

ウエーブレットを用いた粗面の分解と創成

福井工業大学 三宅 裕(Miyake Yutaka)、 藤井貴広(Fujii Takahiro)
Fukui University of Technology

1. まえがき

面の粗さはその上を流れる乱流の構造を大きく変え、摩擦抗力と熱伝達の大きさを変える。したがって、面の粗さを考慮に入れた解析が必要であるが、粗さ要素の寸法は一般には流れ場の寸法に比べて大幅に小さく、高さ方向のみならず、流れ方向にも幅方向にも短い波長で変化する。これを計算条件に採り入れるには何らかのモデル化が必要である。平均流に対しては、砂粒粗さの場合は壁指標で表される平均粗さ高さ y_s^+ がパラメータに用いられ、周期定型粗さでも等価砂粒粗さ高さが用いられる。長い粗面管のように、粗面が無限領域に広がっているか、周期的である場合はこのような単純なパラメータが有用であり得るが、工業の実際で現れる粗面は局在化した粗面部分である場合や滑面に隣接する場合が多い。この場合は粗面を孤立した突起物の群のある面として取扱う方法が有用であろう。この方法は離散要素法と名づけられ、時間平均流について定式化が行われ[1][2]、周期定型粗さの管内流で予測精度が確認されている。粗面は、互いに干渉しない孤立粗さ群と砂粒粗さの間で、粗さ要素の干渉の程度に連続的な違いが生じるが、この違いを統一的に含むことのできるモデルが望まれる。本研究はそのような「粗面モデル」の構築を目的とするもので、本稿はその試みの一端を述べるものである。

図1は想定する不規則粗面である。一般に、粗面では高さの峰は一様でなく、高い峰が流れに強い効果を持つと期待される。そこで、適当な方法で重要な峰を抽出する。低い峰は省き、粗面はこれらの重要な峰のみで代表されるとしてそれらの抗力を等価的な半球で置き換える。さらに、半球抗力を適当な大きさの面の摩擦応力で置き換えて、粗面を平滑面を取り扱うことを考える。このために、任意の不規則面を疎視化して重要な峰の寸法・形状を抽出する方法を考案する。ここでは二次元ウエーブレット分解法を応用する。この方法では、面全体を一つの情報単位として扱い、全変動成分を $f^{(0)}(x, y)$ として、 x, y それぞれの方向の波数が分解が 2^{N+j} と 2^{N+j+1} (j は整数で負、 N は波数域分割数) の間にある変動成分 g^j を作る分解となる。分解では初めに複雑な変動を含む二次元の不規則信号が与えられるが、この分解操作を逆方向に行い、次第に複雑な信号を付加する操作を行えば粗面創成になる。粗面モデルでは様々な特性をもつ粗面を創成してモデルの妥当性を検証していく必要があるが、本方法はその目的のためにも適用することができる。

2. ウエーブレット分解法

初めに1次元ウエーブレット分解を考える[3][4]。スケーリング関数 $\phi(x)$ とそれに対応するマザー・ウエーブレット $\psi(x)$ を次式で定義する。Two-scale 係数列 p_k, q_k (k は整数) を用い、

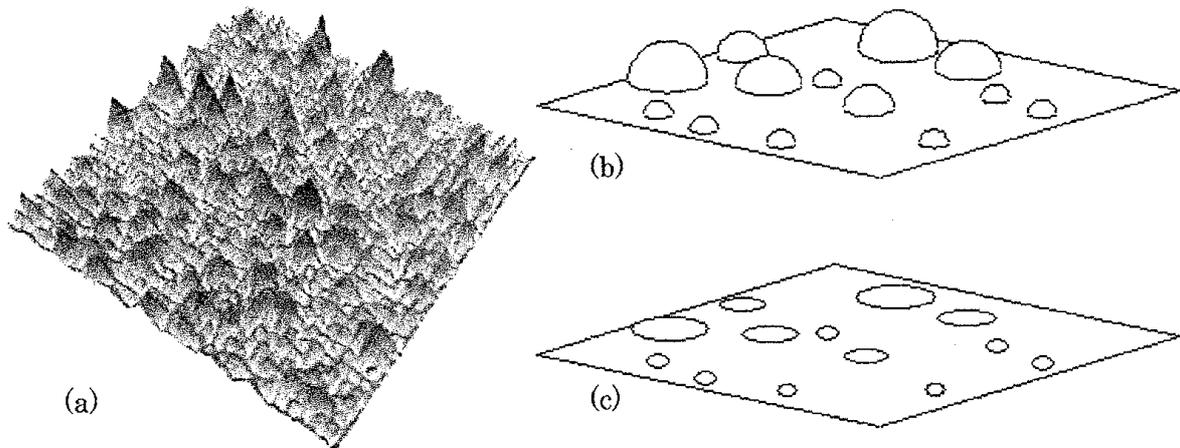


図1. 不規則粗面モデル (a) 計測される不規則粗面、(b) 抽出された高い粗さ要素
(c) 粗さ要素を代表する高摩擦応力面で置き換えたモデル滑面

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x-k), \quad \psi(x) = \sum_k q_k \phi(2x-k) \quad (1)$$

これらの関数は two-scale 関係を満足し、 $\phi(x)$ は次式のように分解できる。

$$\phi(2x-l) = \frac{1}{2} \sum_k \{g_{2k-l} \phi(x-k) + h_{2k-l} \psi(x-k)\} \quad (2)$$

ただし、 g_{2k-l}, h_{2k-l} はスケーリング関数によって決まる一定の数列で、 k, l は整数である。これらを用いて不規則信号 $f(x)$ の j 成分に対して次の二つの成分を定義する。

$$f^{(j)}(x) = \sum_k c_k^{(j)} \phi(2^j x - k), \quad g^{(j)}(x) = \sum_k d_k^{(j)} \psi(2^j x - k) \quad (3)$$

これらは、

$$f^{(j)} = f^{(j-1)} + g^{(j-1)} \quad (4)$$

の関係にあり、 $f^{(j)}, g^{(j)}$ はそれぞれ解像度が 1 レベルだけ高い $j+1$ 成分のうちの、低波数成分と高波数成分（ウェーブレット）になる。式（4）を繰り返すと

$$f^{(0)} = g^{(-1)} + g^{(-2)} + \dots + g^{(-N)} + f^{(-N)} \quad (5)$$

となる。初めに全成分 $f^{(0)}$ を与え、 $g^{(-1)}, g^{(-2)} \dots$ の順に成分を切り取っていけば多重解像度分解になり、逆に、初めに最も緩やかに変動する成分 $f^{(-N)}$ を与え、何らかの方法で $g^{(-1)}, g^{(-2)} \dots$ の成分を創成して付加していけば粗面創成になる。このとき、分解では $c_k^{(j)}$ を知れば $c_l^{(j-1)}, d_l^{(j-1)}$ を簡単な代数演算で求めることができ、多重分解を再帰的に行うことができる。一方、創成の場合も $c_{k-1}^{(j)}, d_{k-1}^{(j)}$ を知ることができれば $c_k^{(j)}$ を同様の簡単な代数演算で求め

ることができるので、緩やかな変動から速い変動に向かって成分を再帰的に付加していくことができる。ただし、 $d_k^{(j-1)}$ は何らかの方法で決めなければならない。

上記の分解、創成は容易に2次元信号の場合に拡張することができる。面に x, y 方向に $k \times l$ 個の格子点を刻む。式(1)に対応するスケーリング関数は

$$\Phi_{kl}^{(j)}(x, y) = \phi(2^j x - k) \phi(2^j y - l) \tag{6}$$

で定義する。一方、マザー・ウェーブレットは次の3種類が必要になる。

$$\begin{aligned} \psi_{1,kl}^{(j)}(x, y) &= \phi(2^j x - k) \psi(2^j y - l), & \psi_{1,kl}^{(j)}(x, y) &= \phi(2^j x - k) \psi(2^j y - l), \\ \psi_{3,kl}^{(j)}(x, y) &= \psi(2^j x - k) \psi(2^j y - l) \end{aligned} \tag{7}$$

式(3)に対応して $f(x, y)$ の j 成分 $f^{(j)}(x, y)$ に対して次の4つの成分を定義する。

$$\begin{aligned} f^{(j)}(x, y) &= \sum_k \sum_l c_{kl}^{(j)} \Phi_{kl}^{(j)}(x, y) = \sum_k \sum_l c_{kl}^{(j)} \phi(2^j x - k) \phi(2^j y - l) \\ g_1^{(j)}(x, y) &= \sum_k \sum_l d_{1,kl}^{(j)} \Psi_{1,kl}^{(j)}(x, y) = \sum_k \sum_l d_{1,kl}^{(j)} \phi(2^j x - k) \psi(2^j y - l) \\ g_2^{(j)}(x, y) &= \sum_k \sum_l d_{2,kl}^{(j)} \Psi_{2,kl}^{(j)}(x, y) = \sum_k \sum_l d_{2,kl}^{(j)} \psi(2^j x - k) \phi(2^j y - l) \\ g_3^{(j)}(x, y) &= \sum_k \sum_l d_{3,kl}^{(j)} \Psi_{3,kl}^{(j)}(x, y) = \sum_k \sum_l d_{3,kl}^{(j)} \psi(2^j x - k) \psi(2^j y - l) \end{aligned} \tag{8}$$

このとき、式(4)と同じ分解ができ、

$$g^{(j-1)}(x, y) = g_1^{(j-1)}(x, y) + g_2^{(j-1)}(x, y) + g_3^{(j-1)}(x, y) \tag{9}$$

となる。 $f^{(j)}(x, y)$ と $g^{(j)}(x, y)$ の関係は図2のようになる。

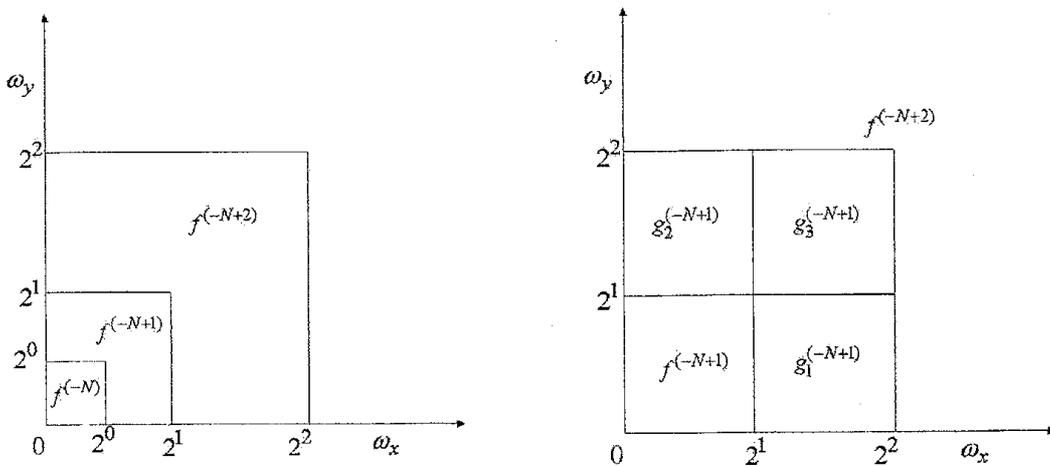


図2、(a) 分解の波数領域と (b) j 成分の内訳

レベルを j から $j-1$ へ下げるとき、粗視化のための分解になる。この場合の $c_{kl}^{(j)}$ と $c_{mn}^{(j-1)}, d_{i,mn}^{(j-1)}$ の関係は

$$\begin{aligned} c_{mn}^{(j-1)} &= \sum_k \sum_l \frac{1}{4} c_{kl}^{(j)} g_{2m-k} g_{2n-l}, & d_{1,mn}^{(j-1)} &= \sum_k \sum_l \frac{1}{4} c_{kl}^{(j)} g_{2m-k} h_{2n-l} \\ d_{2,mn}^{(j-1)} &= \sum_k \sum_l \frac{1}{4} c_{kl}^{(j)} h_{2m-k} g_{2n-l}, & d_{3,mn}^{(j-1)} &= \sum_k \sum_l \frac{1}{4} c_{kl}^{(j)} h_{2m-k} h_{2n-l} \end{aligned} \quad (10)$$

で与えられ、 $c_{kl}^{(j)}$ を得られれば再帰的にレベル $j-1$ の 4 つの成分 $f^{(j-1)}(x, y)$ と $g_i^{(j-1)}(x, y), i=1-3$ を求めることができる。一方、創成の場合の関係は次式で与えられ、

$$c_{kl}^{(j)} = \sum_m \sum_n \left\{ c_{mn}^{(j-1)} p_{k-2m} p_{l-2n} + d_{1,mn}^{(j-1)} p_{k-2m} q_{l-2n} + d_{2,mn}^{(j-1)} q_{k-2m} p_{l-2n} + d_{3,mn}^{(j-1)} q_{k-2m} q_{l-2n} \right\} \quad (11)$$

何らかの方法で係数 $d_{i,mn}^{(j-1)}, i=1-3$ を決めればレベルの高い成分を得ることができる。

3. 粗面分解の実例

前節のウェーブレット分解法を用いた実測粗面の分解例を述べる。粗面は ISO4287 でその定義の方式が定められている。この規格では粗面を、二つの直交する直線に沿う凹凸の統計的特性で記述する。一般には全変動 (P) 成分から波長が λ_s 以上の、非常に緩やかなうねり成分を除いて平均値が 0 となる成分をつくり、それをある適当な波数 λ_c で分け、小さな波数成分をうねり (W) 成分、大きな波数成分を粗さ (R) 成分と定義している。これらについてそれぞれに、絶対値高さ平均値 $\bar{\delta}_{Pa}, \bar{\delta}_{Wq}, \bar{\delta}_{Rq}$ 、高さ rms 平均値 $\bar{\delta}_{Pq}, \bar{\delta}_{Wq}, \bar{\delta}_{Rq}$ を定義する。上記の成分の分離は等価的にある窓関数 (例えば $\psi(x) = \sin ax / \pi x$) を用いた移動平均をとることであるから本報の多重解像度分解法と同じ操作をすることになるが、本報では窓関数の形を固定した上で二つでなく複数の分解を行っている。ただし、波長が λ_s 以上の成分を除去する演算は別の独立のフィルタを用いることもできる。ここでは計測点の数を x, y それぞれの方向に 2^{J+N} 個づつとし、それぞれの解像度レベル j で式(12)の二次元粗さ高さ平均値を定義する。二次元面に刻まれる格子点の数はレベルごとに異なり、レベルが低いほど少ないが、平均値は、それぞれのレベルの離散化高さ $f^{(j)}(k, l)$ を連続面に補間し、最も細かい格子点での値を用いて評価する。

$$\delta_{fa}^{(j,2D)} = \frac{1}{M} \sum_k \sum_l |f_{kl}^{(j)}|, \quad \delta_{fq}^{(j,2D)} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_k \sum_l (f_{kl}^{(j)})^2} \quad (12)$$

ただし、 $M = k(=2^{J+N}) \times l(=2^{J+N})$ で、 2^J は最も緩やかな変動 $f^{(0)}(x, y)$ の一辺当たりの点の数、 N は分解のレベルの数である。なお、 $f^{(0)}(x, y)$ も一連の分解の一部で、0 でない平均値をもつ場合は $W+R$ 成分には含まれない。しかし、一般には分解のレベルの数は多くはできないので λ_s が短くなりすぎる。したがって、平均値の除去には適当なフィルタを用いる方が良い。

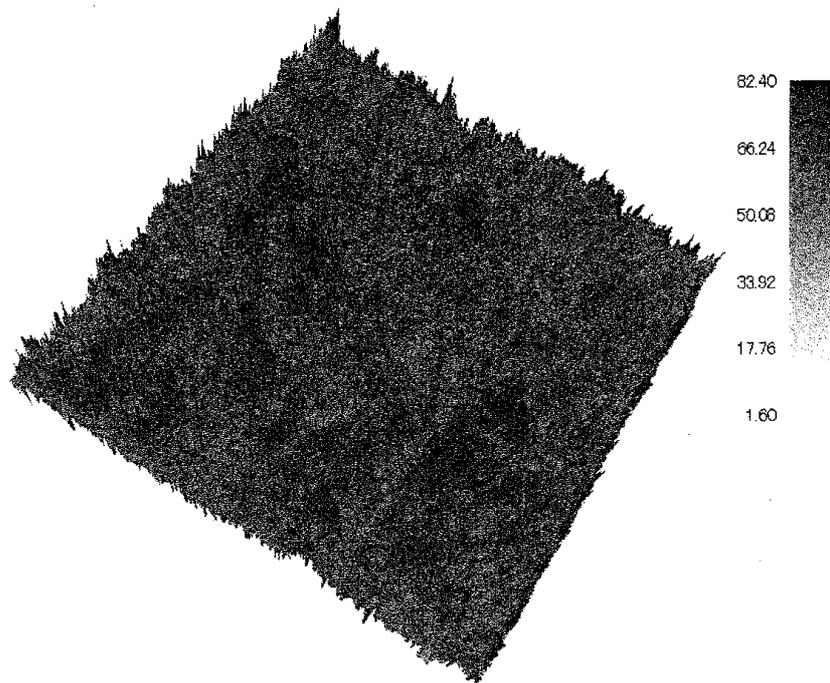


図 3(a) 測定された原粗面 $f^{(0)}(x, y)$

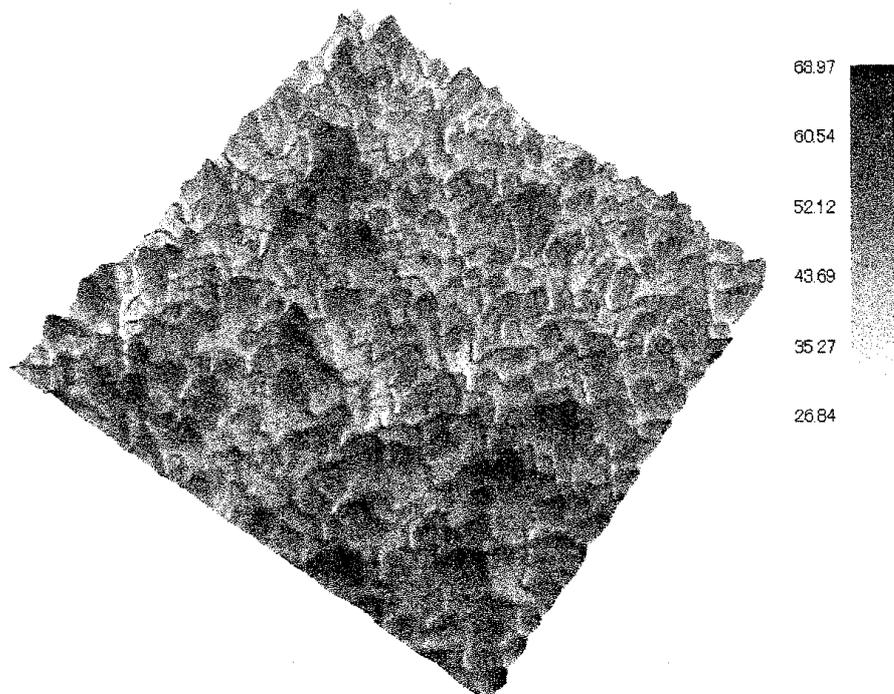


図 3(b) 測定された粗面の疎視化面 $f^{(-3)}(x, y)$

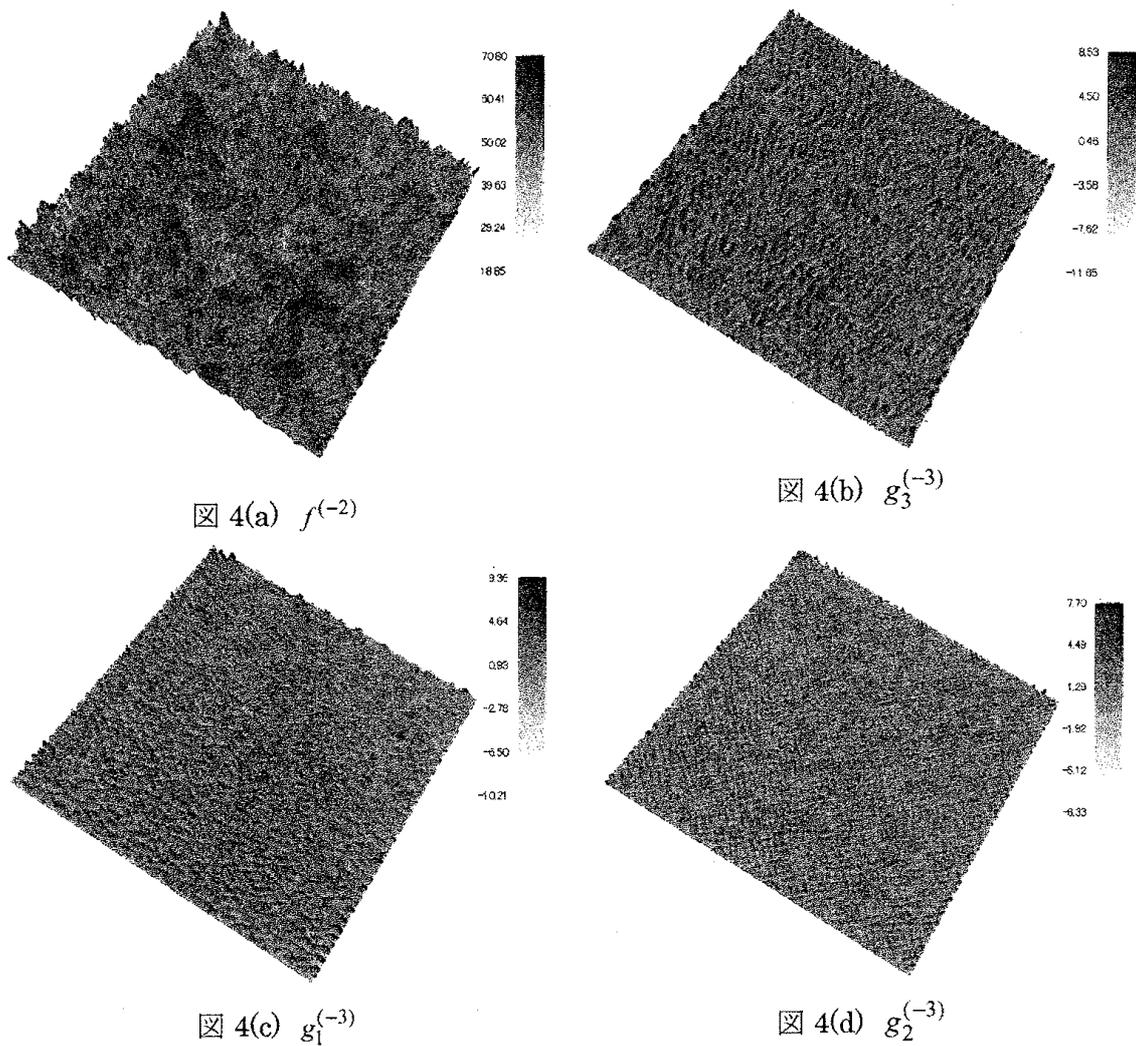


図 4. 測定された粗面のレベル $j=-2$ から $j=-3$ への分解

図 3 は粗面の実例で、(a)は#1200 番砥粒紙の約 1mm 正方形部分を、レーザー粗さ計で x, y 両方向に $2 \mu\text{m}$ 間隔で $2^{j+N} = 512$ 点ずつ計測した高さの粗データで $j=0$ の面、 $f^{(0)}(x, y)$ である。また、(b)は下記の分解の結果で、3 段階の分解を進めた $j=-3$ の面、 $f^{(-3)}(x, y)$ である。1 次元スケーリング関数 $\phi(x)$ に 4 階 B スプライン関数 $N_4(x)$ を用いて式 (6) の 2 次元スケーリング関数を定義する。 $N_4(x)$ の、式 (1) に現れる two-scale 数列 p_k, q_k はよく知られている [3]。図 3(a)の面、 $f^{(0)}(x, y)$ の数式表現には $c_{kl}^{(0)}$ を決定することが必要であるが、このために次の補間公式を用いる。任意の関数 $\rho_0(x, y)$ はその二次元整数離散点 (k, l) での値 $\rho_0(k, l)$ を与えると

$$\rho_0(x, y) = \sum_{m=1}^{2^j} \sum_{n=1}^{2^j} c_{mn}^{(0)} N_4(x-m) N_4(y-n) \quad (13)$$

によって連続関数に補間することができ、その係数 $c_{kl}^{(0)}$ は

$$c_{mn}^{(0)} = \sum_m \sum_n \rho(k,l) \beta_{m+2-k} \beta_{n+2-l}, \quad \beta_m = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{|m|}, \quad m = -5 \sim 5 \quad (14)$$

で精度良く決められる。この分解は後述の、波数域ごとの特性の抽出のほか、元の面を圧縮することが求められる場合にも有用であるが、元の面の特性をできるだけ忠実に含ませることが必要である。不規則粗面から抗力や乱れ構造の決定に寄与する面に引きなおすには尚検討の余地が大きいが、例えば文献[5]の方法もある。

図4はそのウェーブレット分解の結果で、4段階の分解のうち、 $f^{(-2)}$ から $f^{(-3)}$ への分解で得られる疎視化粗面とウェーブレット成分 $g_1^{(-3)}, g_2^{(-3)}, g_3^{(-3)}$ を示している。 $f^{(-2)}$ 、 $f^{(-3)}$ の一辺

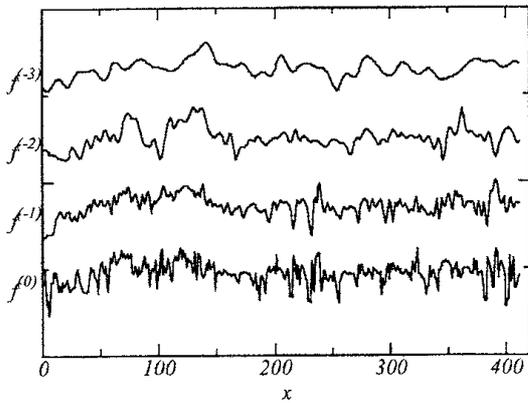


図5 面の中心線上の $f^{(j)}$ の凹凸

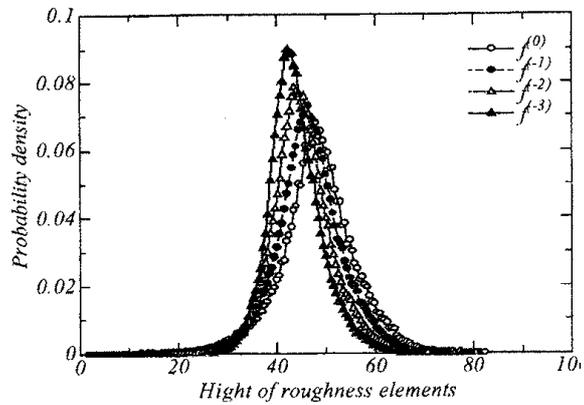


図6. 実測粗面のウェーブレット分解各レベル面の粗さ高さ頻度分布

表1. 粗面の凹凸の統計量

j	$\delta_{fa}^{(j,2D)}$	$\delta_{fq}^{(j,2D)}$	$d_{1a}^{(j,2D)}$	$d_{2a}^{(j,2D)}$	$d_{3a}^{(j,2D)}$	$d_{1q}^{(j,2D)}$	$d_{2q}^{(j,2D)}$	$d_{3q}^{(j,2D)}$
0	5.63	7.41						
-1	5.03	6.55	19.37	17.24	37.58	26.12	22.90	49.98
-2	4.52	5.85	20.41	19.39	40.04	26.41	25.06	51.34
-3	4.03	5.22	17.67	18.02	39.67	22.76	23.40	50.40

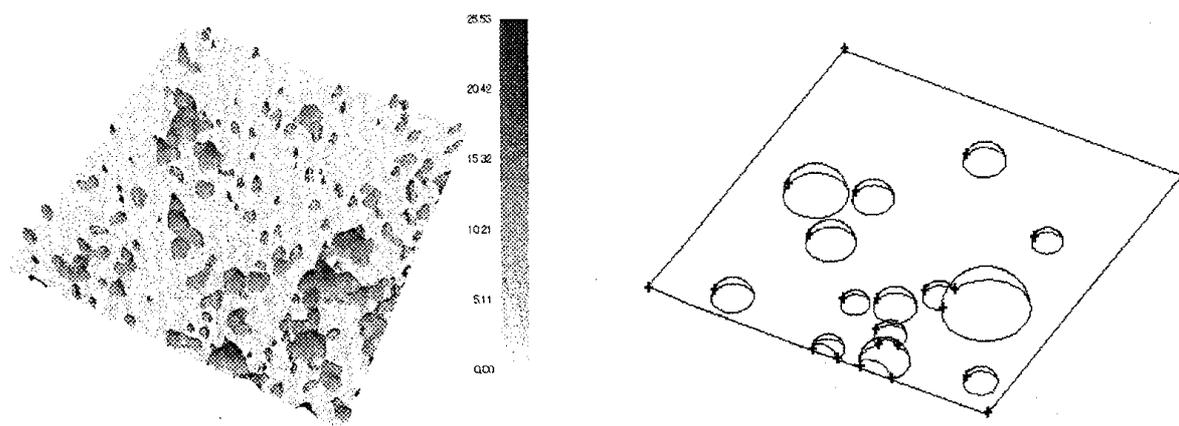
当たりの点数はそれぞれ 128、64 である。 $g_1^{(-3)}$ は x 方向に $f^{(-2)}$ の半分の波数で y 方向には同じ波数になっているので x 方向に長い峰を作り、 $g_2^{(-3)}$ は反対に y 方向に長い峰を作る。また、 $g_3^{(-3)}$ は両方向に半分の波数になるので両軸にほぼ 45° 傾いた峰が現れる。

図 5 は x 軸に平行で、面中心を通る直線に沿う面の凹凸で $f^{(0)}$ から $f^{(-3)}$ までの変化を示す。順次高波数成分が除去されていく過程が示されている。

図 6 は $f^{(j)}$, ($j=0,1,2,3$) の各格子点での粗さ高さ $\delta_k^{(j)} (= f^{(j)}(k,l))$ の確率密度分布である。この粗面は全てのレベルで正規分布となる特殊な粗面で、レベルが低いほど平均高さが低くなる。ただし、測定値の粗さ高さの平均値は 0 でないが、図 5 は原点の修正は行っていない。

表 1 は式(12)で定義される $\delta_{fa}^{(j,2D)}$ 、 $\delta_{fq}^{(j,2D)}$ と $d_{ia}^{(j,2D)}$ 、 $d_{iq}^{(j,2D)}$, ($i=1,2,3$) を示す。後者は $g_i^{(j)}$ の係数 $d_i^{(j)}$ について、式(12)と同じ定義で求めたものである。 $\delta_{fa}^{(j,2D)}$ 、 $\delta_{fq}^{(j,2D)}$ は粗さ高さの平均値が 0 となるように修正した高さについて計算してある。また、 $d_{ia}^{(j,2D)}$ 、 $d_{iq}^{(j,2D)}$ については平均値の修正は行っていない。表から明らかなように、 $\delta_{fa}^{(j,2D)}$ 、 $\delta_{fq}^{(j,2D)}$ に比べて $d_{ia}^{(j,2D)}$ 、 $d_{iq}^{(j,2D)}$ の値は大きくなる。これは $\phi(x)$ に比べて $\psi(x)$ の値が小さいためで、この方法を用いて粗面設計をする場合は $c_{kl}^{(0)}$ に比べて $d_{i,kl}^{(j)}$ の値を大きく与えなければならない。 $d_{ia}^{(j,2D)}$ 、 $d_{iq}^{(j,2D)}$ が $i=3$ の場合が $i=1,2$ に比べて大きいのも同じ理由による。また、レベル j に対して、 $d_{ia}^{(j,2D)}$ 、 $d_{iq}^{(j,2D)}$ の値は殆ど変わらないが、これはこの粗面のスペクトル密度が波数についてほぼ一様であることを示している。

図 3 から重要な峰を適切に抽出する方法は今のところ、試行錯誤によらざるを得ない。ここでは Nikuradse の砂粒粗面[6]を念頭に、平均粗さ高さを 0 にするフィルタリングを行った後、その粗面の原点を $y = k\delta_{fq}^{(0)}$ におく。例として、図 7 はその一例で、 $k = -0.3$ とした場合



(a) 抽出された高い峰の部分

(b) 左図の領域を置き換えた半球群

図 7 粗面から半球群のモデル面への変換

である。原粗面として面 $f^{(-2)}$ を用いた場合で、原点の面 $y = -0.3\delta_{y_0}^{(0)}$ を超える峰を先ず取り出す。図 7(a) は抽出した峰のうち、その最大高さの 30% 以下の低い峰部分を省いたものである。多くの低い峰部分には抗力の寄与が小さいと考えられるものが数多く現れるのでそれらを省く。図(a)の抽出した峰部分を、等しい体積の半球で置き換えた図が図 7(b) である。図(b)においても最大高さの 20% 以下の半球をさらに省略した。半球の中心は、 $y = -0.3\delta_{y_0}^{(0)}$ の面を超える連続する断面の図形中心に選んだ。これらの半球は高さや底面半径が個々に異なるが、それぞれの抗力の大きさは、さまざまな幾何学的配置の平面上の半球群のそれをシミュレーションによって系統的に求め、その結果を利用する。

4. 結言

本報告では不規則粗面を平滑面として扱うためのモデル化を検討した。ウエーブレット分解法を用いて複雑形状の二次元面を数式表現してその後の処理を可能にしたもので、面の粗さ高さを二次元信号とする信号処理の一つの応用例である。流れ解析では重要な粗さ要素の抽出のために用いるが、その方法は多様に可能で、それぞれの妥当性の吟味が不可欠である。また、平滑化されたモデル面の流れ解析への適用にはさらに多くのモデルが必要である。本報告に述べた平滑化モデルはその初めの段階であるが、今後の作業の有用な出発点になるものと考えている。

参考文献

1. Taylor, R.P., Coleman, H.W., Hodge, B.K., "Prediction of Turbulent Rough-Wall Skin Friction Using a Discrete Element Approach.", *J. Fluid Eng., Trans. ASME*, **66** (1985), pp.251-257.
2. Scaggs, W.F., Taylor, R.P., Coleman, H.W., "Measurements and Prediction of Rough-Wall Effects on Friction Factor-Uniform Roughness Results", *J. Fluid Eng., Trans. ASME*, **110** (1988), pp.385-391.
3. 榎原 進: 「ウエーブレット・ビギナーズガイド」、東京電機大学出版局。(1995)
4. Chui, C.K. : 「ウエーブレット入門」(桜井明、新井勉訳)、東京電機大学出版局。(1993)
5. 松山佐和: 「ウエーブレット変換によるデータ圧縮の最適モデル」、可視化情報学会論文集、24 卷 8 号(2004-8)、pp. 37-42.
6. Nikuradse, J., "Stroemungsgesetze in rauhen Rohren", *Forsch. Arb. Ing.-Wes.* (1933), No.361.