数理解析研究所講究録 1435 巻 2005 年 31-38

フォンノイマン環の最近の発展についての紹介

植田　好道
九州大学大学院数理学研究院

1　序

ある意味で，ここ3年程のフォンノイマン環研究の著しい進歩はそれ以前のどれよりも大きなことだったようにさえ思えます．その発展はエルゴード理論の話題とフォンノイマン環独自の話題の両面から来ていてとても面白いと思います．私が頂いた三回分の講演のうち最初の一回は現在の私の研究に密接に関係する自由エントロピーの概説を行い，その後，ごく最近の小澤氏及びポパ氏の大きな仕事が，作用素環論の（現在から見れば）古典的な話題に大きく関連していることを踏まえて，これまでの II_1 型因子環の研究がどのように行われてきたかを（私なりに調べて勉強して）まとめて話しました．その中で最近のエルゴード理論の側面からの影響にも私の知りうる限りのことを（詳細は兎も角）説明してみました．それを踏まえ，小澤，ポパ両氏の仕事の一端を解説しました．但し，完全な解説は試みませんでした．理由は既にプレプリントとしてはインターネットを通して全て入手可能であり，興味ある方はご自分で努力さえすればアクセス可能だからです．実際，お話しした論文は全て ArXiv で小澤氏やポパ氏の名前で検索することにより簡単に入手することが出来ます．

私自身，満足にすべてを理解しているとは言いがたく，わざわざ貴重な講演の機会をくださった大坂氏及び聴衆の皆さんには申し訳なく思っています．心からお詫び致します．近い将来に，より適切な方が詳しく解説なさることを期待します．という事情ですので，報告集原稿の依頼を受け正直困ったのですが，書かないと行けないそうなので，恥を忍んで講演の準備の過程で読んだ最近のポパ氏の論文を理解する上で必要となった III 型環に関する知識を私なりにちょっと整理したものを最後に付けます．これも専門家にとっては適切な文献をあたってやれば理解出来る自明なことですが，彼の論文を勉強しようとなさる方で III 型環に不案内な方の参考にほんの少しでもなれば幸いです．なお，限られた時間でほぼ書きなぐりに等しい状況で書きましたので，推敲を十分にすることが出来ませんでした．くれぐれもご容赦ください．また，これより先，敬称は略します．

謝辞：日常の細事に流されて日々の勉強がおろそかになって簡単にやれることばかりに流れがちなところに貴重な勉強の機会を下さった大坂氏に深く感謝いたします．

2 マレアブル第一論文

ポパは基本群が自明な II_1 型因子環を作ってみせた大ホームランのあと，マレアブル作用云々という表題で現時点で二通の論文を書いています．一通目の論文では「正の実数がなす乗法群 $\mathbf{R}_+^\times$ の任意の有限生成可算離散部分群がある II_1 型因子環の基本群として実現する」という事実を示したものであり，二通目では「ある強い仮定の下でフォンノイマン環の同型が群の同型を導くか？」という，所謂，コンヌ（などによる）剛性問題（夢物語？）をある種の場合に肯定的に解いたものです．この二通目の論文は ArXiv に出て現時点でだいたい1年近く経つような気がしますが，今でもどんどん書き直されていて，どんどん衝撃的な結論が書き加えられている状況です．故に，二通目の論文に関しては私は何も説明することが出来ません．ただ言えることは，議論の基本は講演である程度詳しく解説した２つの部分環が「ほぼ内部共役」になるための十分条件です．二通目の論文ではこの十分条件に関して超積の世界でとんでもない議論を力技でやりきっています．さて，ここで題材にするのは一通目の論文です．論文ではかなり一般的な主張が述べられていますが，だいたい次のようなことが示されています．

N を因子環とします．ここでは II_1 型に限らないのがミソです．$\varphi \in N_*$ を忠実な状態とし，$\alpha : G \to \mathrm{Aut}(N)$ を可算離散群 G の N への作用で φ-不変なものとしましょう．彼が示したことは，ある種の条件下で接合積 $M := N \rtimes_\alpha G$ の自然な部分環 $M_{\varphi\circ E_N} = N_\varphi \rtimes_\alpha G$（ここで $E_N : N \rtimes_\alpha G \to N$ で接合積に自然に付随する条件付き期待値とします）が II_1 型因子環になって，その基本群 $\mathcal{F}(M_{\varphi\circ E_N})$ が実はモジュラ作用素 Δ_φ の点スペクトルと一致するということです．故に，しかるべき条件を満たすように与えられた $\mathbf{R}_+^\times$ の可算部分群だけを Δ_φ がスペクトルとして持つように構成できれば（これは難しくない）欲しい結論を得ると言った案配です．より詳しくしかるべき条件を説明しましょう．$N^{(2)} := N \otimes N$ と置きます．与えられた α の「対角作用」を $\alpha^{(2)} : G \to \mathrm{Aut}\left(N^{(2)}\right)$ と表します．即ち，$\alpha_g^{(2)} := \alpha_g \otimes \alpha_g$, $g \in G$, です．更に，$\varphi^{(2)} := \varphi \otimes \varphi$ と表します．作り方から，$\alpha^{(2)}$ は $\varphi^{(2)}$-不変であることは自明です．さて，しかるべき条件は次の４つと群 G に対する条件です：

1. $\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi) = \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$．ここで．PointSp は点スペクトル集合を表します．
2. N_φ は因子環．
3. $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(N)$ が φ-二重混合的，即ち，$\alpha^{(2)}$ が $\varphi^{(2)}$-混合的，であること；任意の $x, y \in N^{(2)}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して G の有限部分集合 K が存在して，任意の $g \in K^c$ に対して $|\varphi^{(2)}(x\alpha_g^{(2)}(y)) - \varphi^{(2)}(x)\varphi^{(2)}(y)| \leq \varepsilon$ が成り立つ．
4. （マレアブル性）1径数自己同型群 $\gamma_t \in \mathrm{Aut}\left(N^{(2)}\right)$ が存在して次を満たす：
   - $\varphi^{(2)} \circ \gamma_t = \varphi^{(2)}$,
   - $\alpha_g^{(2)} \circ \gamma_t = \gamma_t \circ \alpha_g^{(2)}$,
   - γ_1 は $N^{(2)} := N \otimes N$ のテンソル入れ替え作用．

さて，G に対する条件を述べるのはここではやめておいて，$G = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL(2, \mathbb{Z})$ に対して適応可能であることのみ述べておきます．また，上の４条件を満たす (N, φ, α) の三つ組みは各無限テンソル積成分が $M_n(\mathbf{C})$ である非可換ベルヌイシフトにより実現されることを注意

しておきます．詳しく論文を参照ください．次に主定理を $G=\mathbb{Z}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{Z})$ の場合に正確に述べましょう．

定理．（ソリン・ポパ，２００４年） 上の４条件の下で

$$\mathcal{F}(N_\varphi \rtimes_\alpha G) = \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$$

が成り立つ．特に，(N,φ,α) を非可換ベルヌイシフトとして作れば，その「固有値リスト」を適当に選ぶことにより任意の $\mathbb{R}_+^\times$ の有限生成可算離散部分群が $\mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ として実現可能である．

次に証明の概略を少し述べてみます．やや不正確な部分もありますが道筋の分かりやすさを優先します．勝手に $s \in \mathcal{F}(N_\varphi \rtimes_\alpha G)$ を選びます．簡単の為に $s \lneqq 1$ としておきましょう．（基本群は乗法群なのでこの仮定は議論の一般性を失いません．）更に，記述の簡単の為に $(H \subseteq G) := (\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{Z}^2 \rtimes SL(2;\mathbb{Z}))$ と表しましょう．すると射影 $p \in \mathbf{C} \rtimes H \subseteq \mathbf{C} \rtimes G$ が $\varphi \circ E_N(p) = s$ であって且つ $(N_\varphi \rtimes_\alpha G)^s := p(N_\varphi \rtimes_\alpha G)p \cong N_\varphi \rtimes_\alpha G$ となるように選べます．この同型写像を π_s とでも表しましょう．$Q := \pi_s((p(\mathbf{C} \rtimes H)p)$ と置きましょう．明らかに $p(\mathbf{C} \rtimes H)p \hookrightarrow p(\mathbf{C} \rtimes G)p$ は剛的埋め込みなので，$Q \hookrightarrow N_\varphi \rtimes_\alpha G$ も剛的埋め込みです．ここでマレアブル性を使って少し議論をすると所謂，ポパのいう「一方が変形可能であってもう一方は剛的」という状況になり，双加群 ${}_QL^2(N \rtimes_\alpha G)_{\mathbf{C}\rtimes G}$ が「有限次元」部分双加群 ${}_Q\mathcal{H}_{\mathbf{C}\rtimes G}$ を持つことを証明することが出来ます．このことは相対可換子環 $Q' \cap \langle N \rtimes_\alpha G, \mathbf{C} \rtimes G\rangle$ が非零射影 P で $\widehat{E_{\mathbf{C}\rtimes G}}(P)$ が有界になるようなものがとれることと同値です．具体的には，P は $\mathcal{H}$ への射影として与えられます．また，$\widehat{E_{\mathbf{C}\rtimes G}}$ は条件付き期待値 $E_{\mathbf{C}\rtimes G} := (\varphi \otimes \mathrm{id})\big|_{N \rtimes_\alpha G}$ から定まる標準的な作用素値荷重を表します．さて，少し乱暴ですが，見いだした $\mathcal{H}$ が部分等長作用素 $v \in N \rtimes_\alpha G$ で $\sigma_t^{\varphi\circ E_N}(v) = \lambda^{it}v$, $\lambda \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$, を満たすものにより $\mathcal{H} = L^2(N_\varphi \rtimes_\alpha G)v$ という形をしていたと仮定してみましょう．（実際には，$\mathcal{H}$ の部分双加群でこのような形をしているものの存在をきちんと示します．この種の議論の詳細は研究会の講演で説明しましたのでここでは省略します．）すると，射影 $e \in Q$, $f \in \mathbf{C} \rtimes G$ と単射的 $*$-準同型 $\psi : eQe \to f(\mathbf{C} \rtimes G)f$ が存在して，任意の $x \in eQe$ に対して $vx = \psi(x)v$ を満たすことが分かります．（ここまでの議論では III 型環 $N \rtimes_\alpha G$ を扱っていますが，なんてことは無くて次の節で述べる離散分解さえ認めれば，他の特別な III 型的な議論は必要としません．）このことから次のようなことが自動的に従います：

- $v^*v, vv^* \in N_\varphi \rtimes_\alpha G$,
- $v(N_\varphi \rtimes_\alpha G)v^* = vv^*(N_\varphi \rtimes_\alpha G)vv^*$,
- $v^*v \in (eQe)' \cap e(N_\varphi \rtimes_\alpha G)e$,
- $vv^* \in \psi(eQe)' \cap f(N_\varphi \rtimes_\alpha G)f$,
- $\varphi \circ E_N(vv^*) = \lambda \times \varphi \circ E_N(v^*v)$.

ここで問題になるのが３，４番目の主張です．実際，これらが問題でまだ必要な内部共役を作ることが出来ません．ここで彼は更に頑張ります．$P := \pi_s((p(\mathbf{C} \rtimes G)p)$ と置いて，$vv^* \in \mathbf{C}\rtimes G$, $v^*v \in P$, $vPv^* \subseteq \mathbf{C} \rtimes G$ などを力技で示します．あとは標準的な議論で $\lambda \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ と $*$-同型 $\theta_\lambda : N_\varphi \rtimes_\alpha G \cong (N_\varphi \rtimes_\alpha G)^\lambda$ が存在して $\theta_\lambda(P) \subseteq (\mathbf{C} \rtimes G)^\lambda \subseteq (N_\varphi \rtimes_\alpha G)^\lambda$ が成立することが証明出来ます．$\Phi := \theta_\lambda \circ \pi_s$ という合成 $*$-同型写像を考えると，特に，

$\Phi\left((\mathbf{C}\rtimes G)^s\right)\subseteq(\mathbf{C}\rtimes G)^\lambda$ が従います．まだ，ぴったり等号になっていないのが嫌なのですが，そこも力技で等号になっていることを示してしまいます．故に，$(\mathbf{C}\rtimes G)^s\cong(\mathbf{C}\rtimes G)^\lambda$ であり，これから $s=\lambda\in\mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ であることが $\mathbf{C}\rtimes G=L(\mathbb{Z}^2\rtimes SL(2;\mathbb{Z}))$ の基本群が自明であるというポパの前の仕事から従います．

ここまでの議論を見て分かるように基本は「有限次元」部分双加群を如何に引っ張りだすかにあり,「一方は変形可能でもう一方は剛的」という状況を作りだすのがポイントになります．この為に，基本群が自明の具体例を作った論文では $\mathbb{Z}^2\rtimes SL(2;\mathbb{Z})$ の相対性質 T と相対的フォーエホプ（ちょうどこの原稿を書いている期間にあるデンマーク人から発音を習う機会があったのですが，私にはこんな感じに聞こえました．たぶんこれも変でしょうが…）性を利用しました．ここで解説しているマレアブル第一論文では群の（相対）性質 T とマレアブル性を使ってます．しかし，上の証明の概略を見ても分かるように「有限次元」部分双加群が見つかってもまだまだ結論には案外遠いものです．その遠い道のりをトンカチでとんとん叩いて出っ張るところを無理矢理押し込んで行くような作業で乗り切って行きます．何故，うまく行くとポパが考えたのかが私には理解出来ません．ある意味でポパの真骨頂が出ているのはこういう部分なのかもしれません．このマレアブル第一論文を含め最近の一連の論文では，主定理以外のこのトンカチでとんとん叩くような類の命題までの全てを一般的な主張として述べようとするあまり，全体像が見えにくくなっているように感じます．ここで与えた（かなりいい加減な）説明が論文を勉強なさる方の参考になれば幸いです．

3 概周期的状態に対する離散分解定理

ポパの議論は本質的に II_1 型の世界で行われます．しかし，議論の本質が内部共役を見いだすことにある為に，基本群の計算の為にはトレイスをスケールする「内部共役」を探す必要が生じます．その為に III 型環を一旦経由します．そこで，所謂，概周期的状態に関する離散分解定理を使います．これは実質的にコンヌの JFA, 74 論文の中で与えられ，関連してダイクマなどの論文もあるのですが，いずれの論文も竹崎の双対性を経由した議論でポパの議論には適当ではありません．ポパの議論で必要な形の離散分解を準備するには竹崎の Acta 論文, 73（有名な双対原理が証明されたものではない方）の III_λ 型因子環に対する離散分解定理の証明をなぞる必要があります．ポパの論文中にはだいたい離散分解に関して必要なことが証明抜きでまとめられていますが，あまり明解ではありません．ここでは，ポパの論文に必要な離散分解定理を詳しく説明しようと思います．必要な知識はモジュラー理論の初歩のみで，具体的には富田の基本定理と KMS 条件によるモジュラー自己同型の特徴付けのみです．ここで説明することを理解さえしていればポパの論文は III 型のことを全く知らない人でも読み進めることが出来ます．

N を σ-有限なフォン・ノイマン環とします．また，φ をその上の忠実な正則状態とし，その GNS 表現を考えて分離巡回表現ベクトルを ξ_φ と表します．この正則状態に付随して生じるモジュラー作用素を $\Delta_\varphi=\Delta_{\xi_\varphi}$, モジュラー共役作用素を $J_N=J_{\xi_\varphi}$ と表します.（モジュラー共役作用素は状態自体には依存せずに決まることがフォン・ノイマン環の標準形の理論から分かるので J_φ とはせずに J_N と表しました.）モジュラー作用素 Δ_φ の点スペクトル全体を $\mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ と表します．更に，モジュラー自己同型 $x\in N\mapsto\Delta_\varphi^{it}x\Delta_\varphi^{-it}\in N$ を σ_t^φ で表すことにします．

1. $\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)=\mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ であれば，$\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)=\mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ は $\mathbf{R}_+^\times$ の乗法的部分群になる．

($\because$) モジュラー作用素とモジュラー共役作用素の間の関係式 $J_N\Delta_\varphi J_N = \Delta_\varphi^{-1}$ より $\lambda \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ であることが従います．故に，積で閉じていることを見ればおしまいです．$\lambda, \mu \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ をとります．点スペクトルの定義から $x \neq 0, y \neq 0 \in N$ が

$$\Delta_\varphi x\xi_\varphi = \sigma^\varphi_{-i}(x)\xi_\varphi = \lambda x\xi_\varphi, \quad \Delta_\varphi y\xi_\varphi = \sigma^\varphi_{-i}(y)\xi_\varphi = \mu y\xi_\varphi$$

を満たすように選べます*．すると，$\Delta_\varphi xy\xi_\varphi = \sigma^\varphi_{-i}(xy)\xi_\varphi = \sigma_{-i}(x)\sigma_{-i}(y)\xi_\varphi = \mu\sigma^\varphi_{-i}(x)\xi_\varphi = \lambda\mu\xi_\varphi$ となって，$\lambda\mu \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ であることが分かりました．

***に関して注意：** ちょっと冷静に考えれば分かるように，実はちょっと手を抜いています．分かりやすさを優先して深入りして説明してません．

2. $\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi) = \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ を仮定します．この時，

$$\Delta_\varphi = \sum_{\lambda \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)} \lambda E(\{\lambda\}; \Delta_\varphi)$$

とスペクトル分解が得られます．この時，$N_\varphi(\lambda) := \{x \in N : \sigma^\varphi_t(x) = \lambda^{it}x\}$ と置くことにより，

$$N\xi_\varphi = \sum_{\lambda \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)}^{\oplus} E(\{\lambda\}; \Delta_\varphi)N\xi_\varphi, \quad E(\{\lambda\}; \Delta_\varphi)N\xi_\varphi = N_\varphi(\lambda)\xi_\varphi$$

と出来ます．特に，2-ノルム $\|\cdot\|_\varphi$ に対して，

$$N = \sum_{\lambda \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)}^{\oplus} N_\varphi(\lambda)$$

となる直和分解を得ます．

($\because$) いくつか計算しないと行けないことがありますが，全てモジュラー自己同型に対するフーリエ解析的な標準的な議論です．例えば，$E(\{\lambda\}; \Delta_\varphi)N\xi_\varphi = N_\varphi(\lambda)\xi_\varphi$ は証明すべきことですが，

$$\Delta_\varphi^{it} = \sum_{\lambda \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)} \lambda^{it} E(\{\lambda\}; \Delta_\varphi)$$

に注意すると，

$$\zeta \in E(\{\lambda\}; \Delta_\varphi)\mathcal{H} \Longleftrightarrow \Delta_\varphi^{it}x\zeta = \lambda^{it}x\zeta \ (\forall t \in \mathbf{R})$$

であるので，$\Delta_\varphi^{it}x\xi_\varphi = \sigma^\varphi_t(x)\xi_\varphi$ に注意することによりすぐ分かります．(注意：上の $\Leftarrow$ の向きの主張を確かめるにはストーンの定理の一意性の部分のような議論を行います．)

残る問題は $N_\varphi(\lambda)$ 達の記述です．

3. $N_\varphi = N_\varphi(1)$ を II_1 型と仮定します．(これは一見自明に成り立つことを仮定していると思う人がいるかもしれませんがそうではありません．実際，ハーマンと竹崎により中心化環 N_φ が自明になるような状態の具体例が与えられています．それから少なくとも任意の次元の全行列環が（ある状態の）中心化環になりうることが分かります．) この時，もし $\lambda \lneqq 1$ であれば，等距離作用素 $v \in N_\varphi(\lambda)$ が存在します．特に，$vv^* \in N_\varphi$ が自動的に成り立ち，更に $x \in N_\varphi(\lambda) \Rightarrow xv^* \in N_\varphi$ なので，$N_\varphi(\lambda) = N_\varphi v$ も成り立ちます．また，KMS 条件に関する簡単な計算により，$vN_\varphi v^* = vv^*N_\varphi vv^*$ が確認されます．

(∵) $x = u|x| \in N_\varphi(\lambda)$ と非零元の極分解を考えます．極分解の定義から $|x| \in N_\varphi$ となります．故に，$\sigma_t^\varphi(u)|x| = \sigma_t^\varphi(u|x|) = \sigma_t^\varphi(x) = \lambda^{it}x = \lambda^{it}u|x|$ となって $\sigma_t^\varphi(u) = \lambda^{it}u$ を得ます．即ち，非零部分等距離作用素 $u \in N_\varphi(\lambda)$ の存在が分かりました．ここで，N_φ が II_1 型である仮定を利用して，射影 $e_1, f_1, \ldots, e_k, f_k \in N_\varphi$ を

$$\begin{gathered} e_1 \leq v^*v, \quad f_1 = ve_1v^*, \\ e_1 + \cdots + e_k = 1, \quad f_i \perp f_j \ (i \neq j), \\ e_i \sim_{N_\varphi} e_j, \quad f_i \sim_{N_\varphi} f_j \end{gathered}$$

を満たすように選ぶことが出来ます．最後の２種類のマレイ－フォン・ノイマン同値を与える部分等距離作用素を $e_{ij}, f_{ij} \in N_\varphi$ と表すことにしましょう．即ち，

$$\begin{gathered} e_{ij}^*e_{ij} = e_j, \quad e_{ij}e_{ij}^* = e_i; \\ f_{ij}^*f_{ij} = f_j, \quad f_{ij}f_{ij}^* = f_i \end{gathered}$$

が成り立っています．この時，$v := \sum_{i=1}^k f_{i1}ue_{1i} \in N_\varphi N_\varphi(\lambda)N_\varphi = N_\varphi(\lambda)$ と置くと欲しい等距離作用素がえられます．実際，

$$v^*v = 1, \quad vv^* = \sum_{i=1}^k f_i \in N_\varphi, \quad \varphi(vv^*) = \lambda(\lneqq 1)$$

などが簡単な計算で確認出来ます．

注意： 上で得た等距離作用素 v は N_φ のユニタリー作用素の左かけ算によるずれをのぞけば一意的に定まります．実際，２つの等距離作用素 $v_1, v_2 \in N_\varphi(\lambda)$ に対して，$v_2 = v_2v_1^*v_1 = (v_2v_1^*)v_1$ であって，$v_2v_1^* \in N_\varphi$ が従います．N_φ は有限的であることから，$v_2v_1^*$ は N_φ のユニタリー作用素 u に拡張され，$v_2 = uv_1$ となります．

注意： ここで与えた議論は竹崎による III_λ 型フォン・ノイマン環の離散分解定理の議論そのものです．実際，$\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi) = \{\lambda^n\}_{n\in\mathbb{Z}}, 0 \lneqq \lambda \lneqq 1$ と仮定します．すぐ上の **3** により等距離作用素 $v_\lambda \in N_\varphi(\lambda)$ を一つ選びます．この時，$v_\lambda^n \in N_\varphi(\lambda^n)$ であることから $N_\varphi(\lambda^n) = N_\varphi v_\lambda^n$ が従います．$N_\varphi(\lambda^{1/n}) = N_\varphi(\lambda^n)^* = (N_\varphi v_\lambda^n)^* = v_\lambda^{*n}N_\varphi$ となって，竹崎の離散分解定理

$$N = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\oplus} v_\lambda^{*n}N_\varphi \oplus N_\varphi \oplus \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\oplus} N_\varphi v_\lambda^n$$

が得られます．(勿論，ヒルベルト空間の位相 $\|\cdot\|_\varphi$ による展開です．)

4. $\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi) = \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ を仮定します．この時，$N_\varphi' \cap N = \mathcal{Z}(N_\varphi)$ が成り立ちます．

(∵) $x \in N_\varphi' \cap N$ とします．**2** の結論から $x = \sum_\lambda x_\lambda \in N = \sum_\lambda^\oplus N_\varphi(\lambda)$ と離散分解されます．ヒルベルト空間の位相 $\|\cdot\|_\varphi$ による展開ですが，展開の一意性と N_φ の N への右かけ算がそのまま GNS 表現空間上の右表現に持ち上がることから $x_\lambda \in N_\varphi' \cap N_\varphi(\lambda)$ が全ての $\lambda \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ に対して成り立ちます．極分解 $x_\lambda = u|x_\lambda|$ の一意性から $u \in N_\varphi' \cap N_\varphi(\lambda)$,

$|x_\lambda| \in \mathcal{Z}(N_\varphi)$ が従います．故に，

$$
\begin{aligned}
x_\lambda^* x_\lambda &= |x_\lambda| u^* u |x_\lambda| \\
&= u^* u |x_\lambda| u^* u |x_\lambda| u^* u \\
&= u |x_\lambda| u^* u^* u u |x_\lambda| u^* \quad (\because\ u|x_\lambda|u^* \in N_\varphi,\ u \in N_\varphi') \\
&\leq u |x_\lambda| u^* u |x_\lambda| u^* \\
&= x_\lambda x_\lambda^*; \\
x_\lambda x_\lambda^* &= u |x_\lambda| |x_\lambda| u^* \\
&= |x_\lambda| u^* u |x_\lambda| \quad (\because\ u \in N_\varphi',\ |x_\lambda| \in N_\varphi) \\
&\leq x_\lambda^* x_\lambda
\end{aligned}
$$

となるので $x_\lambda^* x_\lambda = x_\lambda x_\lambda^*$ となります．しかし，KMS 条件から $\varphi(x_\lambda^* x_\lambda) = \lambda^{-1}\varphi(x_\lambda x_\lambda^*)$ も成り立っています．故に，$\lambda \neq 1$ である限り $x_\lambda = 0$ が従います．よって，$x = x_1 \in N_\varphi' \cap N_\varphi(1) = \mathcal{Z}(N_\varphi)$ なので結論を得ます．

ここまでの議論をまとめると次のようになります：

概周期的状態による離散分解定理： $\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi) = \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)$ であること及び N_φ が II_1 型であることを仮定します．この時，次が成立します：

- スペクトル部分空間 $N_\varphi(\lambda) = \{x \in N : \sigma_t^\varphi(x) = \lambda^{it}x\}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)$, $\lambda \lneq 1$, は（N_φ のユニタリー作用素の左かけ算のずれを除いて）一意的に定まる等距離作用素 $v_\lambda \in N_\varphi(\lambda)$ により $N_\varphi(\lambda) = N_\varphi v_\lambda$ と記述出来ます．この v_λ は，$v_\lambda v_\lambda^* \in N_\varphi$ であって且つ $v_\lambda N_\varphi v_\lambda^* = v_\lambda v_\lambda^* N_\varphi v_\lambda v_\lambda^*$ を満たします．
- ヒルベルト空間の位相 $\|\cdot\|_\varphi$ に関して

$$
N = \sum_{\lambda \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi)}^{\oplus} N_\varphi(\lambda) = N_\varphi \oplus \sum_{\lambda \in \mathrm{PointSp}(\Delta_\varphi), \lambda \lneq 1}^{\oplus} (v_\lambda^* N_\varphi \oplus N_\varphi v_\lambda).
$$

  と直和分解されます．
- $N_\varphi' \cap N = \mathcal{Z}(N_\varphi)$.

4　追記

２００５年５月にポパ氏から彼の学生２人との共著の準備中論文の原稿を貰いました．ちょうどバンダービルト大での研究会の最中だったのですが，そこで彼の学生達が分担して発表しました．一連の「一方は変形可能でもう一方は剛的」手法を融合積フォン・ノイマン環に適応したものです．応用として，超有限的 II_1 型因子環への $G = G_1 \bigstar G_2$, $G_1 = SL(3;\mathbb{Z})$, $G_2 = SL(3;\mathbb{Z}) \times H$（$H$ は任意の可算離散可換群）のある種の作用による接合積の Out 群が

H の双対と一致すること及び基本群が自明であることを示しています．これはコンヌの学位論文の最後に述べられている問題の解決です．III 型環を考えるといつでもモジュラー同型により外部同型の存在が分かりますから驚異的な結果です．一方で，離散群，離散同値関係に対しては外部同型を持たない例は既に知られていたのでそう言う意味では，２００５年になってようやく対応する結果がフォン・ノイマン環に対しても示されたとも言えます．上に述べた G の作用の「ある種の性質」とは，具体的には $G_1 = SL(3;\mathbb{Z})$ の方の作用が $SL(3;\mathbb{Z})$ の 3 次元非可換トーラスへの作用で G_2 の方が非可換ベルヌイになっているという性質なのですが，問題は，G_1, G_2 の作用をバラバラに作ることは出来てもそれらが自己同型群の中で自由積になっている保証が無いことです．そこで，うまい同型を一つ選んで片方を捻ることにより自由積に出来るという議論を実行します．そのような同型の存在はベールのカテゴリー定理を用いた議論により抽象的にその存在を示すようです．この議論に関しては最近，UCLA のロジシャンの一人が測度空間への群作用に関して与えた仕事が出所になったようです．論文は近い将来に ArXiv に出るでしょうから興味がある方はそれを楽しみにお待ちください．