも積分  $\int_{s_2}^x (\lambda_3 - \lambda_2) dx$  が  $s_2$  から出る Stokes curve に沿って実数値かつ単調であることに注意すれば,  $v_{3+}$  と  $v_{3-}$  は同じ点の解析接続であることがわかり, 命題も示された.

(ii)  $x_0$  を cut plane 上の任意の点として

$$J(x_0) := \int_a^{x_0} (\lambda_1 - \lambda_2) dx + \int_b^{x_0} (\lambda_3 - \lambda_1) dx + \int_{s_2}^{x_0} (\lambda_2 - \lambda_3) dx$$

を考えると, これは  $x_0$  によらない.  $\gamma_i$  と  $\gamma_j$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ) の交点を  $c_{ij}$  とすれば, (15)より  $J(c_{12}), J(c_{02}), J(c_{01})$  がそれぞれ(22)の左辺, 中辺, 右辺に等しいことがわかる. 例えば

$$\begin{aligned} J(c_{01}) &= \int_a^{c_{01}} (\lambda_1 - \lambda_2) dx + \int_b^{c_{01}} (\lambda_3 - \lambda_1) dx + \int_{s_2}^{c_{01}} (\lambda_2 - \lambda_3) dx \\ &= \int_{v_3}^{c_{01}} (\lambda_3 - \lambda_2) dx + \int_{s_2}^{c_{01}} (\lambda_2 - \lambda_3) dx \\ &= \int_{s_2}^{v_3} (\lambda_2 - \lambda_3) dx \end{aligned}$$

が成り立つ. 他も同様である. □

特に,  $a, b$  が ordinary turning point  $d, s_1$  で,  $s_2$  が横切る前は定理 2.4 の主張する状況が実現されている, すなわち  $d$  と  $s_1$  が Stokes curve で結ばれ,

$$\int_{d(t)}^{s_1(t)} (\lambda_1 - \lambda_2) dx = I(t) \quad (25)$$

が成り立っている場合を考える. ただし

$$I(t) := \frac{1}{2} \int_{\tau}^t (\nu_+ - \nu_-) dt \quad (26)$$

であり,  $\nu_{\pm}$  の branch は考えている Stokes curve  $\Gamma$  上で  $I(t) > 0$  となるようにとる. このとき命題 6.1 から以下の系が従う:

系 6.2.

(i)  $t_1$  の近傍において, (21) の各辺はすべて  $I(t)$  に等しい. 特に,  $t$  が  $\Gamma$  上にあるならば, 2 つの virtual turning point  $v_1$  と  $v_2$  および, simple turning point  $s_3$  と virtual turning point  $v_3$  がそれぞれ  $(L)_2$  の Stokes curve で結ばれており,

(ii)  $t_3$  の近傍において, (22) の各辺はすべて  $I(t)$  に等しい. 特に,  $t$  が  $\Gamma$  上にあるならば,  $d$  と  $v_1, s_1$  と  $v_2, s_3$  と  $v_3$  がそれぞれ  $(L)_2$  の Stokes curve で結ばれている.

証明. (i) は命題 6.1 と (25) から明らか.

(ii) は  $s_2(t)$  と  $v_3(t)$  が  $t$  に関して解析的であり, それらを結ぶ積分路が  $t_1$  の近傍から  $t_3$  の近傍まで連続的に変形されることに注意すればわかる. □

§5 で見たような, 切り替えが複数回起こる場合は, これらの命題を組み合わせるにより同様の関係式を導くことができる.

*Remark.*  $I(t)$  および各 (ordinary or virtual) turning point の位置は (非線型方程式の turning point 以外では)  $t$  の解析関数であるから, 解析接続により (25) や系 6.2 で示された関係式はもっと広い領域で成り立っているはずである. 例えば (25) は  $t_3$  の近傍でも成り立っているはずである. にもかかわらず  $d$  と  $s_1$  が結ばれていないのは,  $s_1$  が  $s_2$  から出る cut を越えてしまい,  $\int_d^x (\lambda_1 - \lambda_2) dx = 0$  をみたす点の集合の,  $d$  を含む連結成分に  $s_1$  が乗らなくなったためである.

このように,  $(L)_2$  や  $(L)_4$  においては, 3本の Stokes curve が1点で交わるという configuration がしばしば現れる. 上のような order relation を仮定すれば容易にわかるように, 3本が1点で交わることと, 1本の Stokes curve 上に残り2本の Stokes curve の交点から定まる virtual turning point が乗ることは同値であるので, “2つの turning point が Stokes curve で結ばれる” という意味で, これは (非線型方程式の Stokes curve 上で) 起こると期待される “Stokes geometry の退化” の1つの形態であるといえる. 同時に多くの (ordinary or virtual) turning point のペアが Stokes curve で結ばれるため (これは virtual turning point を定義する積分関係式に由来する), 退化の様子は非常に複雑になるが, このような configuration は高階線型方程式 (Lax pair) だけでなく,  $I(t)$  との関係を通じて高階 Painlevé 方程式の Stokes geometry を理解するための1つの鍵となると期待される. 実際, [S] で議論される予定の  $(NY)_4$  の new Stokes curve の理論においては, この種の関係式が有効に用いられる.

積分関係式の観点からも, virtual turning point が ordinary turning point と同じ形の関係式を満たし, turning point が横切ることによる Stokes geometry の変化はそのペアの組み合わせの変化としてとらえられることがわかった. このことは virtual turning point が ordinary turning point と “同等” のものであるという見解を強く支持しているといえよう.

## 7 まとめ

本論文では  $(L)_2$  および  $(L)_4$  の Stokes geometry を具体的に調べ, いくつかの “Stokes geometry の切り替え” の具体例を観察した. そこでは, virtual turning point および new Stokes curve を導入することによってこれらの切り替えがうまく説明でき, しかもこれらを通常の turning point や Stokes curve と同等のものごみなすことにより, 変形パラメータ  $t$  が非線型方程式の Stokes curve 上を動くときに観察される, 線型方程式の Stokes 図形の configuration がいずれもある種の退化として理解されることがわかった.

今後の課題としては,

1. 非線型方程式の Stokes curve 上において, 線型方程式  $(L)_{2m}$  に現れうる virtual turning point を含めた Stokes geometry のパターンを列挙する (位相的には許されるパターンであっても, order relation によっては実際には現れないものが存在するのではないかと予想している)

2.  $(NY)_4$  が高階方程式であることにより現れると期待される,  $t$ -plane での new Stokes curve について, 線型方程式  $(L)_4$  の Stokes geometry の変化という観点から調べる (cf. [N][KKNT1][KKNT2])
3.  $(L)_{2m}$  の new Stokes curve 上での Stokes 係数を求め, Stokes geometry の切り替えが, そのモノドロミー, さらには  $(NY)_{2m}$  の Stokes 現象に与える影響を明らかにする

などが考えられる. このうち 2. については続編 [S] で議論する予定である.

## A 零パラメータ解の定める Riemann 面について

$(NY)_{2m}$  において, 零パラメータ解の top term  $\hat{u}^{(0)}$  は代数方程式(9)によって定まる  $t$  の多価函数であり, (generic には) 第 1 種 turning point を分岐点としてもつ.  $\hat{u}^{(0)}$  の定める Riemann 面を  $\mathcal{R}$  とする. すなわち

$$\mathcal{R} = \{(t, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{2m+1}; V_j(u) = 0 (j = 0, 1, \dots, 2m), u_0 + \dots + u_{2m} = t\}. \quad (27)$$

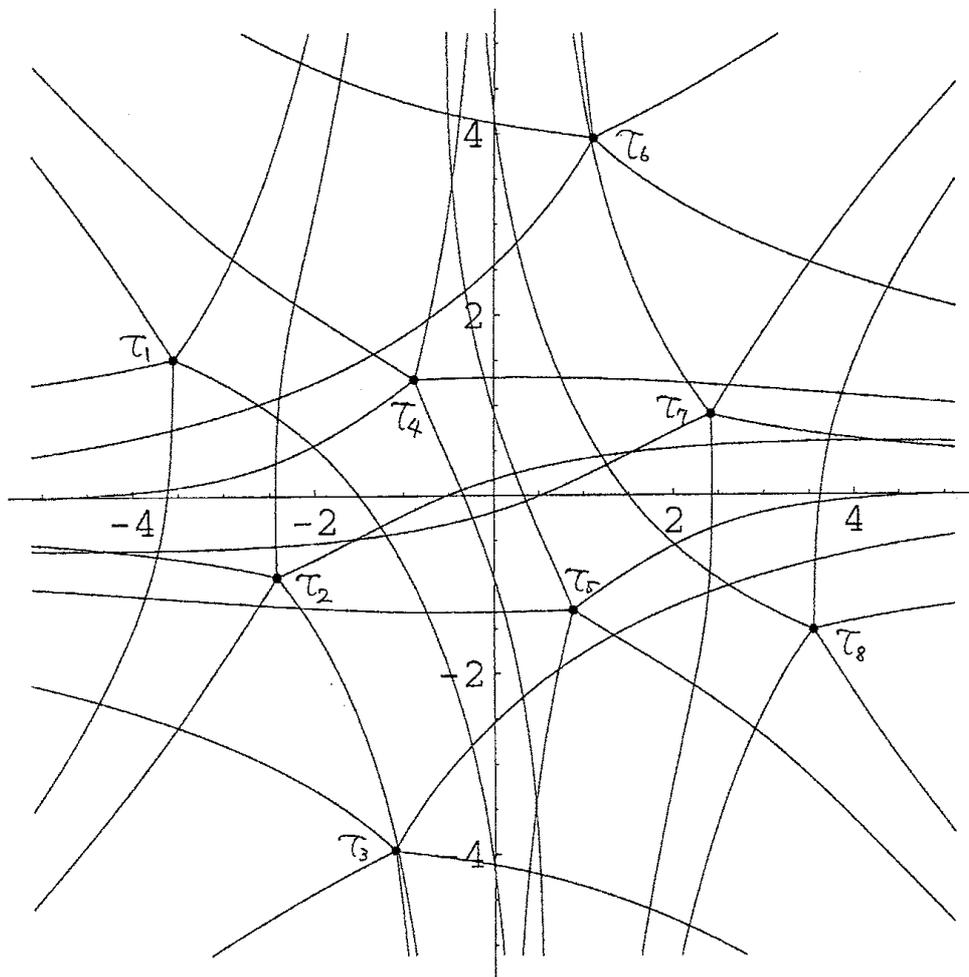
付随する Lax pair の係数に零パラメータ解を代入するということは  $\mathcal{R}$  の各点に対して線型方程式系  $(L)_{2m}$  および  $(D)_{2m}$  を考えることであり,  $(NY)_{2m}$  の turning point や Stokes curve は正確には  $\mathcal{R}$  上の点および曲線としてとらえなければならない.

$P_I, P_{II}$ -hierarchy における Riemann 面の構造については [NT] で議論されるが, ここでは特に  $(NY)_2$  の Stokes geometry および  $\mathcal{R}$  の構造について, いくつかの事実を述べる.

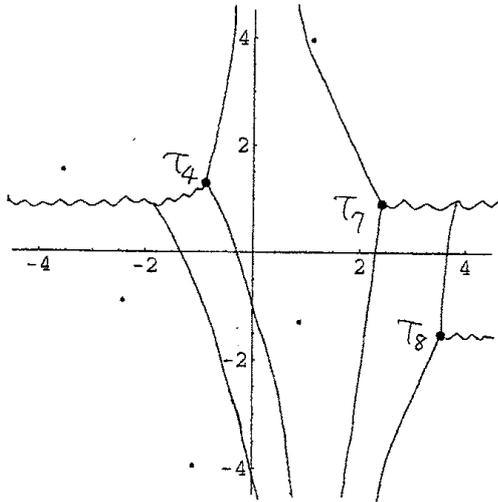
$(NY)_2$  の場合,  $\hat{u}^{(0)}$  は  $t$  の 4 価函数であり, 8 個の (第 1 種) turning point で分岐している. また  $\mathcal{R}$  の種数は 1, すなわち位相的にはトーラスであることもわかる.

Fig. A.1 は sheet structure を考慮せずに描いた (すなわち  $t$ -plane に射影した)  $(NY)_2$  の Stokes curve の図である ( $\alpha_0 = 1 - 0.4i, \alpha_1 = 0.4 - 0.7i$ ). 多くの点で Stokes curve が交わっていて非常に複雑であるが, これを  $\mathcal{R}$  に持ち上げればこれらの交わりはすべて解消される (Fig. A.2).

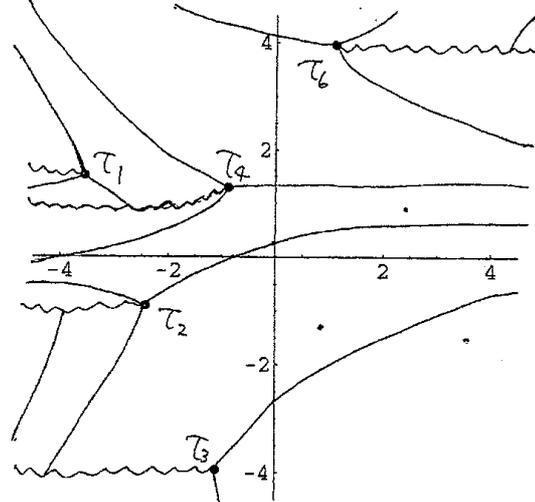
実際,  $(NY)_2$  は 2 階の方程式であるから Stokes curve を定めるベクトル場は (符号を除いて) ただ 1 種類であり, (特異点である turning point 以外で) Stokes curve が交わることは, ベクトル場の解曲線の一意性に反するからである.

Figure A.1 ( $t$ -plane)

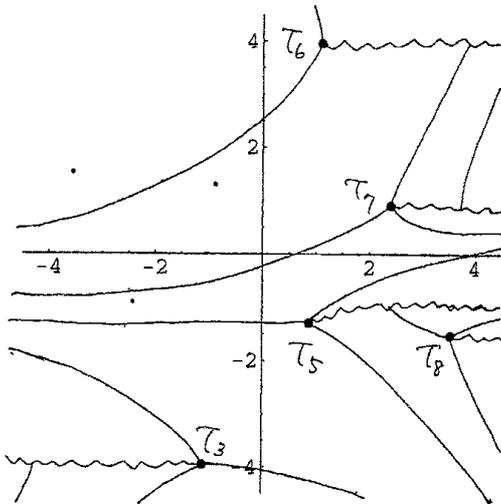
1st sheet



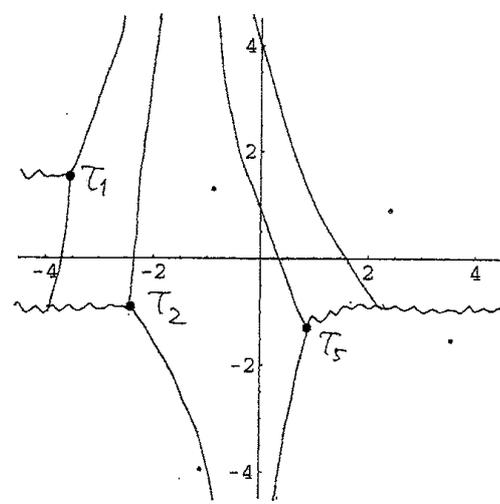
2nd sheet



3rd sheet



4th sheet

Figure A.2 ( $t$ -plane)

## 参考文献

- [AKKST] T. Aoki, T. Kawai, T. Koike, S. Sasaki, and Y. Takei, to appear.
- [AKKSST] T. Aoki, T. Kawai, T. Koike, S. Sasaki, A. Shudo and Y. Takei, A background story and some know-how of virtual turning points, RIMS Preprint No.1486, 2005.
- [AKSST] T. Aoki, T. Kawai, S. Sasaki, A. Shudo and Y. Takei, Virtual turning points and bifurcation of Stokes curves for higher ordinary differential equations, RIMS Preprint No.1478, 2004.
- [AKT1] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, New turning points in the exact WKB analysis for higher order ordinary differential equations, *Analyse algébrique des perturbations singulières, I; Méthodes résurgentes*, Hermann, 1994, 69-84.
- [AKT2] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, On the exact WKB analysis for the third order ordinary differential equations with a large parameter, *Asian J. Math.*, 2(1998), 625-640.
- [AKoT] T. Aoki, T. Koike and Y. Takei, Vanishing of Stokes curves, in: T. Kawai and K. Fujita eds., *Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis*, World Scientific, 2002, 1-22.
- [KKNT1] T. Kawai, T. Koike, Y. Nishikawa and Y. Takei, On the Stokes geometry of higher order Painlevé equations, RIMS Preprint No.1443, 2004.
- [KKNT2] T. Kawai, T. Koike, Y. Nishikawa and Y. Takei, On the complete description of the Stokes geometry for the first Painlevé hierarchy, *数理解析研究所講究録 1397 "Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis"*, 京都大学数理解析研究所, 2004, 74-101.
- [KT] 河合隆裕, 竹井義次, *特異摂動の代数解析学*, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1998.

- [N] 西川享宏,  $P_{II} - P_{IV}$  hierarchy の WKB 解析, 数理解析研究所講究録 1316 「高階 Painlevé 方程式の Stokes 図形の西川現象」, 京都大学数理解析研究所, 2003, 19-103.
- [NT] Y. Nishikawa and Y. Takei, On the structure of the Riemann surface in the Painlevé hierarchies, In Prep.
- [NY] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type  $A_7^{(1)}$ , Funkcialaj Ekvacioj, **41**(1998), 493-503.
- [S] S. Sasaki, in preparation.
- [SI] A. Shudo and K. S. Ikeda, to be published.
- [T] Y. Takei, Toward the Exact WKB Analysis for Higher-Order Painlevé Equations - The Case of Noumi-Yamada Systems -, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **40**(2004), 709-730.