

# Renormalization-group and numerical analysis of a noisy Kuramoto-Sivashinsky equation in 1+1 dimensions

名大工 上之 和人 (kazuto Ueno)

Department of Computational Science and Engineering,  
Graduate School of Engineering, Nagoya University

九大総合理工 坂口 英継 (Hidetsugu Sakaguchi)

Department of Applied Science for Electronics and Materials,  
Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

九大応力研 岡村 誠 (Makoto Okamura)

Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

## 1 はじめに

界面ラフニングに関する連続体モデルとして, Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式 [1] と Kuramoto-Sivashinsky (KS) 方程式 [2, 3] が知られている. KPZ 方程式は正の表面張力係数を持ち, 成長の駆動力となるのはランダム力である. 一方, KS 方程式は完全に決定論的な方程式である. 負の表面張力のため自発的に不安定になる. このような違いにもかかわらず, Yakhot は, 1+1 (空間+時間) の KS 方程式の巨視的スケールの統計的性質は, KPZ 方程式 (あるいは, ノイズのある Burgers 方程式) のそれと等価であることを予想した. [4, 5, 6] (今後, Yakhot の予想と呼ぶことにする.)

Yakhot の予想を証明するために, 1+1 次元の KS 方程式に対して多くの数値的検証がなされた [7, 8, 9, 10]. 負の表面張力により生成された時空カオスあるいは揺らぎがくりこまれて, 長波長側では有効な (くりこまれた) 正の表面張力と有効な (くりこまれた) ノイズの項を持つ方程式になるというのがこの予想に対する今日の理解の仕方である. 実際, 1+1 次元の KS 方程式の長波長の特性を記述する有効方程式の中の有効パラメーターの値が, 粗視化の方法 [7, 9] や他の方法 [8, 10] で求められ, 巨視的スケールでは, KS 方程式は KPZ 方程式のように振舞うことが示された. しかし, Zaleski らは, 数値的に正確に求めることがもっとも難しいとされるダイナミックスケールリングを見つけることができなかった [7, 9, 10]. Sneppen らは, もっと大きなシステムサイズで計算し KPZ スケールリングへのクロスオーバーの始まりを観察したが, KPZ ダイナミックスケールリングをはっきりと見つけることができなかった [8].

理論的な観点からの取り組みのひとつに, Yakhot のくりこみ群的アプローチがある [4]. 残念ながら, KS 方程式を制御不能な発散を持つ不安定なプロパゲーターのまわりの摂動理論で扱っていたために, Yakhot 自身の証明は確かなものではなかった. 一方, L'vov らは, KS 方程式の長時間, 長距離極限でのスケールリング特性を, Mode Coupling Theory (MCT) [11] や流体乱流へ適用された Direct Interaction Approximation (DIA) 理論 [12] のような類の方法で調べた. その方法では, 最初からくりこまれた応答関数や相関関数の存在を仮定して, 自己エネルギー関数に現れる裸の応答関数や相関関数をそれらに置き換え, Dyson-Wyld 方程式からセルフコンシステントな方法でスケールリング特性を解析している. 自己エネルギー関数の積分を評価する際に, 波数空間で局所的な相互作用が支配的な場合と非局所的な相互作用が支配的な場合に分けて調べている. その

結果, 1+1 次元の KPZ と KS 方程式は両方とも局所的な相互作用が支配的であり, KS 方程式は長距離, 長時間で KPZ 方程式と同じスケール特性をもち得ると結論づけている [14].

Yakhot の予想に答えるために別の試みもあった. KS 方程式ではなくて, ノイズをもつ KS 方程式と KPZ 方程式が同じ普遍クラスに入るかどうか 1+1 次元の場合について数値的 [15, 16], 理論的 [17] に調べられた. ひとつは, 高エネルギーの粒子を衝突させて物体の表面から原子を放出させることによって侵食された界面のダイナミックラフニングの研究である. 侵食モデルの初期と後期のダイナミクスは, ノイズのある KS 方程式から得られたものと同じになることがわかった [15]. もうひとつは, 気相成長によるある結晶面上での孤立したステップの蛇行を記述する確率論的な非線形方程式の数値シミュレーションである. その非線形方程式は, ある臨界過飽和以上ではノイズのある KS 方程式の形をとった. ノイズのない KS 方程式から得られたステップのラフネスを特徴づけるラフネス関数は, 非平衡度が増すにつれて, ノイズのある KS 方程式から得られたものと一致した ([16] の Fig.1 を参照). これらの結果は, ノイズのある KS 方程式はノイズのない KS 方程式と同じように振舞うことを示唆している. さらに, [15, 16] では, ノイズのある KS 方程式から求めた成長界面の高さ  $h$  の定常状態のスペクトル  $\langle h_k h_{-k} \rangle$  は, 小さな波数  $k$  に対して, KPZ や決定論的な KS 方程式の場合に見られる  $k^{-2}$  スケールリングに従うことがわかった. しかし, [15] では, ダイナミックスケールリングの特性ははっきりと見つかっていないし, [16] では調べられてもいない. これは, ノイズの強さが小さいせいか数値シミュレーションのシステムサイズと時間の制約のせいかもしれない. ノイズをもつ KS 方程式と KPZ 方程式の間の関係を理論的に明らかにするために, 非保存的なノイズを加えた KS 方程式に動的くりこみ群解析が適用された. その結果, ノイズのある KS 方程式に含まれるパラメーターの RG flow 方程式から, ある安定な固定点が見つかった [17]. それは KPZ の固定点とみなされたが, 彼らの求めた 1+1 次元でのラフネス指数やダイナミックスケールリング指数の値は, KPZ の固定点での厳密な値とは違っていた.

ノイズのある KS 方程式とノイズのない KS 方程式の唯一の違いは, 決定論的なノイズ (すなわち, カオス) と確率論的なノイズの両方から生じる有効なノイズにある [14]. これらふたつのノイズ間の相互作用がどのように界面のラフネスを決定するかを理解することは重要な問題である. 以下で我々は, [17] で得られた結果の問題点を指摘し, 非保存的なノイズに新たに保存的なノイズを加えた KS 方程式にくりこみ群解析を適用する. くりこみ群解析の結果から, 決定論的な KS 方程式から KPZ のスケールリング特性を見出す際の数値シミュレーションにおけるシステムサイズと時間の制約を克服する方法を紹介する [18].

## 2 くりこみ群解析

### 2.1 RG flow 方程式

1+1 次元のノイズのある KS 方程式は

$$h_t = \nu h_{xx} - K h_{xxxx} + \frac{\lambda}{2} (h_x)^2 + \eta(x, t), \quad (1)$$

である. ここで, 下添え字は偏微分を表す.  $h(x, t)$  は, 時刻  $t$  での基板上の位置  $x$  上の界面の高さ,  $\nu$  は負の表面張力係数,  $K$  は正の表面拡散係数,  $\lambda$  は非線形性の強さを表す.  $\eta(x, t)$  は, 平均ゼロで, 相関

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \left\{ 2D - 2D_d \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (2)$$

をもつガウシアンホワイトノイズである.  $\eta$  は非保存的なノイズと保存的なノイズからなっており, それぞれのノイズの強さを  $D$ ,  $D_d$  とする [19]. (2) 式の  $D_d$  の項は, Cuerno らのくりこみ群の計算 [17] では考慮されてい

ない。この項を導入することによって揺動散逸定理を満たすセルフコンシステントなくりこみ群の結果が得られることを以下に示す。  $u = -h_x$ ,  $f = -\eta_x$  とおくと, (1) 式に等価な方程式が得られる。

$$u_t = \nu u_{xx} - K u_{xxxx} - \lambda u u_x + f(x, t). \quad (3)$$

$\lambda = 1$  のとき, (3) 式の非線形項は 1 次元の Navier-Stokes 方程式の類である。そのとき,  $u(x, t)$  は圧縮場中での 1 次元速度場と解釈できる [5, 6].

(3) 式から, 波数  $k$  と周波数  $\omega$  をもつフーリエモードに対する方程式は次のように書ける。

$$(-i\omega + \nu k^2 + K k^4) u(k, \omega) = f(k, \omega) - \frac{i\lambda}{2} k \int_{|p| \leq \Lambda_0} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} u(p, \Omega) u(k-p, \omega-\Omega). \quad (4)$$

ここで,  $\Lambda_0 \equiv \pi/\Delta x$  はフーリエ空間での最大波数であり,  $\Delta x = L/N$  は実空間での格子間隔である。  $L$  はシステムサイズの大きさ,  $N$  は格子点の数である。(2) 式から,  $f(x, t)$  のフーリエ変換の相関は次式を満たす。

$$\langle f(k, \omega) f(k', \omega') \rangle = 2(2\pi)^2 (D k^2 + D_d k^4) \delta(k+k') \delta(\omega+\omega'). \quad (5)$$

通常のくりこみ群の手続きに従って [1, 5, 17, 19], はじめに,  $u(k, \omega)$  を  $u^>(k, \omega)$  と  $u^<(k, \omega)$  に分解する。 $u^>(k, \omega)$  は  $\Lambda(l) \equiv \Lambda_0 e^{-l} \leq |k| \leq \Lambda_0$  を満たす波数成分のみを持ち,  $u^<(k, \omega)$  は  $|k| \leq \Lambda(l)$  を満たす波数成分のみを持つ。ここで,  $l \geq 0$  はスケールパラメーターである。同様に,  $f(k, \omega)$  も  $f^>(k, \omega)$  と  $f^<(k, \omega)$  に分解する。(5) 式の統計的性質を使って, 速いモード  $u^>(k, \omega)$  を (4) 式から消去すると, 遅いモード  $u^<(k, \omega)$  のみを含む方程式が得られる。

$$\begin{aligned} [-i\omega + \nu k^2 + K k^4 + \Sigma(k, \omega)] u^<(k, \omega) &= f^<(k, \omega) - \frac{i\lambda}{2} k \int_{|p| \leq \Lambda(l)} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \\ &\times u^<(p, \Omega) u^<(k-p, \omega-\Omega). \end{aligned} \quad (6)$$

ここで,  $f^<(k, \omega)$  は

$$\langle f^<(k, \omega) f^<(k', \omega') \rangle = 2(2\pi)^2 [D k^2 + D_d k^4 + \Phi(k, \omega)] \delta(k+k') \delta(\omega+\omega') \quad (7)$$

を満たす。(6) 式の  $\Sigma(k, \omega)$  と (7) 式の  $\Phi(k, \omega)$  は one-loop 近似で以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \Sigma(k, \omega) &= \lambda^2 \int_{\Lambda(l) \leq |p| \leq \Lambda_0} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} [k(k-p) |G_0(p, \Omega)|^2 G_0(k-p, \omega-\Omega) (D p^2 + D_d p^4) \\ &+ k p |G_0(k-p, \omega-\Omega)|^2 G_0(p, \Omega) (D(k-p)^2 + D_d(k-p)^4)], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi(k, \omega) &= \lambda^2 \int_{\Lambda(l) \leq |p| \leq \Lambda_0} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} k^2 |G_0(p, \Omega)|^2 |G_0(k-p, \omega-\Omega)|^2 \\ &\times (D p^2 + D_d p^4) (D(k-p)^2 + D_d(k-p)^4). \end{aligned} \quad (9)$$

ここで,  $G_0(k, \omega) = 1/(-i\omega + \nu k^2 + K k^4)$  は裸のプロパゲーターである。

我々は長距離, 長時間でのスケールリングの振る舞いに興味がある。それは,  $k \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$  の極限に対応する。はじめに (8) と (9) 式の右边を  $\Omega$  について積分する。次に  $\omega = 0$  とおき, (8) と (9) 式の積分結果を  $k^4$  までテイラー展開すると,  $\Sigma = \delta \nu k^2 + \delta K k^4$ ,  $\Phi = \delta D k^2 + \delta D_d k^4$  と表すことができる。(3) 式の線形部分から分散関係式  $\omega = -\nu k^2 - K k^4$  を得るが,  $\nu < 0$  のとき長波長側は不安定になり, 裸のプロパゲーター  $G_0(k, \omega)$  は  $\omega = 0$  のとき波数  $k = 0$  と  $k = k_0 = (|\nu|/K)^{1/2}$  で発散する。このとき, この  $G_0(k, \omega)$  を使った通常の摂動展

開は破綻する. そのような発散を避けるために, Procaccia らは, KS 方程式の解の存在と有界性に関する厳密な証明がある事実を利用して, 最初からくりこまれたプロパゲーターと相関関数を仮定した [13, 14]. そのため, 彼らの  $\Sigma(k, \omega)$  と  $\Phi(k, \omega)$  の中のプロパゲーターと相関関数は最初からくりこまれたもので表されている. 一方, くりこみ群の方法では, (8) と (9) 式の積分は無限小の波数殻  $\Lambda_0(1 - \delta l) \leq |k| \leq \Lambda_0$  内で行われるので, 裸のプロパゲーターの特異性による発散を回避できる [17].  $\delta\nu, \delta K, \delta D, \delta D_d$  のすべてを  $\delta l$  の 1 次まで計算し, くりこまれたパラメーター  $\nu^< \equiv \nu + \delta\nu, K^< \equiv K + \delta K, D^< \equiv D + \delta D, D_d^< \equiv D_d + \delta D_d$  を定義する. ガリレイ不変性により  $\lambda$  には粗視化による補正はないので,  $\lambda^< \equiv \lambda$  である [5].

粗視化しパラメーターをくりこんだ後の次のステップは, すべてのパラメーターを再スケール化することである. 空間, 時間, 場の量を微小量だけスケール変換すると,  $\tilde{k} = (1 + \delta l)k, \tilde{\omega} = (1 + z\delta l)\omega, \tilde{u}(\tilde{k}, \tilde{\omega}) = [1 - (\alpha + z)\delta l]u^<(k, \omega)$  と変換される. ここで,  $\alpha$  は界面のラフネス指数,  $z$  はダイナミック指数と呼ばれている. 粗視化と再スケール化によってパラメーターは次のように変換されたことになる;  $\tilde{\nu} = [1 + (z - 2)\delta l]\nu^<, \tilde{K} = [1 + (z - 4)\delta l]K^<, \tilde{\lambda} = [1 + (\alpha + z - 2)\delta l]\lambda^<, \tilde{D} = [1 + (z - 2\alpha - 1)\delta l]D^<, \tilde{D}_d = [1 + (z - 2\alpha - 3)\delta l]D_d^<$ . ここで,  $\sim$  のついた変数やパラメーターは再スケール化したものを表し, ついていないものはもともとのスケールでの変数とパラメーターを表すものとする. 極限  $\delta l \rightarrow 0$  で, ノイズのある KS 方程式に含まれるパラメーターのくりこみ群変換による変化を記述する RG flow 方程式を得る.

$$\frac{d\tilde{\nu}}{dl} = \tilde{\nu} \left\{ z - 2 + \frac{G}{F(1+F)^3} \left( 3 + F + (1-F)\frac{H}{G} \right) \right\}, \quad (10)$$

$$\frac{d\tilde{K}}{dl} = \tilde{K} \left\{ z - 4 + \frac{G}{2(1+F)^5} \left( 26 - F + 2F^2 + F^3 + (2 - 21F + 6F^2 + F^3)\frac{H}{G} \right) \right\}, \quad (11)$$

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{dl} = \tilde{\lambda} \{ \alpha + z - 2 \}, \quad (12)$$

$$\frac{d\tilde{D}}{dl} = \tilde{D} \left\{ z - 2\alpha - 1 + \frac{G}{(1+F)^3} \left( 1 + \frac{H}{G} \right)^2 \right\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{D}_d}{dl} = \tilde{D}_d \left\{ z - 2\alpha - 3 + \frac{G^2}{2H(1+F)^5} \right. \\ \left. \times \left( 16 + 3F + F^2 + 2(9 - 5F)\frac{H}{G} + (2 - 13F - F^2) \left( \frac{H}{G} \right)^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

ここで, 無次元パラメーター,  $F(l) = \tilde{\nu}(l) / (\tilde{K}(l)\Lambda_0^2)$ ,  $G(l) = \tilde{\lambda}(l)^2 \tilde{D}(l) / (4\pi \tilde{K}(l)^3 \Lambda_0^7)$ ,  $H(l) = \tilde{\lambda}(l)^2 \tilde{D}_d(l) / (4\pi \tilde{K}(l)^3 \Lambda_0^5)$  を定義した. (10)-(14) 式から,  $F, G, H$  の RG flow 方程式を得る:

$$\frac{dF}{dl} = 2F + \frac{G}{2(1+F)^5} \left\{ 6 - 12F + 11F^2 - F^4 + (2 + 19F^2 - 8F^3 - F^4)\frac{H}{G} \right\}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dl} = 7G - \frac{G^2}{2(1+F)^5} \left\{ 76 - 7F + 4F^2 + 3F^3 + (2 - 71F + 14F^2 + 3F^3)\frac{H}{G} \right. \\ \left. - 2(1+F)^2 \left( \frac{H}{G} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{dH}{dl} = 5H + \frac{G^2}{2(1+F)^5} \left\{ 16 + 3F + F^2 - (60 + 7F + 6F^2 + 3F^3) \frac{H}{G} - (4 - 50F + 19F^2 + 3F^3) \left( \frac{H}{G} \right)^2 \right\}. \quad (17)$$

無次元パラメーターには別の表し方もある;  $f(l) = \bar{K}(l)\Lambda_0^2/\bar{\nu}(l)$ ,  $g(l) = \bar{\lambda}(l)^2\bar{D}(l)/(4\pi\bar{\nu}(l)^3\Lambda_0)$ ,  $h(l) = \bar{\lambda}(l)^2\bar{D}_d(l)\Lambda_0/(4\pi\bar{\nu}(l)^3)$ . しかし,  $\bar{\nu}$  がゼロに近づくときは,  $f(l)$ ,  $g(l)$ ,  $h(l)$  は発散するので, それらのパラメーターは便利なものではない [15].  $F(l)$ ,  $G(l)$ ,  $H(l)$  とは,  $F(l) = 1/f(l)$ ,  $G(l) = g(l)/f(l)^3$ ,  $H(l) = h(l)/f(l)^3$  の関係があることに注意しておく.

## 2.2 RG flow 方程式の固定点

Cuernero らは, (2) 式の  $D$  の項のみを考慮して (1) 式のくりこみ群の計算を行った [17]. (15), (16) 式で  $\bar{D}_d = 0$  (すなわち,  $H = 0$ ) とおいたものは, [17] の (20), (19) 式で  $d = 1$  とおいたものに帰着しない. 故に, [17] で得られた結果についてコメントする必要がある.  $d = 1$  のとき, 彼らは安定な固定点  $(F^*, G^*) = (-25.25, -722.8)$  を見つけ,  $z = 1.46$ ,  $\alpha = 0.54$ ,  $\beta = \alpha/z = 0.37$  の値を得た. 彼らは, この値を KPZ の固定点とみなしたが, この  $z$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  の値は, KPZ の固定点でのそれらの値から, それぞれ 2.7%, 8%, 12% ずれているし,  $F^*$ ,  $G^*$  が負の値なので,  $\bar{\nu}^* > 0$ ,  $\bar{K}^* < 0$  となる. このとき,  $\bar{k} = (\bar{\nu}^*/|\bar{K}^*|)^{1/2}$  以上の波数で不安定なモードが発生することになる. しかも,  $\alpha = 0.54$  を 2.3 節で議論するパワースペクトルのスケール関数に代入すると,  $E(k) \propto k^{-0.08}$  となり,  $k \rightarrow 0$  の極限で一定値をとらない. このことは,  $d = 1$  のとき KPZ 方程式で成り立つはずの揺動散逸定理の結果に反する. 我々は, [17] の  $d = 1$  のときの RG flow 方程式は, (8), (9) 式で  $p \rightarrow p + k/2$ ,  $\Omega \rightarrow \Omega + \omega/2$  の置き換えをすることによって得られることを確認した. このような置き換えをするのは被積分関数が対称化されるためである. ただし [17] では, 積分範囲を  $\Lambda(l) \leq |p| \leq \Lambda_0$  から  $\Lambda(l) \leq |p + k/2| \leq \Lambda_0$  に変更していないようである. 我々は, 積分範囲もきちんと変更して同じ積分を行った結果,  $\bar{\nu}$ ,  $\bar{D}$  に関しては, [17] と同じ RG flow 方程式を得た. しかし,  $\bar{K}$  に関しては違った RG flow 方程式を得た.  $k^2$  までの展開では積分範囲の変更の効果は出ないが,  $k^4$  まで展開すると積分範囲の変更の効果が現れるからこのような違いが出たのである. 我々は,  $p \rightarrow p + k/2$ ,  $\Omega \rightarrow \Omega + \omega/2$  の置き換えをせずに, 直接 (8), (9) 式の積分を行った. この結果は, 積分変数の置き換えと積分範囲の変更によって得られた結果と同じになることを確認した. その結果は, (15), (16) 式で  $H$  の項がないものである. この RG flow 方程式から安定な固定点  $(F^*, G^*) = (13.1868, 1064.43)$  を見つけ, スケール指数の値は,  $z = 1.54$ ,  $\alpha = 0.46$ ,  $\beta = 0.30$  となった. 今度は,  $F^*$  の値は正, すなわち  $\bar{K}^* > 0$  となって, [17] で  $\bar{K}$  が負の値をとる問題は one-loop 近似のせいではないことを明らかにした. ただし, このような修正を行った後でも, スケール指数の値は KPZ の固定点での厳密な値とは異なっていた.

この問題を克服するために, 我々は (2) 式のように  $D_d$  の項を付け加えた. その結果, パラメーター空間  $(F, G)$  は  $(F, G, H)$  に拡張される. RG flow 方程式 (15)-(17) の安定な固定点が,  $(F^*, G^*, H^*) = (10.7593, 680.652, 63.2614)$  にあることを見つけた.  $z$ ,  $\alpha$  の値は,  $d\bar{\nu}/dl = 0$ ,  $d\bar{D}/dl = 0$  より, 次の式から求めることができる.

$$z = 2 - \frac{G^*(3 + F^*)}{F^*(1 + F^*)^3} - \frac{H^*(1 - F^*)}{F^*(1 + F^*)^3}, \quad (18)$$

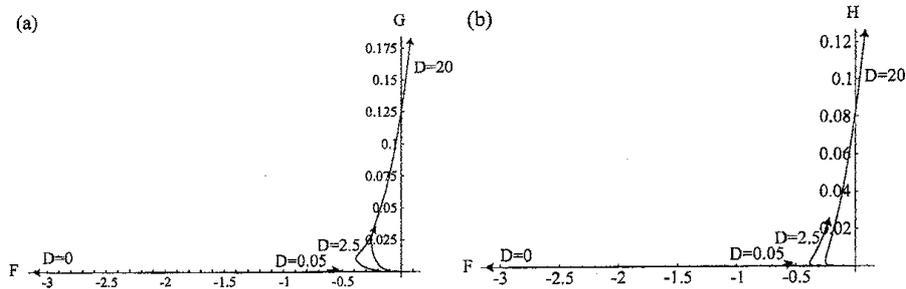


図1 パラメーター空間  $(F, G, H)$  での RG flow の軌道の (a)  $(F, G)$  平面への射影, (b)  $(F, H)$  平面への射影. 初期パラメーターは,  $\tilde{v}(0) = -1$ ,  $\tilde{K}(0) = 1$ ,  $\tilde{\lambda} = 1$ ,  $\tilde{D}(0) = D$  ( $D = 0, 0.05, 2.5, 20$ ),  $\tilde{D}_d(0) = 0$ .

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ z - 1 + \frac{G^*}{(1 + F^*)^3} \left( 1 + \frac{H^*}{G^*} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

上の  $(F^*, G^*, H^*)$  の値を用いると,  $z = 1.5$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 1/3$  となる. このスケーリング指数の値は, 完全に KPZ の固定点のものに等しい. (3) 式のガリレイ不変性により,  $\lambda$  は再スケール化しても不変なままである. 故に (12) 式から, スケーリング関係式  $\alpha + z = 2$  が得られる. 実際に, 上で求めた  $z$ ,  $\alpha$  の値はこの関係式を満たす.

図1は,  $0 \leq l \leq 2.4$  の範囲のくりこみ群変換による無次元パラメーター  $(F(l), G(l), H(l))$  の軌道を表示している. 4個の初期値,  $(-1/\Lambda_0^2, 0, 0)$ ,  $(-1/\Lambda_0^2, 0.05/(4\pi\Lambda_0^7), 0)$ ,  $(-1/\Lambda_0^2, 2.5/(4\pi\Lambda_0^7), 0)$ ,  $(-1/\Lambda_0^2, 20/(4\pi\Lambda_0^7), 0)$  に対する軌道を示している. ここで,  $\tilde{v}(0) = -1$ ,  $\tilde{K}(0) = 1$ ,  $\tilde{\lambda}(0) = 1$ ,  $\tilde{D}(0) = D$  ( $D = 0, 0.05, 2.5, 20$ ),  $\tilde{D}_d(0) = 0$ ,  $\Lambda_0 = \pi/\Delta x = \pi/0.5$  と設定した. これらの値は3節の数値計算でも使う.  $(-1/\Lambda_0^2, 0, 0)$ , すなわち  $\tilde{D}(0) = \tilde{D}_d(0) = 0$  の特別な場合を除いて, 残り3個の軌道はすべて同じ固定点  $(F^*, G^*, H^*) = (10.7593, 680.652, 63.2614)$  に近づく. さらに,  $(F(l), G(l), H(l))$  の RG flow は,  $D$  の強さが大きくなるほどはやく KPZ 固定点に近づくことがわかる. KS 方程式へ加えるノイズの大きさが増加するにつれて, KPZ スケーリングへ近いスケーリングの振る舞いが容易に観察されることを3節で数値的に確認する. 図1(a)の  $D = 20$  の軌道は,  $F < 0$  から  $F > 0$  へ符号が変化している. これは,  $\tilde{v}$  が負の値からくりこまれて正の値へ変化していくことを示している.  $D$  の値がいくら小さくてもゼロでなければ, RG flow の軌道は  $F$  軸から離れていく. もしスケールパラメーター  $l$  を時間に例えれば,  $D$  の値が非常に小さいとき, RG flow の軌道は長い時間  $F$  軸近傍に沿って負の方向に動き, あるところで右側に向きを変えて, 最終的には KPZ 固定点  $(F^*, G^*, H^*) = (10.7593, 680.652, 63.2614)$  に到着する. このことは,  $D$  の値が小さいときは, KPZ 固定点に到着するのに多くのくりこみ群変換をしなければならないことを意味する. この振る舞いは,  $\tilde{D}(0) = 0$ ,  $\tilde{D}_d(0) \neq 0$  でも同じであった.  $\tilde{D}(0) = \tilde{D}_d(0) = 0$  の場合は, (8) 式の  $\Sigma$ , (9) 式の  $\Phi$  はいつもゼロになるのでくりこみによる補正は存在しない. このとき, 初期値  $(-1/\Lambda_0^2, 0, 0)$  は  $(-\infty, 0, 0)$  へ行く. RG flow の軌道は常に図1の  $F$  軸上にあり, 決して KPZ 固定点へ到達できないことになる. この振る舞いを別のパラメーター空間  $(f(l), g(l), h(l))$  で表現すれば, 初期値  $(-1/\Lambda_0^2, 0, 0)$  は固定点  $(0, 0, 0)$  に近づく.

### 2.3 揺動散逸定理

ノイズのある KS 方程式から得られた有効方程式の線形部分から、もともとのスケールでの  $u$  の相関は、次のように表せる [5, 6].

$$C(k, \omega) = \frac{\langle u(k, \omega) u(k', \omega') \rangle}{(2\pi)^2 \delta(k + k') \delta(\omega + \omega')} = \frac{2(D(l)k^2 + D_d(l)k^4)}{\omega^2 + (\nu(l)k^2 + K(l)k^4)}. \quad (20)$$

一方、再スケール化された  $\tilde{u}$  の相関は、

$$\tilde{C}(\tilde{k}, \tilde{\omega}) = \frac{2(\tilde{D}(l)\tilde{k}^2 + \tilde{D}_d(l)\tilde{k}^4)}{\tilde{\omega}^2 + (\tilde{\nu}(l)\tilde{k}^2 + \tilde{K}(l)\tilde{k}^4)}, \quad (21)$$

で与えられる.  $C(k, \omega)$  と  $\tilde{C}(\tilde{k}, \tilde{\omega})$  は、スケール変換によって、 $\tilde{C}(\tilde{k}, \tilde{\omega}) = e^{(1-2\alpha-z)l} C(k, \omega)$  のように関係づけられる. このとき、このスケーリング解は、 $C(k, \omega) = k^{1-2\alpha-z} \Psi(\omega/k^z)$  となる. ここで、 $\Psi(x)$  はあるスケーリング関数である.  $z = 1.5$ ,  $\alpha = 0.5$  の値を代入すると、 $C(k, \omega) = k^{-1.5} \Psi(\omega/k^{1.5})$  となる. 従って、ノイズのある KS 方程式から得られた有効方程式のスケーリング解は、1+1 次元の KPZ 方程式 [1] と KS 方程式 [13, 11] に対するものと同じである. (20) 式から、もともとのスケールでの  $u$  のパワースペクトルは、次のように書ける.

$$E(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi} C(k, \omega) = \frac{D(l) + D_d(l)k^2}{\nu(l) + K(l)k^2} = \frac{D(l)}{\nu(l)} \frac{1 + \frac{H(l)}{G(l)} \left(\frac{k}{\Lambda(l)}\right)^2}{1 + \frac{1}{F(l)} \left(\frac{k}{\Lambda(l)}\right)^2}. \quad (22)$$

一方、再スケール化された  $\tilde{u}$  のパワースペクトルは、

$$\tilde{E}(\tilde{k}) = \frac{\tilde{D}(l) + \tilde{D}_d(l)\tilde{k}^2}{\tilde{\nu}(l) + \tilde{K}(l)\tilde{k}^2} = \frac{\tilde{D}(l)}{\tilde{\nu}(l)} \frac{1 + \frac{H(l)}{G(l)} \left(\frac{\tilde{k}}{\Lambda_0}\right)^2}{1 + \frac{1}{F(l)} \left(\frac{\tilde{k}}{\Lambda_0}\right)^2}. \quad (23)$$

で与えられる.

$E(k)$  と  $\tilde{E}(\tilde{k})$  は、スケール変換によって、 $\tilde{E}(\tilde{k}) = e^{(1-2\alpha)l} E(k)$  のように関係づけられる. そのとき、スケーリング解は、 $E(k) \propto k^{1-2\alpha}$  で与えられる. 固定点  $(F^*, G^*, H^*) = (10.7593, 680.652, 63.2614)$  から、 $H^*/G^* \approx 0.093$ ,  $1/F^* \approx 0.093$  となる. 従って、(23) 式から、 $\tilde{E}(\tilde{k}) = \tilde{D}^*/\tilde{\nu}^*$  となる. このことは、1+1 次元のノイズのある KS 方程式でも、長波長極限で揺動散逸定理が成り立つことを示している. もし、ノイズの相関に  $D_d$  の項を導入しなかった場合、(23) 式で  $H(l)$  の項がない形になる. このとき  $\tilde{E}(k)$  は、固定点で  $1/F(l) \neq 0$  のため、 $\tilde{k}$  に依存することになる. ノイズのない KS 方程式の数値シミュレーションでは、 $u$  の同時刻相関関数は、 $k \rightarrow 0$  の極限で一定値をとる [7, 8, 9].  $D_d$  の項は揺動散逸定理が成立するためには必要不可欠な項であり、くりこみ群解析の結果ともセルフコンシステントである.

## 3 くりこみ群の結果の数値計算による検証

KS 方程式の長距離、長時間の特性は KPZ 方程式のように振舞うことが期待されてきた. Sneppen らは、大きなシステムサイズ  $L$  で長時間、KS 方程式の数値シミュレーションを行った [8]. 彼らは、 $\langle (h - \langle h \rangle)^2 \rangle^{1/2} \sim t^\beta$  のダイナミックスケーリングを調べ、 $\beta = 1/4$  である Edward-Wilkinson スケーリングから KPZ スケーリン

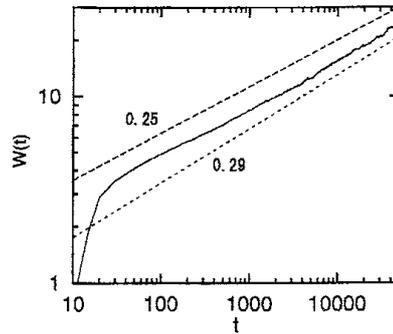


図2  $L = 200,000$  のノイズのない KS 方程式に対する  $W(t)$  の時間発展. 2本の破線は指数の値, 0.25 と 0.29 を表している.

グへのクロスオーバーを見つけたものの,  $\beta = 1/3$  である KPZ スケーリングをはっきりと見つけることはできなかった. KPZ スケーリングを検証するためにはもっと大きなシステムサイズと時間を要する数値シミュレーションが必要であった. しかし, 前節のくりこみ群解析は, ノイズを加えることによって容易に KPZ 固定点  $(F^*, G^*, H^*)$  に近づけることを示した. 故に,  $\beta = 1/3$  である KPZ スケーリングが, 中程度のシステムサイズでも, ノイズのある KS 方程式では数値的に観察されるものと期待できる.

KS 方程式の通常の数値シミュレーションでは, (1) または (3) 式の中にあるすべてのパラメーターは適当なスケール変換で 1 に選べる. 残された唯一のコントロールパラメーターはシステムサイズ  $L$  である [7, 8, 9, 10]. 一方, ノイズのある KS 方程式の場合は, 新たに  $D$  と  $D_d$  がコントロールパラメーターとして付け加わる. 我々は,  $\nu = -1, K = 1, \lambda = 1$  とおいて (1) 式の直接シミュレーションを行い,  $W(t) = \langle [h(x, t) - \langle h(x, t) \rangle]^2 \rangle^{1/2}$  の時間発展を調べた. 二つの場合  $D \neq 0, D_d = 0$  と  $D = 0, D_d \neq 0$  を調べたが, 同じような結果を得たので, 以下では  $D \neq 0, D_d = 0$  の結果のみを示す. この場合が, ノイズによる界面成長としてはより自然であるからである [15].  $\Delta x = 0.5, \Delta t = 0.005$  とし, Heun 法を使った. Sneppen らは,  $\Delta x = 1, \Delta t = 0.1$  とし, Euler 法を使っている. 周期境界条件を課し, 初期条件は  $h(x, 0) = 0$  とした.

図 2 は,  $L = 200,000$  の KS 方程式の  $W(t)$  の時間発展を表示している. 3 回のランに対してアンサンブル平均をとった. ここでは,  $D = 0.1$  のノイズが初期の  $0 < t < 0.5$  だけに加えられ,  $t > 0.5$  ではノイズを切って時間発展は決定論的な KS 方程式に従うとした.  $W(t)$  の両対数プロットは,  $W(t)$  がダイナミックスケール  $t^{1/4}$  にかなりよく従っていることを示している.  $W(t)$  が若干上方に曲がっているのは, おそらく KPZ スケーリングへのクロスオーバーを表しているのかもしれない.  $t \sim 50,000$  近くの指数の値は約 0.29 であり, まだかなり  $1/3$  より小さい. すなわち, 我々もまた,  $\beta = 1/3$  である KPZ スケーリングを KS 方程式からはっきりと確認することができなかった.

図 3 は,  $L = 20,000$  のとき, ノイズの強さを  $D = 0, 0.05, 2.5, 20$  と変えた KS 方程式に対する  $W(t)$  の時間発展を表示している. 10 回のランに対してアンサンブル平均をとった. ノイズの強さが増加するにつれて,  $W(t)$  の大きさは上方にシフトしている. これは, ノイズによって揺らぎが増加したためである.  $D = 0$  の決定論的な場合には,  $1/4$  のダイナミックスケールのみが観察され, この小さなシステムサイズと短い時間のシミュレーションではクロスオーバーは見ることが不可能である. ダイナミックスケール指数の値は,  $50 < t < 2000$  間のデータを使って最小二乗法より求め,  $\beta = 0.248$  となった.  $D = 0.05$  では, 時間発展はほとんど  $D = 0$  の場合と同じである.  $D = 2.5$  では, ダイナミックスケール指数の値は,  $\beta = 1/4$  から

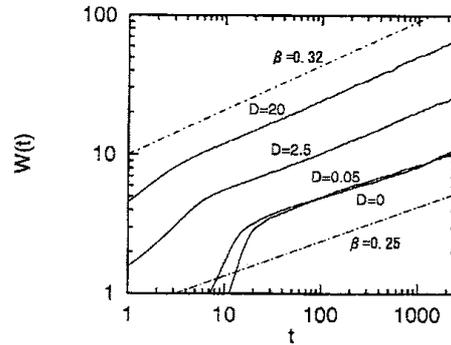


図3  $L = 20,000$  のとき,  $D = 0, 0.05, 2.5, 20$  のノイズのある KS 方程式に対する  $W(t)$  の時間発展.

$\beta = 0.3$  へ増加している.  $D = 20$  では, ダイナミックスケール指数の値は,  $50 < t < 2000$  間のデータを使って最小二乗法より  $\beta = 0.316$  と見積もられた. この値は KPZ スケール指数の値  $\beta = 1/3$  に近い. [8] のように,  $W(t)/t^\beta$  から  $\beta$  の値を,  $D = 0$  に対しては  $\beta \sim 0.25$ ,  $D = 20$  に対しては  $\beta \sim 0.315$  と見積ることもできた. この結果は, 図 2 で示したくりこみ群の結果とも首尾一貫している. その図は, KPZ 固定点へはノイズを加えることによって容易に近づけることを示していた. 図 2 に示したものよりもっと大きなシステムサイズで長い時間のシミュレーションを行うことができれば, KS 方程式 ( $D = D_d = 0$  の場合) に対する RG flow の軌道は KPZ 固定点に到達するであろう. しかし,  $D = D_d = 0$  のときは, RG flow の軌道は常に図 1 の  $F$  軸上にあり, 決して KPZ 固定点へは到達できない. これは, 前節の  $D = D_d = 0$  のときの RG flow の軌道と数値シミュレーションの間の定性的な違いであるが, 数値計算ではなんらかの数値誤差は常につきものなので軌道が  $F$  軸からずれるのかもしれない. そのとき, KS 方程式はノイズの非常に小さい KS 方程式とみなしていいかもしれない.

## 4 結論

保存的なノイズと非保存的なノイズをもつ 1+1 次元の KS 方程式に対してくりこみ群解析を行った. 保存的なノイズを新たに加えることによって, KPZ の固定点で得られるのと同じスケール指数を得ることができた. さらに, 保存的なノイズのおかげで, ノイズのある KS 方程式の場合も長波長極限で揺動散逸定理が成立することを示した. 以上のことから, 1+1 次元のノイズのある KS 方程式の長距離, 長時間での統計的性質は KPZ 方程式と等価であることが証明されたわけである.

これまでの KS 方程式の数値計算で KPZ のスケール指数を観察するのになぜ大きいシステムサイズと時間を必要としたのか, その理由が RG Flow を解析することによってはじめて明らかになった. KS 方程式に含まれるパラメーターの力学系を考察するという大局的な視点に立つと, 初期パラメーターを変化させても, 固定点への近づきかたが変化するだけで, 固定点そのものの値は変化せず, それから決まるスケール指数の値は同じになった. これは観測スケールにおける普遍性を表している. 故に, もし固定点が存在すれば, うまく初期パラメーターを選ぶことによってはやく固定点へ近づくことが可能であり, それは計算時間の節約につながる. ただし, 初期パラメーターを変化させると, くりこまれた個々のパラメーターの値は変化するのでこれらについては普遍的なことはいえなかった [18].

## 5 謝辞

This work was supported by a Grant-in-Aid for the 21st Century COE "Frontiers of Computational Science".

## 参考文献

- [1] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889 (1986).
- [2] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, Prog. Theor. Phys. **55**, 356 (1976).
- [3] G. I. Sivashinsky, Acta Astron. **4**, 1177 (1977).
- [4] V. Yakhot, Phys. Rev. A **24**, 642 (1981).
- [5] D. Forster, D. R. Nelson, and M. J. Stephen, Phys. Rev. A **16**, 732 (1977).
- [6] V. Yakhot and Z.-S. She, Phys. Rev. Lett. **60**, 1840 (1988).
- [7] S. Zaleski, Physica D **34**, 427 (1989).
- [8] K. Sneppen, J. Krug, M. H. Jensen, C. Jayaprakash, and T. Bohr, Phys. Rev. A **46**, R7351 (1992).
- [9] F. Hayot, C. Jayaprakash, and C. Josserand, Phys. Rev. E **47**, 911 (1993).
- [10] H. Sakaguchi, Prog. Theor. Phys. **107**, 879 (2002).
- [11] H. Fujisaka and T. Yamada, Prog. Theor. Phys. **57**, 734 (1977).
- [12] D. C. Leslie, *Developments in the theory of turbulence* (CLARENDON PRESS, OXFORD 1973).
- [13] V. S. L'vov, V. V. Lebedev, M. Paton, and I. Procaccia, Nonlinearity **6**, 25 (1993).
- [14] I. Procaccia, M. H. Jensen, V. S. L'vov, K. Sneppen, and R. Zeitak, Phys. Rev. A **46**, 3220 (1992).
- [15] R. Cuerno, H. A. Makse, S. Tomassone, S. T. Harrington, and H. E. Stanley, Phys. Rev. Lett. **75**, 4464 (1995).
- [16] A. Karma and C. Misbah, Phys. Rev. Lett. **71**, 3810 (1993).
- [17] R. Cuerno and K. B. Lauritsen, Phys. Rev. E **52**, 4853 (1995).
- [18] K. Ueno, H. Sakaguchi, and M. Okamura, Phys. Rev. E. in press
- [19] A.-L. Barabási and H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995).