

# チャンネル乱流における大規模構造に対応する 定常進行波解

京大院・理 藤 定義, 佐藤 海  
京大院・工 板野 智昭

## 1 はじめに

壁乱流では様々な秩序構造が観測されている。ここでは、その中から壁近傍層(粘性底層と緩和層)で観測される壁近傍構造(Near Wall Structure)と外層(緩和層より上部の層)で観測される大規模構造(Large Scale Structure)に限定して話を進める。この二つの構造は、それぞれ粘性長さ(壁近傍層の長さ尺度:壁単位,  $l_\tau$ )とチャンネルの半幅(外層の長さ尺度: $h$ )でスケールされる。従って高 Reynolds 数( $Re_\tau = h/l_\tau$ )では二つの長さスケールは大きく異なるが、その空間的な構造や性質は良く似ている。

本報告では、壁近傍構造と大規模構造が低 Reynolds 数での分岐を経て対で生まれる双子の解に対応することをチャンネル流において数値的に検証することを試みる。

### 1.1 壁近秩序傍構造

壁近傍構造は、Kline らによるバースト現象の発見以来 [1], 壁近傍での乱れ生成を支配する秩序構造として認識され、構造の同定と理解を目指した膨大な研究がなされてきた [2, 3]. 中でも, Jiménez と Moin によるミニマル領域を持つ流れ(以下, ミニマル流と呼ぶ)<sup>1</sup>の発見は研究の流れを大きく変えるものとなった [4]. それまでは秩序構造の統計的な同定や運動学的な理解が主流であったが, ミニマル流を用いた研究を通して壁近傍構造の動力学的な理解が進んだ。特に, Hamilton らによる乱流維持機構(以下, SSP と略する)<sup>2</sup>の発見 [5] に続き定常進行波や周期解が求められたことで, 壁近傍構造の空間構造や乱流生成機構の詳細がほぼ理解できたと言えよう [6, 7, 8, 9, 10, 11].

定常進行波解や周期解は双極型不安定解で, 流れ方向に波打った低速ストリーク<sup>3</sup>を中心にその両側に流れ方向を向いた符号が異なる渦構造が交互に並んだ空間配置を持っている。位相

<sup>1</sup>乱流を維持するために必要な最小の計算領域。スパン方向に平均ストリーク間隔である  $100l_\tau$ , 流れ方向におよそ  $500l_\tau$  の長さを持つチャンネルで, 1 個の低速ストリークとその向きが反対である 2 個の流れ方向渦が存在できる大きさになっている。Poiseuille 流と Couette 流の両流れが扱われている。その定義から壁近傍層だけを持つ乱流である。

<sup>2</sup>壁近傍構造が低速ストリークの不安定性-非線形発展-流れ方向渦形成-低速ストリーク再形成という一連の過程をサイクリックに繰り返すことで乱流が維持される。Hamilton らは, この過程を Self-Sustaining-Process, と SSP 名付けた。

<sup>3</sup>流れ方向の速度が周囲より低速な領域がスパン方向にほぼ一定の間隔で並んでいるために低速ストリークと呼ばれる。その平均間隔は  $100l_\tau$  であることが知られている。

空間を見ると、これらの不安定な数値的な厳密解は乱流アトラクターに埋め込まれている。乱流解の軌道は、双極型不安定な厳密解の安定な方向(マニフォールド)に沿ってこれらの厳密解に接近するために、不安定であるにも係わらず厳密解は乱流中に姿を現すことになる。

## 1.2 外層の大規模構造

大規模構造は、外層で観測される秩序構造である。その歴史は意外に古く50年代の終わりには Townsend は大規模構造の存在を認識していた [12, 2]。その存在が広く知られるようになったのは、計算機の発達と共に外層が十分に発達した数値シミュレーション (DNS と略す) が可能になった最近のことである [13, 14, 15, 16]。

大規模構造は、主にスペクトルピークから統計的に同定されており、スパン方向の長さが  $1.3h \sim 2h$  と見積もられている [15, 17, 18]。このことから分かるように、外層のスケールに従う。大規模な DNS では、スナップショットから大規模構造の空間構造を同定するのは難しいが、スペクトルピークは壁近傍層の低速ストリークに似た、流れ方向に低速な縞状領域の間隔に対応している。ただし、壁近傍構造に見られる流れ方向渦構造に対応する断面内の大規模な循環は相対的に弱い。

Jiménez らのグループによれば、大規模構造は外層を主に占める成分と壁近傍層にまで浸透する成分を持っており、いずれの成分も流れ方向の長さはチャンネルの半幅  $h$  に比べ非常に長い。特に、後者の流れ方向の長さは無限大と推測されている [17, 19]。

しかしながら、大規模構造は高 Reynolds 数、大規模な計算領域に特有の現象ではない。大規模構造を特徴づけるスペクトルピークは、 $Re_\tau$  が 100 近い DNS でも観測されている [15, 20]。すなわち、大規模構造は低 Reynolds 数に起源を持ち、そこでは壁近傍構造と区別が無くなってしまふことが示唆される。

## 1.3 Waleffe の定常進行波解と乱流遷移の有限安定性理論

Waleffe は、チャンネル流の定常進行波解がサドル・ノード分岐を経て発生することを初めて明らかにした [21]。(図 1 参照) Waleffe は、サドルとノードはそれぞれ上下の分枝解へと繋がるが、Reynolds 数が大きくなるにつれ上分枝解の長さスケールは小さくなり壁近傍に局在する傾向があること、逆に下分枝解は変化しないことを報告している [22]。また、位相空間では、上分枝は高 Reynolds 数で乱流に発展するアトラクターの内部に、下分枝解は上分枝を含むアトラクターと層流解のアトラクターを分けるセパトリック上にそれぞれ存在する。

この結果は、壁近傍構造と大規模構造がそれぞれ上下分枝に対応しており、低 Reynolds 数に起源を持ち対で発生すること、大規模構造は乱流と層流解のアトラクターのセパトリック上に存在することを示唆するものである。

話は跳ぶが、円管流や Couette 流の層流解は、全ての Reynolds 数に対して線形安定である。従って、乱流への遷移を理解するためには、有限の振幅を持つ攪乱を扱わなければならない。攪乱の空間構造が安定性解析に影響するが、その振幅依存性は漸近的に  $1/Re$  となることが実験的に得られている [23]。

Waleffe は、セパトリック上にある下分枝解を基本に、SSP に基づく形式的な摂動展開を用いてこの  $1/Re$  のスケージングを議論した [24]。図 1(c) に示したように、不安定化に必要な

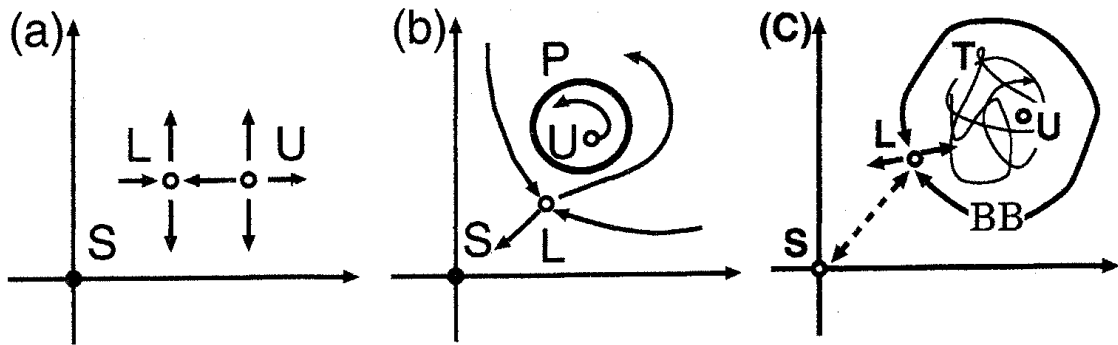


図 1: 位相空間の模式図. (a) サドル-ノード分岐で上分枝解 (U) 下分枝解 (L) が発生する. 層流解 (S) を原点に置いた. (b) 上分枝解は周期解に分岐する. (c) 周期解は更に分岐し乱流解が発生する. 本図では, 下分枝解は乱流解と層流解のセパトリックス (周期解の吸引域境界 BB (basin boundary)) 上に位置すると仮定している. Waleffe は, 層流解の非線形攪乱の振幅を評価するのに, 層流解と下分枝解との距離 (点線の矢印) を用いた.

な非線形攪乱の振幅を, 層流解と下分枝解の距離で評価したのである. ポイントは,  $1/Re$  を摂動パラメータとする振幅展開を行い, 空間スケールを一樣のままに置いた点にある. 壁がある流れでは境界層が形成されるので, 壁に垂直方向に境界層近似を用いるのが普通である. Waleffe の空間一樣な展開は, 高 Reynolds 数でも解はチャネル全体に一樣に広がっていることを要請している. すなわち, 大規模構造の持つ外層のスケールリングに従うことを暗黙の内に仮定しているのである.

SSP では, 流れ方向に依存しない 2 次元速度成分のうち, 流れ方向成分  $u_x^0(y, z, t)$  をストリーク, 流れ方向に垂直成分 ( $0, u_y^0(y, z, t), u_z^0(y, z, t)$ ) を縦渦成分とみなす. さらに, 流れ方向の波数  $k_x$  を持つ 3 次元攪乱成分 ( $u_x^1(y, z, t), u_y^1(y, z, t), u_z^1(y, z, t)$ )  $e^{ik_x x}$  が加わって, 最低次でつりあうとするのである. この結果, ストリーク成分のみ Reynolds 数によらず, 縦渦成分と 3 次元成分は  $1/Re$  のオーダーになることが分かる. つまり, Reynolds 数が大きくなると, 縦渦成分と 3 次元攪乱成分が  $1/Re$  で減衰するため, 流れ方向に一樣なストリーク成分が卓越することになる. この結果は, 前節で紹介した大規模構造の性質をうまく説明している. しかしながら, この摂動展開は形式展開であるので, 解の存在を仮定した上で摂動解が満たすべき条件を与えるに過ぎないことに注意して欲しい.

本来非線形攪乱の振幅のスケールリングを説明するために導入した SSP に基づく摂動展開は, セパトリックス上の解が大規模構造の性質をもつこと, Reynolds 数の増大と共に大規模構造のストリーク成分が卓越することを予言することとなった.

#### 1.4 流れ方向ミニマル流と大規模構造の抽出

以上のように, 壁近傍構造と同じく, 外層の大規模構造にも対応する定常進行波解や周期解が存在することが示唆される. これが事実ならば, 現実的な流れにおいて大規模構造が単独で自律的に存在することが許されることになる.

ミニマル流を使って壁近傍構造の動力学や厳密解が得られたことを思い出すと, 大規模構造の動力学を取り出すために流れに制限を加えることを思いつくであろう. 我々は, 流れ方向のみ乱流維持に必要なミニマル長さを持つ流れ方向ミニマル流を導入して, スパン方向の制限を

緩めることで大規模構造が存在できることを示した [20]. 詳細は論文に譲るが,  $Re_\tau = 349$  の場合に, 流れ方向長さをミニマル長さ  $384l_\tau$  とする一方, 流れ方向長さを通常のミニマル流の 8 倍強に当たる  $884l_\tau$  と設定した計算領域を用いた DNS を行った. 大規模構造が存在できることに加えて, 複数の壁近傍構造が共存して大規模構造と相互作用を行うことを見出し, これを Co-supporting Cycle (CSC) と名付けた.

流れ方向ミニマル流は, Poiseuille 流の層流解の線形安定性と密接に関係している [25]. 周知のように, この層流解は臨界 Reynolds 数を越えると不安定となるが, 流れ方向の長さを制限することで不安定モードを排除することができる. つまり, 流れ方向ミニマル流では層流解は常に線形安定となっている.

この事実を利用して, 大規模構造に対応すると思われるセパトリックス上の解を求めることが可能になる. すなわち, Newton 法が使えない相対的に高 Reynolds 数の流れに対しても, 後述するシューティング法が使えるようになる. この制限は一見強いように思われるが, 全ての Reynolds 数に対して層流解が線形安定である Couette 乱流では常に成り立つことであるから, 乱流特性を質的に変えることはないと思われる.

## 2 数値計算手法とシューティング法

本報告では, 流量一定の条件で駆動されるチャンネル乱流を数値的に解き解析した. チャンネルの流れ方向を  $x$  軸, 壁に垂直方向を  $y$  軸, スパン方向を  $z$  軸とする座標を用いた. 上下の壁は  $y = \pm h$  と置いている.

計算スキームは, 空間方向に対し, 壁に垂直な方向にチェビシェフ多項式展開, 流れ方向とスパン方向にフーリエ級数展開をそれぞれ用いるスペクトル法を使った. エイリアジング誤差は, それぞれ  $1/2$  位相シフトを用い取り除いた. 時間発展は, 2次精度のアダムシュ・バッシュホース法とクランク・ニコルソン法を組み合わせている [26, 9].

Navier-Stokes 方程式の解を数値的に求めるためには, Newton 法を用いるのが定石である. しかし, 外層と内層のスケール差が顕著になる Reynolds 数では, Newton 法は現有の計算機能力をはるかに越える計算量を必要とするので事実上使えない. 本報告では, Poiseuille 流に対して周期解や定常進行波解を得るのに文献 [9] で導入されたシューティング法を流れ方向ミニマル流に適用する.

ここで用いるシューティング法は, 図 2 に示すように, 乱流アトラクターと層流アトラクターの境界であるセパトリックス上にある安定な解を DNS を用いて求める手法である.

初期条件を定義するのに必要なので, 次のような速度  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  の 2次元 (流れ方向平均) 成分と 3次元成分を定義しておこう.

$$\mathbf{u}^{2D}(y, z, t) = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dx, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}^{3D}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^{2D}(y, z, t). \quad (2)$$

更に, 定義した 2次元と 3次元速度成分の各方向の単位体積当たりのエネルギーを, 次のように定義しておく. ただし,  $V$  はチャンネル全領域を表し,  $\alpha$  は 2D か 3D を区別する添字,  $i$  は空

間方向を区別する添字である。

$$E_i^\alpha = \frac{1}{2V} \int_V (u_i^\alpha)^2 dV \quad (3)$$

それぞれの速度成分に対応する単位体積当たりの運動エネルギーを2次元エネルギー、3次元エネルギーと呼ぶことにする。

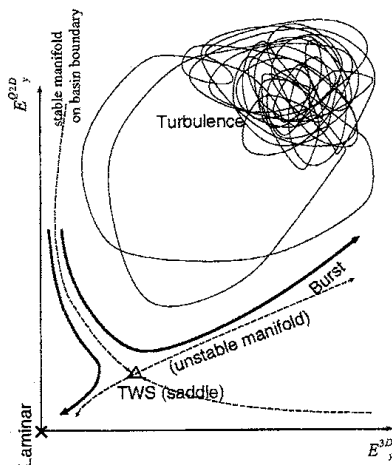


図 2: チャネル乱流の位相空間の模式的な描像. 原点に層流解を置いた. 定常進行波解は, 層流解と乱流解のセパトリックス上にある.

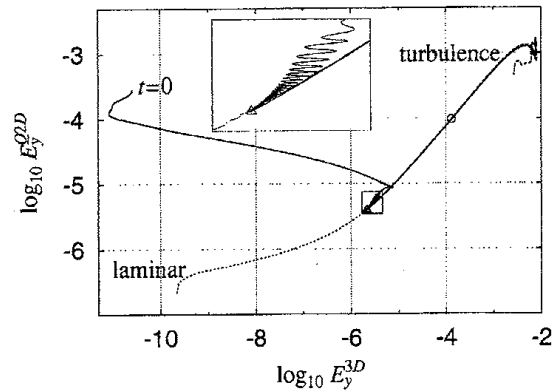


図 3: 定常進行波解 ( $\Delta$ ) へ接近した後, 層流解と乱流解に漸近する解軌道を描いた.  $Re = 3000$ . 図 2 の左上のセパトリックス近傍の層流側と乱流側をそれぞれ初期条件に取った解軌道である. 定常進行波解に対応する固定点近傍を拡大した図を加えた.

初期条件では, 以下のように適当な速度場  $U$  を 2次元成分と 3次元成分に分解し, 3次元成分の規格化した振幅  $f_A$  をパラメータとする.

$$\mathbf{u}^{int}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^{2D}(\mathbf{x}) + f_A \mathbf{U}^{3D}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

初期条件に用いる  $U$  はセパトリックスの近傍に選び, セパトリックス近傍に留まるように, つまり乱流にも層流にも漸近しないように, 初期条件に与えたパラメータ  $f_A$  を調節する. この手法では, セパトリックス上では安定でセパトリックスを過る1つの方向に対してのみ不安定な解しか原理的に求めることができない. もし, そのような解が存在すれば, その解に漸近することになる.

当然だが, 適切な初期条件を選ぶことが最も重要である. 低 Reynolds 数の試行に対しては, SSP のストリークの不安定性を利用している. 詳細は文献 [9, 11] に譲るが, 片側の壁にストリークを形成する対の縦渦を与え, 3次元攪乱の振幅をパラメータとしている.  $Re \geq 8000$  では,  $Re = 7000$  で得た定常進行波<sup>4</sup>を 2次元成分と 3次元成分に分け, 3次元成分の振幅をパラメータとして用いている.

具体例として,  $Re = 3000$  での定常進行波解と周期解を紹介する. 図 3 にはシューティング法で得た定常進行波解に接近した後, それぞれ層流解と乱流解に漸近する 2本の解軌道が描かれている. ただし, 位相空間は  $E_y^{Q2D}$  と  $E_y^{3D}$  で張られる 2次元空間へ射影したものである.

<sup>4</sup>この定常進行波は厳密な解ではない. その定義は 3.1 節を参照.

ここで得た定常進行波解は、実は時間周期解の一部であることが後に明らかになった [11]. この周期解は、セパトリックス上で双曲不安定な二つの定常進行波解を結ぶヘテロクリニック軌道かそれに近い周期解であると考えられる. 位相空間の軌道を図2に描いた. 実は、周期解はこの閉じた軌道を2週して閉じることに注意して欲しい.

軌道上 (正確には近傍) にある2個の双曲不安定な定常進行波解はスパン方向に位相が $\pi$ だけずれた空間構造をしている. エネルギーを用いることでこの位相の違いが見えなくなっている. 軌道上には、通過時間が等しくなる時刻に3個の記号を描いた. 定常進行波解は軌道上の▲に近いところにあり、この近傍の長時間滞在することからも定常進行波解が双曲的であることが理解できるであろう.

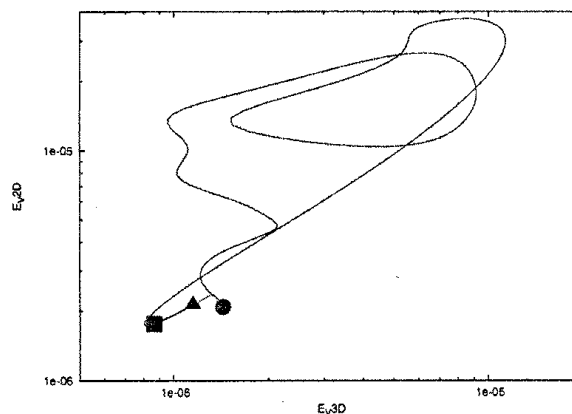


図4:  $Re = 3000$  で得た周期解の軌道. 解は、記号●, ▲, ■をこの順に巡り、その間の通過時間は等しくなるように選んだ. 図3の定常進行波解は▲の近くにある.

次章では、定常進行波解の Reynolds 数依存性を議論する. 本報告で用いた DNS の数値パラメータを表1にまとめておく.

	$Re$	$Re_\tau$	$L_x(L_x^+)$	$L_z$	$N_x \times N_y \times N_z$
MF:PS	3000	—	$\pi$	$0.4\pi$	$32 \times 65 \times 32$
MF:乱流解	3000	130	$\pi$	$0.4\pi$	$32 \times 65 \times 32$
SMF:TWS	4000 – 8000	—	$\pi$	$1.3h$	$32 \times 65 \times 32$
SMF:TWS	9000	—	$0.15\pi, 0.35\pi, \pi$	$1.3h$	$32 \times (65, 129, 257) \times 32$
SMF:乱流解	9000	349	$0.35\pi$	$1.3h$	$32 \times 129 \times 64$
SMF:乱流解	9000	300	$0.15\pi$	$1.3h$	$32 \times 129 \times 64$

表1. MF: ミニマル流, SMF: 流れ方向ミニマル流, PS: 周期解, TWS: 定常進行波解.  $N_x, N_y, N_z$  は各方向のモード数. 流れ方向ミニマル流では、精度チェックのために複数の  $N_y$  で計算している.

### 3 シューティング法の結果

結論を先に述べると、厳密な意味では定常進行波解や周期解は得られなかった. これは、今回用いた初期条件からはセパトリックス上の定常進行波解と周期解には漸近できず、むしろ

準周期解やカオス解に吸引されたことによると思われる。ただし、 $Re = 3000$  の場合の周期解のように、セパラトリックス上でも双曲不安定な定常進行波解が存在する可能性を示唆する結果が得られた。また、カオス解と思われる解に吸引され非常に長時間セパラトリックス上に保つことができた。以下、過渡的に得られた定常進行波と非周期的な解について報告する。

### 3.1 $Re = 9000$ の結果

今回行ったシューティング法の結果を概観するために、 $Re = 9000$  の結果を詳細に報告する。図5にシューティングの結果を描いた。先に述べたように、今回はセパラトリックス上で安定な定常進行波解は得られなかった。しかし、 $Re = 3000$  での周期解が双曲不安定な定常進行波解を含んでいたように、軌道上▲記号の周辺に相対的に長時間滞在する双曲的な振舞いをする領域がある。本報告では、この領域を定常進行波と呼ぶことにする。初期条件  $U$  は、 $Re = 7000$  で得たこの意味での定常進行波である。図5右図は、 $f_A = 5.65418858681741 \times 10^{-1}$  で得られたもっとも長時間セパラトリックス近傍に滞在した軌道を期間  $[T_0, T_6]$  の間描いたものである。ここで、 $T_i = 187.5i$  と置いた。以下、この解を R90A と呼ぶ。

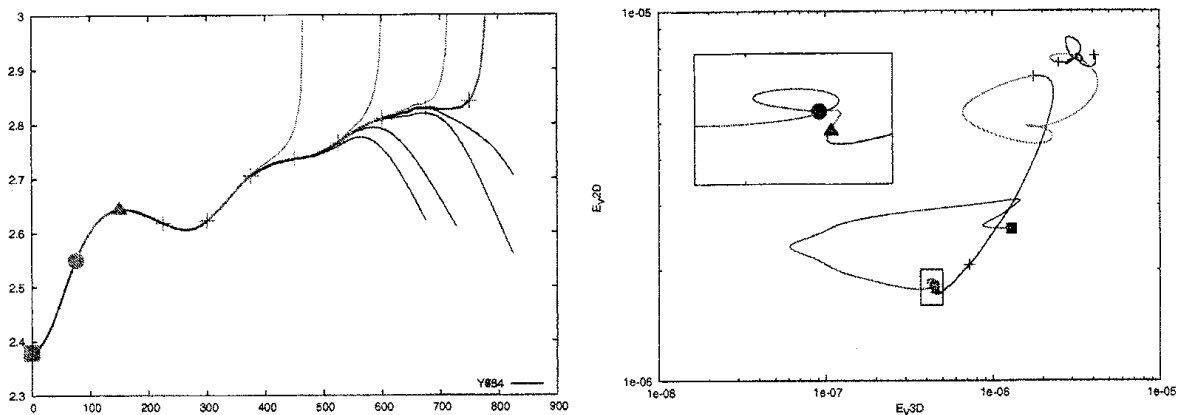


図5:  $Re = 9000$ ,  $L_x = 0.35\pi$  の場合のシューティングの結果。左図は異なる  $f_A$  に対する  $y = -1$  の壁での(壁面摩擦応力/粘性係数)の時間発展。記号が描いてあるものが、もっと精度良くシュートした解 R90A である。記号は、時刻  $T_i$  毎に描いている。この曲線を挟んで、値が増大する曲線はセパラトリックス上から乱流に漸近する解を、減少する曲線は層流解に漸近する解をそれぞれ表す。シューティング法は、乱流解と層流解に漸近しないように初期値のパラメータを選ぶことでセパラトリックス上の解を求める手法である。右図は、 $E_y^{2D}$  と  $E_y^{3D}$  で張られる位相空間で R90A の軌道を示した。ただし、時刻は、 $T_6$  までである。記号は左図と対応している。●と▲周辺軌道を拡大図に描いた。

図6に定常進行波のスナップショットを描いた。上下の2枚の等高線に沿った曲面は、流れ方向速度の等値面である。下側の等値面は中央に高いピークを持つことから低速域であることが分かる。このピークを挟む局面は流れ方向渦度の強い領域を表す。グレースケールの図では分かりにくいですが、進行方向右側の縦渦は正の、左側の縦渦は負の渦度を持っており、低 Reynolds 数で得られた壁近傍層の定常進行波解と良く似た構造になっている。 $Re_\tau = 349$  であるので、壁近傍層の厚さはチャンネル半幅  $h$  の約  $1/7$  である。この定常進行波は、壁近傍層の構造に非常に良く似た空間パターンを持っているが、壁近傍層に比べ10倍程高く外層に広がっていることが分かる。また、壁近くには粘性スケールの構造が存在していないことにも注意して欲しい。

R90A の軌道は定常進行波を過ぎてもセパトリックス上に滞在する。図7にその時間帯の軌道を  $Re = 3000$  で得られた周期解の軌道と共に描いた。一見して分かるように、R90A の軌道は位相空間内を複雑に経巡っている。この解が準周期解かカオス解であるかはいまのところ不明である。

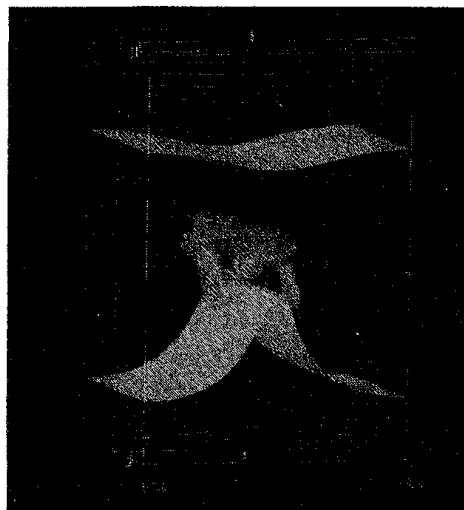


図 6:  $Re = 9000$ ,  $L_x = 0.35\pi$ ,  $L_z = 1.3h$  に対する定常進行波. 等値線は, 流れ方向速度を表す. 流れの方向は手前から奥である. チャンネルの下側領域に低速領域が, その上部左側に正の縦渦, 右側に負の縦渦がある.

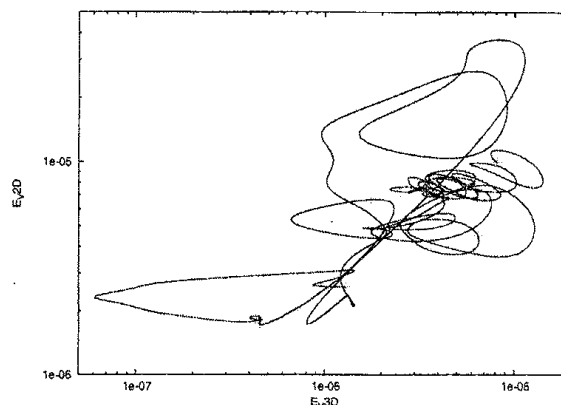


図 7:  $E_y^{2D}$  と  $E_y^{3D}$  で張られる位相空間での R90A の軌道. セパトリックス近傍に滞在する時間  $[T_0, T_9]$  を描いた. 比較のために,  $Re = 3000$  で得られた周期解の軌道と一緒に描いた (図 4 参照).

### 3.2 定常進行波の Reynolds 数依存性

今回報告する Reynolds 数の範囲では, 厳密な定常進行波解は得られていない. 前節で述べたように, 解軌道がセパトリックス上の双曲不安定な定常進行波解の近傍に暫時滞在したと思われる時間帯がある. この時間帯の解を定常進行波と呼ぶことにした. この意味での定常進行波の Reynolds 数依存性を調べよう.

図 3.2 に  $Re = 4000$ ,  $8000$  と  $9000$  で得た定常進行波の流れ方向速度と渦度の 2 次元成分を描いた. チャンネルの下側半分を占める定常進行波は, Reynolds 数に依らずほぼチャンネルの半幅程度の高さがあることが分かる. 縦渦は, 流れ方向速度の低速域が作るピークの中央両側に位置していることが分かる. このことから, セパトリックス上の定常進行波は, 外層長さでスケールできる大規模構造の特徴を持つことが理解できるであろう.

図 9 にエネルギーの各成分の Reynolds 数依存性を示した. 1.3 節で紹介した Waleffe の摂動展開では, 低速ストリーク成分は  $Re$  に依らず, 縦渦成分 ( $u_y^{2D}, u_z^{2D}$ ) と 3 次元攪乱成分は  $1/Re$  のオーダーと与えられた.

ここでは, 簡単のため, 2次元エネルギーと3次元エネルギーそれぞれの各方向成分の Reynolds 数依存性を調べた.  $Re$  が大きければ, 2次元エネルギーの各成分は低速ストリークと縦渦成分の 2 乗に, 3次元エネルギー成分は乱れ成分の 2 乗にそれぞれ比例するはずである. 図 9 では,



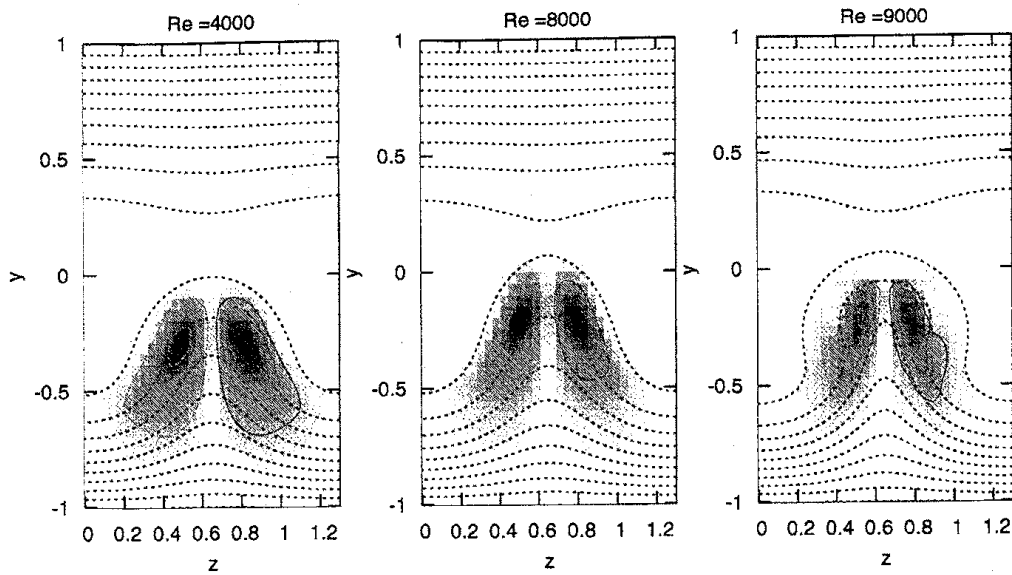


図 8:  $Re = 4000, 8000$  と  $9000$  での定常進行波.  $Re = 4000, 8000$  は,  $L_x = \pi$ ,  $Re = 9000$  は,  $L_x = 0.35\pi$  である. 陰のある領域は流れ方向渦度の絶対値が大きい領域を表している. 点線は, 流れ方向速度の 2 次元成分 ( $v_x^{2D}$ ) の等値線.

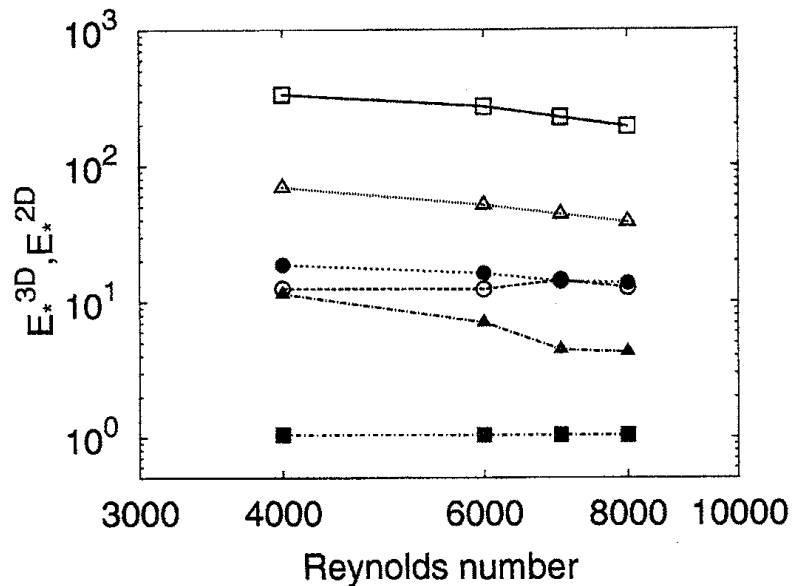


図 9:  $Re = 4000, 8000$  と  $9000$  の定常進行波に対するエネルギー各成分の Reynolds 数依存性. ■:  $E_x^{2D}$ , □:  $E_x^{3D} Re^2$ , ●:  $E_y^{2D} Re^2$ , ○:  $E_y^{3D} Re^2$ , ▲:  $E_z^{2D} Re^2$ , △:  $E_z^{3D} Re^2$ . Waleffe の理論との比較のために,  $E_x^{2D}$  以外は, すべて  $Re^2$  を掛けている.

低速ストリークに対応する2次元エネルギーの流れ方向成分を除き  $Re^2$  を掛けている.  $Re$  の範囲が狭いためスケージングははっきりしないが, Waleffe の摂動の予想とは矛盾しない結果を与えている.

### 3.3 セパラトリックス上の解の性質

シューティングで得たセパラトリックス上の軌道は, 単純な周期軌道ではなくカオス解の可能性が高い. しかしながら, セパラトリックス上では外層のスケールに従うことが予想される. これを確認するために, 3.1 節で紹介した R90A の軌道について, 定常進行波を含む期間  $[T_1, T_3]$ , 比較的発展が穏やかな期間  $[T_3, T_6]$ , 変動が早い期間  $[T_6, T_9]$  の3期間で時間平均を取った流れ場を図 3.2 と同じ形式で図 10 に示した.

全ての場合に, 構造がチャンネル下半分にあることが見て取れる. これは, 少なくとも軌道 R90A が被うセパラトリックス上の領域は外層の特性を持つことを意味する. 壁近傍層での乱れ生成過程が, 乱流アトラクターの内部に埋め込まれた不安定な周期解で理解できることと対称的である. この対称性を拡大解釈すると, 外層の内部層から独立した自律的なダイナミクスが存在することが示唆される. この外層の自律性は, セパラトリックス上でしか確認できていない.

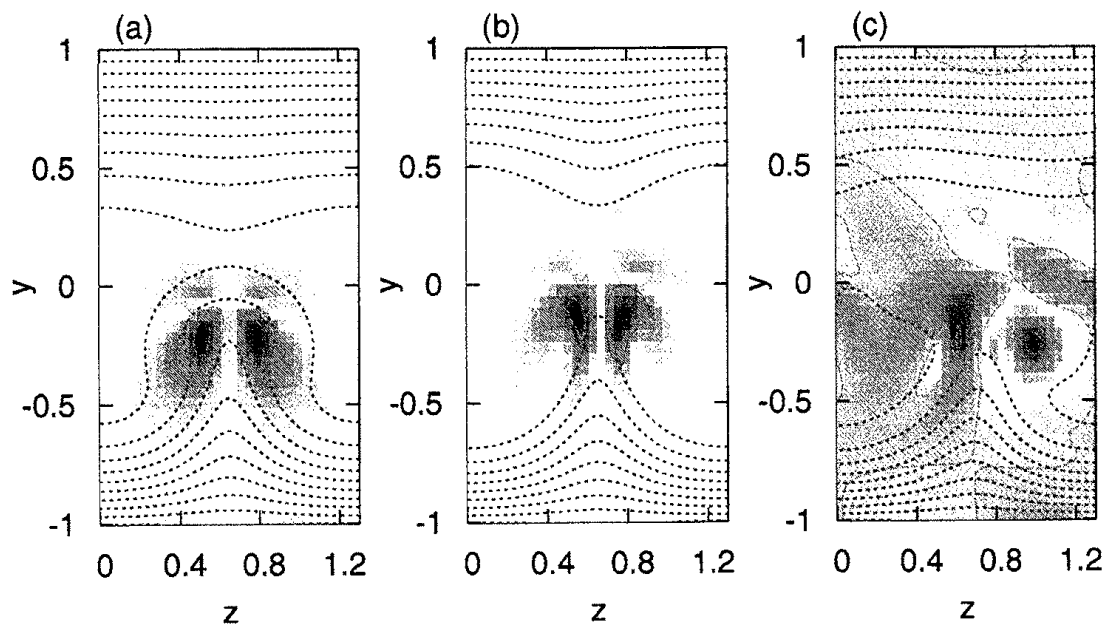


図 10: 軌道 R90A の区間  $[T_i, T_j]$  の時間平均場. ( $T_i = 187.5i$ ) (a)  $[T_1, T_3]$  (図 5 右図の軌道の●から最初の+まで) (b)  $[T_3, T_6]$  (図 5 右図の軌道の最初の+から最期まで) (c)  $[T_6, T_9]$ .

### 3.4 流れ方向ミニマム乱流との比較

前節では, セパラトリックス上の軌道が外層のスケールに従うことを示した. このことは, 外層の大規模構造 (大規模構造) が自律的であることを示唆する. この節では, 乱流中の大規模構造がセパラトリックス上の解と関連があるか DNS の結果と比較する. ここでは,  $Re = 9000$ ,

$L_x = 0.15\pi$ ,  $L_z = 1.3h$  の流れ方向ミニマル流で得られた過渡的な乱流解 (以下, D90TM と呼ぶ) を扱う. 図 11 に (壁摩擦応力/粘性係数) の時間発展を示した. 図 12 のスナップショットからも分かるように, チャンネルの上側は大規模構造的な空間的・時間的に緩やかな変動が励起される. 一方, 下半分は低速ストリークが形成されていることから分かるように壁近傍層が形成されている.

この流れ方向ミニマル流は  $Re_\tau \sim 300$  なので,  $L_z \sim 400l_\tau$ ,  $L_x \sim 140l_\tau$  となる. これまで報告されている流れ方向のミニマル長の半分以下であることに注意して欲しい. 流れ方向ミニマル流は, スパン方向の制限を緩めているために流れ方向のミニマル長が短くなったと思われる. ここで流れ方向の制限を強めた理由は, バックグラウンドの乱れが弱まり大規模構造が顕在しやすくなると予想されることにある.

以下, 時間平均量を用いて乱流とセパトリックス上の軌道の比較を行う. 図 13 に流れ方向速度の平均と乱流強度を示した. セパトリックス上の軌道として, R90A の他に, D90TM と同じ計算領域を用いてシューティングを行って得たセパトリックス上の軌道 (以下, R90B と呼ぶ) も比較に用いた. ただし, 図中 R90A と R90B は乱流との比較のために  $y$  方向を反転している.

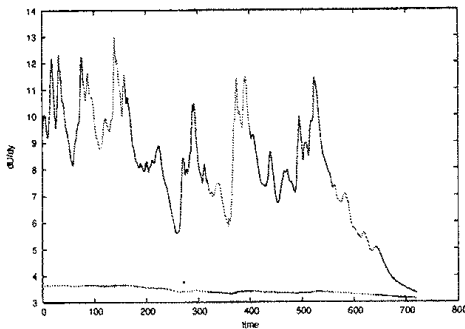


図 11:  $Re = 9000$ ,  $L_x = 0.15\pi$  の流れ方向ミニマル流.  $y = \pm 1$  の壁での (壁面摩擦応力/粘性係数) の時間発展. ただし, 前半の時間  $[0, 1000]$  の発展は省略した. チャンネルの下半分が乱流状態である, いわゆる片側乱流が実現されるが, これは過渡的なものである. 上半分はミニマル乱流の片側乱流の場合とは異なり, 層流解ではなく大規模構造に近いと思われる外層スケールの構造が形成されている.

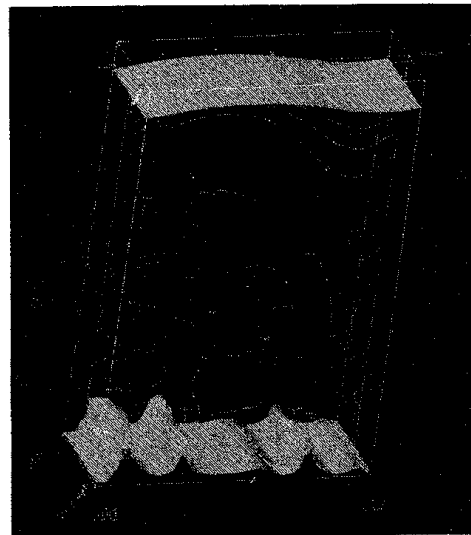


図 12: 図 11 の乱流状態のスナップショット. 等値面は流れ方向速度を表す. 下側で低速ストリークが形成されている様子が見て取れる. 一方, 上側は定常進行波に似た空間構造を持つ.

シューティングで得た解 R90A と R90B の平均流は, チャンネルの下半分ではいずれも層流解にほぼ等しい. 一方, 乱流解 D90TM は, チャンネルの下半分は発達した壁乱流の平均流にほぼ等しく, 上半分では層流解よりもセパトリックス上の軌道の平均流に近い. このことは, 図 12 のスナップショットからも予想された結果である. スナップショットではチャンネルの下半分でも大規模構造らしいものが見えるが, 平均流にはその影響は確認できない. つまり, 流れ方向ミニマル流を用いても, 平均流では外層の大規模構造の寄与を顕在化することができ

ない。しかし、これは大規模構造の寄与が無いことを意味するのではないことに注意して欲しい。通常のミニマル流では外層は再現できないのであるから、外層の平均流が再現できたことは、むしろ大規模構造が平均流に対しても重要であることを示唆するものである。

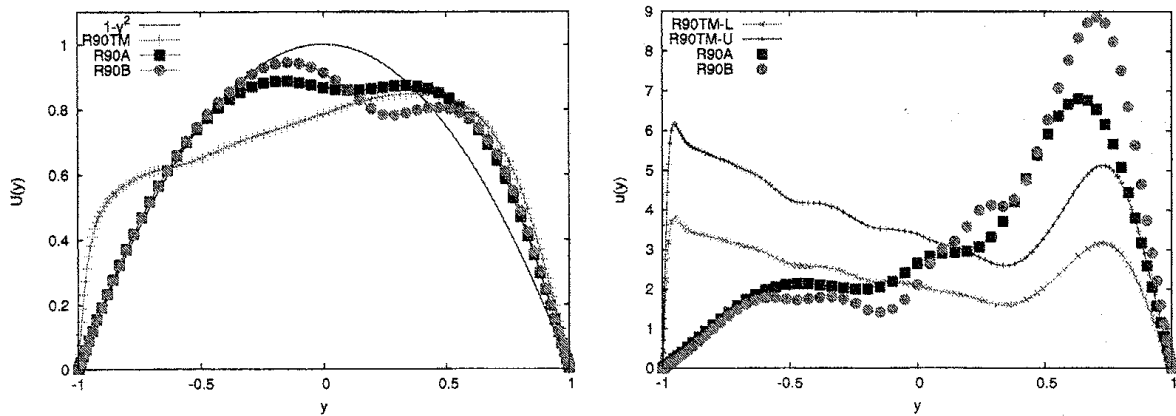


図 13: 左図は流れ方向速度の時間平均。+ : 乱流解 R90TM, ■ : R90A, ● : R90B, 実線は層流解。右図は流れ方向速度の乱流強度。+ : 乱流解 R90TM(下側の壁摩擦速度で規格化), × : 乱流解 R90TM(上側の壁摩擦速度で規格化), ■ : R90A, ● : R90B。

流れ方向の乱流強度に対しても、平均流とほぼ同じことが結論できる。乱流の場合、乱流強度を表す曲線が2本描いてある。これは規格化に用いる壁摩擦速度が上下の壁で異なるためである。当然ながら、上側の壁摩擦速度を用いて規格化の方がシューティングの結果により近い。ただし、乱流の乱流強度は半分程度である。チャンネルの下側半分では乱流の乱流強度は変動している。大規模構造の影響が現われている可能性もあると思われるが、平均時間が足りないことが原因かもしれない。詳細な研究が必要であろう。

## 4 まとめ

本報告では、これまでの研究結果を踏まえて以下のことを予想した。

1. 外層の大規模構造に対応する定常進行波解や周期解が存在する。
2. これらの解は、低 Reynolds 数で壁近傍構造に対応する定常進行波解と対で発生する。
3. 大規模構造に対応する解は乱流解と層流解のセパトリックス上にある。

この予想、特に3.を確かめるために、シューティング法を用いて解を求めることを試みた。Poiseuille 流では、層流解が臨界 Reynolds 数を越えると線形不安定となるので、流れ方向の長さ制限を加えた流れ方向ミニマル領域を用いて層流解を安定化した。

シューティング法を用いて、定常進行波解らしい解が存在することを示唆する結果を得た。ただし、この解はセパトリックス上でも双曲不安定な解であると思われる。この解に接近した場合に解を定常進行波と呼んだ。定常進行波は、チャンネルの半分の領域を占めており、外層のスケールに従う。更に、定常進行波の Reynolds 数依存性は Waleffe の摂動展開の予想に矛盾しない。ただし、Reynolds 数の範囲が狭いためスケールリング則は確定できていない。

セパラトリックス上の軌道は追跡できるが、準周期解かカオス解のように軌道は閉じておらず複雑である。この軌道上の解は定常進行波と同様に外層のスケールに従うことを示した。このことから、外層の大規模構造は外層で閉じた、すなわち内部層とは独立な、ダイナミクスに従うことが示唆される。

このような自律的と思われる外層の大規模構造に対応する解が、壁近傍構造のように乱流中でも役割を担うか調べるために、流れ方向長さを  $140l_r$  に取ることで強く制限した流れ方向ミニマル流と比較した。流れ方向に制限を加えることでスナップショットでは定常進行波に近い構造が確認できるが、平均場に対しては大規模構造の寄与は顕在することはなかった。先にも述べたように、これは、大規模構造が乱流に寄与していないことを意味しない。外層を再現できないミニマル流との比較から、むしろ大規模構造の存在が乱流統計を決めていると言えるであろう。大規模構造の寄与を顕在させる技法の開発が望まれる。変動が緩やかなチャンネルの上半分の統計は、セパラトリックス上の解軌道の平均で比較的良く近似できる。このことは、現実的な流れも大規模構造に対応する解の影響を受けていることを示唆するものである。

以上、流れ方向のみミニマル長さにとることで、外層の大規模構造に対応する解がセパラトリックス上に存在し、現実的な乱流中でも寄与を持つことを示唆する結果を得た。この結果が普遍性を持つかどうか、大規模構造がどのような役割を担うかについては非常に興味深い課題である。いずれも今後の課題である。

## 参考文献

- [1] KLINE, S.J., REYNOLDS, W.C., SCHRAUB, F.A. & RUNSTADLER, P.W., *J. Fluid Mech.* **30** (1967) 741-773.
- [2] TOWNSEND, A.A., *The structure of turbulent shear flow* Cambridge Univ. Press (1976).
- [3] ROBINSON, S.K., *Ann. Rev. Fluid Mech.* **23**(1991) 601-639,
- [4] JIMÉNEZ, J. & MOIN, P. *J. Fluid Mech.*, **225** (1991) 213.
- [5] HAMILTON, J.M., KIM, J., & WALEFFE, F., *J. Fluid Mech.*, **287** (1995) 317.
- [6] WALEFFE, F., *Phys. Rev. Lett.* **81**(19)(1998) 4140-4143.
- [7] JIMÉNEZ, J. & PINELLI A., *J. Fluid Mech.* **389**(1999) 335-359.
- [8] WALEFFE, F., *J. Fluid Mech.* **435**(2001) 93-102.
- [9] ITANO, T. & TOH, S., *J. Phys. Soc. Japan*, **70** (2001) 703.
- [10] KAWAHARA, G. & KIDA, S., *J. Fluid Mech.* **449**(2001) 291-300.
- [11] TOH, S. & ITANO, T., *J. Fluid Mech.* **481**(2003) 67-76.
- [12] TOWNSEND, A.A., *Boundary Layer Research*, edited by H. Gortler (Springer-Verlag, Berlin, 1958) Vol. 1.

- [13] MIYAKE, Y., KAJISHIMA, T. & OBANA, S., *JSME Int. J.* **30**(1987) 57-65.
- [14] LEE, M.J. & KIM, J., *Proc. 8th Symposium on turbulent shear flows* (1991) 5-3.
- [15] JIMÉNEZ, J., *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs* (1998) 137-154.
- [16] ADRIAN, R.J., MEINHART, C.D. & TOMKINS, C.D., *J. Fluid Mech.* **422** (2000) 1-51.
- [17] DEL ÁLAMO, J.C. & JIMÉNEZ, J., *Center for turbulence Research Annual Research Briefs* (2001) 329-341.
- [18] ABE, H., KAWAMURA, H. & MATSUO, Y., *Trans. ASME J. Fluids Eng.* **123**(2001) 382-393.
- [19] DEL ÁLAMO, J.C. & JIMÉNEZ, J., *Phys. Fluids* **15**(2003) L41-44.
- [20] TOH, S. & ITANO, T., *J. Fluid Mech.* **524**(2005) 249-262.
- [21] WALEFFE, F., *Phys. Fluids* **9**(4)(1997) 883-900.
- [22] WALEFFE, F., *Phys. Fluids.* **15**(6)(2003) 1517-1534.
- [23] HOF, B. *et al.* , *Science* **305**(2004) 1594-1598.
- [24] WALEFFE, F. *Proc. of IUTAM Symposium in Bristol 2004* (2005).
- [25] DRAIZIN, P.G. & REID, W.H., *Hydrodynamic Stability.* (1981) Cambridge University Press.
- [26] KIM, J., MOIN, P. & MOSER, R., *J. Fluid Mech.* **177**(1987) 133-166.