数理解析研究所講究録 1435 巻 2005 年 53-60

単射的 III_1 型因子環の一意性に関する覚書

増田俊彦 (九大数理)

1 序

単射的 III_1 型因子環の一意性は, [3] と [4] によって確立された. 即ちコンヌは [3] で単射的 III_1 型因子環がもし自明な再中心化環を持てば, 荒木-ウッズの無限テンソル積 III_1 型因子環と同型である事を示した. そして [4] でハーゲラップは実際に単射的 III_1 型因子環が自明な再中心化環を持つ事を証明した. (再中心化環の定義及びその自明性については, 付録を参照の事.) これはこれでよいのだが, 筆者がコンヌの論文を勉強した結果, よくわからなかった点が一箇所あった. この部分については, 証明の粗筋だけが書かれていて詳細な議論はあまり書かれておらず, 何人かの人に訊いたが, 誰もよくわからない, との事であった. 結局筆者なりの証明を考えたのだが, 本稿ではこの点について解説したいと思う.

以下 $\mathcal{M}$ は特に断らない限り, 単射的 III_1 型因子環とし, $\mathfrak{H} = L^2(\mathcal{M})$ を標準ヒルベルト空間とする. $\mathcal{M}' = J\mathcal{M}J$ は自然に $\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ と同一視されることに注意されたい. $b \in \mathcal{M}$ に対して, $b^o = Jb^*J$ と定義すると, この対応は自然な反同型写像となっている. また $\mathcal{M}$ からの ($*$-線形) 写像が与えられたとき, 自然に $\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ 上の写像が対応するが, この場合は右肩に o をつけて表す事にする.

2 問題点

まず大雑把にコンヌ [3] の議論の流れを解説して, 本稿で問題にしたい補題を紹介することにする. φ を $\mathcal{M}$ の忠実正則状態とし, $T > 0$ を固定して, $\theta := \sigma_T^\varphi$ とおき, 接合積 $\mathcal{M} \rtimes_\theta \mathbf{Z}$ を考える. これは単射的な III_λ 型因子環 $(T = -2\pi/\log\lambda)$ であるので, [2] によってパワーズの無限テンソル積因子環 $\mathcal{R}_\lambda$ に同型である. さらにトーラスの双対作用 $\hat{\theta}_t$ がこの上に入る. このトーラスの作用を分類すれば, 竹崎の双対定理によって分類が完成する, という議論の流れになっている. コンヌはこのトーラス作用の分類がモジュラー自己同型 $\sigma_T^\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ の漸近内部性に帰着される事を示した.

そして最終的にコンヌは忠実正則状態 φ に対して次の補題を証明すれば, σ_T^φ の漸近内部性が従う事を示した. ([3, pp.208] を参照.)

補題 1 (A) 次の二条件を満たすベクトルの列 $\{\xi_n\} \subset \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ が存在する.
(A1) すべての $t \in \mathbf{R}$ について $\lim_n \|\Delta_\varphi^{it} \otimes \Delta_\varphi^{it}\xi_n - \xi_n\| = 0$.
(A2) すべての $a, b \in \mathcal{M}$ について $\lim_n \langle a \otimes b^o \xi_n, \xi_n\rangle = \langle ab^o \xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle$.
(B) 次の二条件を満たす $B(\mathfrak{H})$ 上の正則状態の列 $\{\Psi_n\}$ が存在する.

(B1) $\lim_n \Psi_n(\Delta_\varphi^{it}) = 1$.
(B2) $\lim_n \Psi_n(ab^o) = \langle a\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle\langle b^0\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle (= \varphi(a)\varphi(b))$.
但しξ_φは$\mathfrak{H}$の正錐の元でφをベクトル状態として与えるベクトルである.

この補題が本稿で問題にしたい補題である. 要点の一つは補題中の状態が有向列ではなく, 点列で取れる事である. ところで(B)の部分はハーゲラップによって証明された単射的III_1型因子環の再中心化環の自明性から従う(付録を参照). それで今問題にするのは(A)の部分である. これには次の定理が示されればよい.

定理 2 $B(\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H})$上の正則状態の列$\{\psi_n\}$で次の条件を満たすものが取れる.
(1) $\lim_n \psi_n(x\otimes y^o) = \langle xy^o\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle$, $x, y \in \mathcal{M}$,
(2) $\lim_n \|(\Delta_\varphi^{it}\otimes\Delta_\varphi^{it})\psi_n(\Delta_\varphi^{-it}\otimes\Delta_\varphi^{-it}) - \psi_n\| = 0$.

実際, $\psi_n|_{\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}}$をベクトル状態として与える$\xi_n \in (\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H})_+$を選べば, これが補題1(A)の条件を満たす事は用意にチェックできる.

それで定理2を証明する事を考える. 以下コンヌの証明の概略[3, pp.210]を解説する. (実はコンヌの論文自体, ほぼ以下に説明する程度の概略だけで詳細な証明は書かれていないのだが....)

まず$\mathcal{M}$は単射的であるので, [2]によって半離散である. 従って自然な同型$C^*(\mathcal{M}, \mathcal{M}') \cong \mathcal{M}\otimes_{\min}\mathcal{M}'$が存在する. そこで$\psi(xy^o) = \langle xy^o\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle$と$C^*(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$上の状態を定義して, 上の同型によって$\mathcal{M}\otimes_{\min}\mathcal{M}'$上の状態とみなす. そして$\psi$を$B(\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H})$上の状態にまで拡張し, これも$\psi$で表す事にする. もちろん$\psi$は正則とは限らないので, これを正則な状態で近似することを考える.

コンヌは次の事を主張した.

主張 3 任意の$\varepsilon > 0$, $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in \mathcal{M}$に対して次の3条件を満たす$B(\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H})$上の**正則な**状態$\psi'$が存在する.
(α) 全ての$x\in\mathcal{M}$に対して, $\psi'(x\otimes 1) = \langle x\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle (= \varphi(x))$,
(β) 全ての$y\in\mathcal{M}$に対して, $\psi'(1\otimes y^o) = \langle y^o\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle (= \varphi(y))$,
(γ) 全ての$1 \le i \le n$に対して$|\psi'(x_i\otimes y_i^o) - \psi(x_iy_i^o)| < \varepsilon$.

上の条件のうち, (γ)はあまり問題はないが, (α)と(β)を同時に満たす様に取れるか, という点がポイントと思われる. しかし筆者はこれを証明することができず, また他の文献も曖昧な書き方をしており, この主張が本当に正しいのか, 不明である. (後で, この主張の(α), (β)を少し弱めた補題を証明する.)

とりあえず主張3を認める事にする. そして$\mathcal{M}$の単位球が強位相で可分である事を用いると次の様な$B(\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H})$上の正則状態の列$\{\psi_n\}$が取れる.
(a) 全ての$x\in\mathcal{M}$に対して, $\psi_n(x\otimes 1) = \langle x\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle (= \varphi(x))$,
(b) 全ての$y\in\mathcal{M}$に対して, $\psi_n(1\otimes y^o) = \langle y^o\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle (= \varphi(y))$,
(c) 全ての$x, y\in\mathcal{M}$に対して$\lim_n \psi_n(x\otimes y^o) = \psi(xy^o)$.
(残念ながらこの証明もコンヌは書いていない....) 条件(c)は定理2(1)に相当する. (2)を達成するためにψ_nを適当な平均

$$\frac{1}{2N_n}\int_{-N_n}^{N_n}(\Delta_\varphi^{it}\otimes\Delta_\varphi^{it})\psi_n(\Delta_\varphi^{-it}\otimes\Delta_\varphi^{-it})dt$$

に置き換える. $\{N_n\}$ が無限大に発散すれば, (2) が成立するのは容易に検証できる. (但しどの様に N_n を選べばよいかは, やはり書いていない....) 以上が [3] に書いてある定理 2 の証明の概略である. (上でもコメントしたとおり, [3] にはここで書いた概略程度の内容しか書かれていないのだが......)

次の節で筆者なりに考えた定理 2 の詳細な証明を解説するが, 注意を二つほど書いておく.

1. 主張 3 は本当に成り立つのか?
2. 定理 2(2) を達成するために, ψ_n を平均で置き換えたが, その際すでに (一応) 達成されている定理 2(1) を壊さないようにできるのか? これには N_n の取り方を注意深く行う必要がある.

3 詳細

この節では定理 2 の証明の詳細を解説するが, 読んでもらえればわかるとおり主張 3 は正しいのか, (少なくとも筆者には) 未だに不明である. その代わりに, 主張 3 に近い次の補題が成立する.

補題 4 $\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ 上の正則状態の列 $\{\psi_n\}$ で次を満たす物が存在する.
(1) 全ての $x, y\in\mathcal{M}$ に対して $\lim_n \psi_n(x\otimes y^o)=\psi(xy^o)$,
(2) $\lim_n \|\psi_n|_{\mathcal{M}}-\varphi\|=0$, $\lim_n\|\psi_n|_{\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}}-\varphi^o\|=0$.

証明. $T>0$ を固定して, $\theta:=\sigma_T^\varphi$ とおき, 接合積 $\mathcal{P}:=\mathcal{M}\rtimes_\theta\mathbf{Z}$ を考える. $\mathcal{P}$ は単射的な III_λ 型因子環なので, 無限テンソル積因子環 $\bigotimes_{k=1}^\infty(M_2(\mathbf{C}),\varphi_\lambda)$ に同型である. もちろん $\varphi_\lambda(x)=\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{1+\lambda} & 0\\ 0 & \frac{\lambda}{1+\lambda}\end{pmatrix}x\right)$ である. E_n を $\mathcal{P}$ から $\mathcal{P}_n:=\bigotimes_{k=1}^n(M_2(\mathbf{C}),\varphi_\lambda)$ への $\bigotimes_{k=1}^\infty\varphi_\lambda$ を保存する条件付期待値とする. すると全ての $x\in\mathcal{P}$ に対して $E_n(x)$ は x に汎強 * 位相で収束し, かつ全ての $\psi\in\mathcal{P}_*$ に対して, $\psi\circ E_n$ は ψ にノルムで収束する事は容易にわかる. $\mathcal{P}$ から $\mathcal{M}$ への条件付期待値を $\mathcal{E}$ とする. そして, $T_n:=E_n|_{\mathcal{M}}$, $S_n:=\mathcal{E}|_{\mathcal{P}_n}$ とおくとこれらは単位的完全正写像である. すると $x\in\mathcal{M}$ に対して, 汎強 * 位相に関して,

$$\begin{aligned}S_n\circ T_n(x) &= \mathcal{E}(E_n(x))\\ &\to \mathcal{E}(x)=x\end{aligned}$$

となり, また $\omega\in\mathcal{M}_*$ に対しては

$$\begin{aligned}\|\omega\circ S_n\circ T_n-\omega\| &= \|\omega\circ\mathcal{E}\circ E_n|_{\mathcal{M}}-\omega\circ\mathcal{E}|_{\mathcal{M}}\|\\ &\le \|\omega\circ\mathcal{E}\circ E_n-\omega\circ\mathcal{E}\|\\ &\to 0\end{aligned}$$

となる.

そこで $\psi_n(xy^o):=\langle S_n\circ T_n(x)S_n^o\circ T_n^o(y^o)\xi_\varphi,\xi_\varphi\rangle$ と定義する. すると $\langle S_n(x)S_n^o(y^o)\xi_\varphi,\xi_\varphi\rangle$ は $\mathcal{P}_n\otimes\mathcal{P}_n^{\mathrm{opp}}$(有限次元因子環) 上の正則状態であり, $T_n\otimes T_n^o$ は $\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ から $\mathcal{P}_n\otimes\mathcal{P}_n^{\mathrm{opp}}$ へ

の正則単位的完全正写像であるから, ψ_n は $\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ 上の正則状態である. これが (1) を満たすのは明らかである. また ψ_n の定義から, $\psi_n|_{\mathcal{M}}=\varphi\circ S_n\circ T_n$, $\psi_n|_{\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}}=\varphi^o\circ S_n^o\circ T_n^o$. よって $\lim_n\|\psi_n|_{\mathcal{M}}-\varphi\|=0$ と $\lim_n\|\psi_n|_{\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}}-\varphi^o\|=0$ が上の考察から成立する. □

補題 4(2) の条件は主張 3(α), (β) の条件を少し弱めたものになっているが, 以下の議論ではこれで十分である. もちろん補題 4(1) は定理 2(1) そのものである.

注意. $\psi(\sigma_t^\varphi(x)\sigma_t^\varphi(y)^o)=\langle\Delta_\varphi^{it}x\Delta_\varphi^{-it}\Delta_\varphi^{it}y^o\Delta_\varphi^{-it}\xi_\varphi,\xi_\varphi\rangle=\psi(xy^o)$ なので, 全ての $t\in\mathbf{R}$ について $\lim_n\psi_n(\sigma_t^\varphi(x)\sigma_t^\varphi(y)^o)=\psi(xy^o)$ が成り立つ.

定理 2(2) の証明のために次の数列に関する補題を準備する.

補題 5 $\{a_{nm}^i\}_{(i,n,m)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{Z}}\subset\mathbf{C}$ を $\lim_{n\to\infty}a_{nm}^i=\alpha_i$ となる集合とする. (極限が m によらない.) このとき無限大に発散する増大数列 $\{N_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathbf{N}$ で

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2N_n}\sum_{m=-N_n+1}^{N_n}a_{nm}^i=\alpha_i$$

となる物が存在する.

証明. a_{nm}^i を $a_{nm}^i-\alpha_i$ に置き換えて, $\alpha_i=0$ と仮定してもよい. 次に狭義の単調増大な正の整数の数列 $\{M_k\}_{k=0}^\infty$ を次の様に定める. まず $M_0:=0$ とする. M_{k-1} まで選んだとして $M_k>M_{k-1}$ を次が成立する様に選ぶ. $n>M_k$ となる任意の n について $|a_{nm}^i|<k^{-1}$, $1\le i\le k$, $-k+1\le m\le k$ が成立する. (もちろんすべての i,m について a_{nm}^i は 0 に収束するからこれは可能である.) すると任意の自然数 n について, $M_k<n\le M_{k+1}$ となる k が一意的に定まるので $N_n=k$ とおく. N_n が単調増大で $\lim_n N_n=\infty$ となるのは明らかである. 次に任意の i について $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2N_n}\sum_{m=-N_n+1}^{N_n}a_{nm}^i=0$ を示す. i を固定して, n を $i\le N_n$ となるように選ぶ. N_n の定義から, $M_k<n\le M_{k+1}$ なら $N_n=k$ であって, M_k の選び方と $n>M_k$ により, $|a_{nm}^i|<1/k$, $-N_n+1=-k+1\le m\le k=N_n$ となる. すると

$$\left|\frac{1}{2N_n}\sum_{m=-N_n+1}^{N_n}a_{nm}^i\right|<\frac{1}{k}=\frac{1}{N_n}.$$

となって n を無限大にすると結論を得る. □

補題 6 $(\mathcal{M})_1$ を $\mathcal{M}$ の単位球として, $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ を $(\mathcal{M})_1$ の強位相での可算稠密な部分集合とする. このとき $B(\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H})$ 上の正則状態の列 $\{\Psi_n\}$ で次の条件を満たす物が存在する.

(1) $|\Psi_n(x_ix_j^{o*})-\psi(x_ix_j^{o*})|<1/n$, $1\le i,j\le n$.

(2) $\|\Psi_n|_{\mathcal{M}}-\varphi\|<1/n$, $\|\Psi_n|_{\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}}-\varphi^o\|<1/n$.

(3) 全ての $t\in\mathbf{R}$ に対して $\lim_n\|(\Delta_\varphi^{it}\otimes\Delta_\varphi^{it})\Psi_n(\Delta_\varphi^{-it}\otimes\Delta_\varphi^{-it})-\Psi_n\|=0$.

証明. 簡単のため $\Delta_\varphi^{it}\otimes\Delta_\varphi^{it}$ を u_t で表す事とする. $\{\psi_n\}$ を補題 4 のように選んで, これを更に $B(\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H})$ 上の正則状態に拡張しておく. (これは ψ_n をベクトル状態で表す事ができるので, 可能である.)

次に $a_{nm}^{i,j}\in\mathbf{C}$ を

$$a_{nm}^{i,j}:=\int_{m-1}^{m}u_s\psi_nu_{-s}(x_ix_j^{o*})ds.$$

と定義する. $\lim_n u_s\psi_n u_{-s}(x_i x_j^{o*}) = \lim_n \psi_n(\sigma^{\varphi}_{-s}(x_i)\sigma^{\varphi}_{-s}(x_j^*)^o) = \psi(x_i x_j^{o*})$ なので, ルベーグ収束定理から $\lim_n a^{i,j}_{nm} = \psi(x_i x_j^{o*})$ である.

補題5によって無限大に発散する単調増大数列 $\{N_n\}$ で

$$\lim_n \frac{1}{2N_n}\sum_{m=-N_n+1}^{N_n} a^{i,j}_{nm} = \lim_n \frac{1}{2N_n}\int_{-N_n}^{N_n} u_s\psi_n u_{-s}(x_i x_j^{o*})ds = \psi(x_i x_j^{o*})$$

となる物が存在する. そこで Ψ_n を

$$\Psi_n := \frac{1}{2N_n}\int_{-N_n}^{N_n} u_s\psi_n u_{-s}ds.$$

と定義すると, $\lim_n \Psi_n(x_i x_j^{o*}) = \psi(x_i x_j^{o*})$ となっている.

また $\Psi_n|_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2N_n}\int_{-N_n}^{N_n}\psi_n|_{\mathcal{M}}\circ\sigma^{\varphi}_{-s}ds$ なので, n を無限大にすると

$$\begin{aligned}\|\Psi_n|_{\mathcal{M}} - \varphi\| &= \left\|\frac{1}{2N_n}\int_{-N_n}^{N_n}(\psi_n|_{\mathcal{M}} - \varphi)\circ\sigma^{\varphi}_{-s}ds\right\| \\ &\leq \frac{1}{2N_n}\int_{-N_n}^{N_n}\|(\psi_n|_{\mathcal{M}} - \varphi)\circ\sigma^{\varphi}_{-s}\|ds \\ &= \|\psi_n|_{\mathcal{M}} - \varphi\| \to 0\end{aligned}$$

となる. 同様にして $\lim_n \|\Psi_n|_{\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}} - \varphi^o\| = 0$ となる.

条件 (3) をチェックする.

$$\begin{aligned}\|u_t\Psi_n u_{-t} - \Psi_n\| &= \left\|\frac{1}{2N_n}\int_{-N_n}^{N_n}(u_{t+s}\psi_n u_{-t-s})ds - \Psi_n\right\| \\ &= \left\|\frac{1}{2N_n}\int_{-N_n+t}^{N_n+t}(u_s\psi_n u_s)ds - \frac{1}{2N_n}\int_{-N_n}^{N_n}(u_s\psi_n u_s)ds\right\| \\ &\leq \frac{|t|}{N_n}.\end{aligned}$$

となるので, N_n が無限大に発散する数列である事から (3) が成立する事がわかる. あとは $\{\Psi_n\}$ の適当な部分列を取る事により, (1), (2) も得られる. □

定理2の証明. $\{\psi_n\}$ を補題6の様に選ぶ. 定理2(2) は補題6(3) そのものであるので, $\{\psi_n\}$ が (1) を満たす事を証明する. $x, y \in (\mathcal{M})_1$ に対して証明すれば十分である.

まず次の事に注意する. $a \in \mathcal{M}$ に対して,

$$\begin{aligned}\|a\|^2_{\psi_n} &= \psi_n(a^*a) \\ &= |\varphi(a^*a) + \psi_n(a^*a) - \varphi(a^*a)| \\ &\leq \|a\|^2_{\varphi} + \|\psi_n|_{\mathcal{M}} - \varphi\|\|a\|^2 \\ &\leq \|a\|^2_{\varphi} + 1/n\|a\|^2\end{aligned}$$

であるから $\|a\|_{\psi_n} \leq \|a\|_{\varphi} + \|a\|/\sqrt{n}$ が成り立つ. 同様に $\|a^o\|_{\psi_n} \leq \|a^*\|_{\varphi} + \|a\|/\sqrt{n}$ も成り立つ. ($\|a^o\|_{\varphi^o} = \|a^*\|_{\varphi}$ である事に注意.)

j を固定してまず $\psi_n(xx_j^{o*})$ が $\psi(xx_j^{o*})$ に収束する事を示す. $\varepsilon > 0$ を任意に取ってきて, x_i を $\|x - x_i\|_\varphi < \varepsilon$ となる様に選ぶ. $N \in \mathbf{N}$ を $i, j \leq N$, $1/\sqrt{N} < \varepsilon$ となる様に選ぶ. すると任意の $n \geq N$ に対して, 補題6から $|\psi_n(x_i x_j^{o*}) - \psi(x_i x_j^{o*})| < 1/n$ となるので, 上の注意と合わせて,

$$\begin{aligned}
|\psi(xx_j^{o*}) - \psi_n(xx_j^{o*})| &\leq |\psi((x - x_i)x_j^{o*})| + |\psi(x_i x_j^{o*}) - \psi_n(x_i x_j^{o*})| + \psi_n((x - x_i)x_j^{o*})| \\
&< \|x - x_i\|_\psi + 1/n + \|x - x_i\|_{\psi_n} \\
&\leq \|x - x_i\|_\varphi + 1/n + \|x - x_i\|_\varphi + 2/\sqrt{n} \\
&< 5\varepsilon
\end{aligned}$$

となる. (a と b^o の積は可換である事に注意されたい.) よって $\psi_n(xx_j^{o*})$ は $\psi(xx_j^{o*})$ に収束する. 言い換えると任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N = N(\varepsilon, x, j) \in \mathbf{N}$ が存在して, 任意の $n \geq N(\varepsilon, x, j)$ に対して, $|\psi(xx_j^{o*}) - \psi_n(xx_j^{o*})| < \varepsilon$ となる.

次に任意の $x, y \in \mathcal{M}$ に対して $\psi_n(xy^o)$ が $\psi(xy^o)$ に収束する事を示す.

x_j を $\|y^* - x_j\|_\varphi < \varepsilon$ となる様に選ぶ. そして $N_1 \in \mathbf{N}$ を $N_1 \geq j$, $N_1 \geq N(\varepsilon, x, j)$, $1/\sqrt{N_1} < \varepsilon$ となる様に選ぶ. すると任意の $n \geq N_1$ に対して, 上と同様に

$$\begin{aligned}
|\psi(xy^0) - \psi_n(xy^o)| &\leq |\psi(x(y^o - x_j^{*o}))| + |\psi(xx_j^{*o}) - \psi_n(xx_j^{*o})| + |\psi_n(x(y^o - x_j^{*o}))| \\
&< \|y^o - x_j^{*o}\|_\psi + \varepsilon + \|y^o - x_j^{*o}\|_{\psi_n} \\
&\leq \|y^* - x_j\|_\varphi + \varepsilon + \|y^* - x_j\|_\varphi + 2/\sqrt{n} \\
&< 5\varepsilon
\end{aligned}$$

という評価ができ, (1) が証明された. □

(補足.) もし主張3が正しければ, 上の定理2の証明と同様に, 前節であげた条件 (a), (b), (c) が証明される. (この場合 $\|x\|_{\psi_n} = \|x\|_\varphi$ となる.) あとは N_n を補題5のように選ぶ事によって定理2が証明されることは簡単に見て取れる.

A 再中心化環の自明性と補題1(B)の証明

補題1(B) はハーゲラップによる再中心化環の自明性から導かれるのだが, この部分も詳細に書いた文献があまり見当たらないようなので, ついでに付録として書いておく.

定義 7 φ をフォンノイマン環 $\mathcal{M}$ 上の忠実正則状態とする.
(1) $C(\varphi)$ をノルム有界の列 $(x_n) \subset \mathcal{M}$ で $\lim_n \|[\varphi, x_n]\| = 0$ となる列全体とする.
(2) $B(\varphi)$ を, 全ての $(x_n) \in C(\varphi)$ に対して, 汎強位相で $\lim_n [a, x_n] = 0$ となる $a \in \mathcal{M}$ の集合とする.

$B(\varphi)$ が再中心化環と呼ばれるものである. ハーゲラップは [4] で単射的 III_1 型因子環に対しては, 全ての忠実正規状態に対して, $B(\varphi) = \mathbf{C}1$ である事を証明した. これが再中心化環の自明性である.

再中心化環の性質として次の命題が以後基本的となる.

命題 8 フォンノイマン環 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ 上の忠実正則状態 φ に対して次の四条件は同値である.
(1) $B(\varphi) = \mathbf{C}1$.
(2) 任意の $a \in \mathcal{M}$ と $\delta > 0$ に対して, $\overline{\mathrm{conv}}\{u^*au \mid u \in U(\mathcal{M}), \|[u,\varphi]\| < \delta\} \cap \mathbf{C}1 \neq \emptyset$.
(3) 任意の $a \in \mathcal{M}$ に対して, $\varphi(a)1 \in \bigcap_{\delta>0} \overline{\mathrm{conv}}\{u^*au \mid u \in U(\mathcal{M}), \|[u,\varphi]\| < \delta\}$.
(4) 任意の $\psi \in \mathcal{M}$ に対して $\psi(1)\varphi \in \bigcap_{\delta>0} \overline{\mathrm{conv}}\{u\psi u^* \mid u \in U(\mathcal{M}), \|[u,\varphi]\| < \delta\}$.
ただし (2), (3) では閉包は汎弱位相についてであり, (4) はノルム位相で考えている.

証明は [4, Proposition 1.3, Remark 1.4] を参照の事. 特に単射的 III_1 型因子環に対しては上の四条件が全て成立する事になる.

命題 8 を用いて次の命題を証明する. 以下 $\mathcal{M}$ を単射的 III_1 型因子環とし, $\mathcal{M}$ の忠実正則状態 φ を固定する.

命題 9 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $\{u_j^n\}_{j=1}^{m_n} \subset U(\mathcal{M})$ と $\{\lambda_j^n\}_{j=1}^{m_n} \subset \mathbf{R}_{\geq 0}$ で $\sum_j \lambda_j^n = 1$, $\|[u_j^n, \varphi]\| < 1/n$, かつ $P_n(x) = \sum_j \lambda_j^n u_j^{n*} x u_j^n$ とおいた時, 任意の $\psi \in \mathcal{M}_*$ に対して $\|\psi \circ P_n - \psi(1)\varphi\| \to 0$ となるものが存在する.

証明のために次の補題を準備する.

補題 10 任意の $\varepsilon, \delta > 0$ と $\psi_1, \cdots, \psi_n \in \mathcal{M}_*$ に対して, $\{u_i\}_{i=1}^m \subset U(\mathcal{M})$ と $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathbf{R}_{\geq 0}$ で $\sum_i \lambda_i = 1$, $\|[u_i, \varphi]\| < \delta$, かつ $P(x) = \sum_i \lambda_i u_i^* x u_i$ とした時, $\|\psi_k \circ P - \psi_k(1)\varphi\| < \varepsilon$ となる物が存在する.

証明. n についての帰納法で証明する. $n = 1$ のときは命題 8(4) から明らかである. n の場合まで証明できたとして, $n+1$ の場合を考える. $\varepsilon', \delta' > 0$ と $\psi_1, \cdots, \psi_n$ に対して帰納法の仮定から, $\{u_i\}_{i=1}^m \subset U(\mathcal{M})$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathbf{R}_{\geq 0}$ で補題の結論を満たすような元を選び, $P(x) = \sum_i \lambda_i u_i^* x u_i$ とおく. そして, $\psi_{n+1} \circ P$ に対して, 命題 8(4) を適用して, $\{v_j\}_{j=1}^l \subset U(\mathcal{M})$, $\{\mu_j\}_{j=1}^l \subset \mathbf{R}_{\geq 0}$ を $\|[v_j, \varphi]\| < \delta'$, $\sum_j \mu_j = 1$, かつ $Q(x) = \sum_j \mu_j v_j^* x v_j$ と置いた時, $\|\psi_{n+1} \circ P \circ Q - \psi_{n+1} \circ P(1)\varphi\| < \varepsilon'$ となるように取る. $P(1) = 1$ であるから, ψ_{n+1} については補題の結論が (P を $P \circ Q$ に, ε を ε' に置き換えた式で) 成り立つ. $P \circ Q(x) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j u_i^* v_j^* x v_j u_i$ となるが, $\|\psi_k \circ P \circ Q - \psi_k(1)\varphi\|$, $1 \leq k \leq n$ を評価する. これは

$$
\begin{aligned}
\|\psi_k \circ P \circ Q - \psi_k(1)\varphi\| &\leq \|\psi_k \circ P \circ Q - \psi_k \circ \varphi \circ Q\| + \|\psi_k \circ \varphi \circ Q - \psi_k(1)\varphi\| \\
&\leq \|\psi_k \circ P - \psi_k \circ \varphi\| + \|\psi_k \circ (\varphi \circ Q - \varphi)\| \\
&\leq \varepsilon' + \|\psi_k\| \|\varphi \circ Q - \varphi\| \\
&\leq \varepsilon' + \|\psi_k\| \sum_j \mu_j \|v_j \varphi v_j^* - \varphi\| \\
&\leq \varepsilon' + \|\psi_k\| \delta'
\end{aligned}
$$

と評価できる. また $\|[\varphi, v_j u_i]\| < 2\delta'$ であるから, $\varepsilon, \delta > 0$ に対して, $\varepsilon' + \max_k\{\|\psi_k\|\}\delta' < \varepsilon$, $2\delta' < \delta$ と ε', δ' を選んでおけば, $n+1$ の場合, $\{v_j u_i\}$ と $\{\lambda_i \mu_j\}$ が補題の結論を満たす. □

命題 9 の証明. $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ を $\mathcal{M}_*$ の可算稠密部分集合とする. 補題 10 によって, $\{u_j^n\}_{j=1}^{m_n} \subset U(\mathcal{M})$ と $\{\lambda_j^n\}_{j=1}^{m_n} \subset \mathbf{R}_{\geq 0}$ が次の 3 条件を満たす様に存在する.

(1) $\sum_j \lambda_j^n = 1$.
(2) $\|[u_j^n, \varphi]\| < 1/n$.
(3) $P_n(x) = \sum_j \lambda_j^n u_j^{n*} x u_j^n$ と置いた時, $\|\psi_i \circ P_n - \psi_i(1)\varphi\| < 1/n$, $1 \le i \le n$.

任意の $\psi \in \mathcal{M}_*$ を取る. そして $\|\psi - \psi_i\| < \varepsilon$ となる ψ_i を選ぶ. N を $1/N \le \varepsilon$, $i \le N$ となる様に取ると, 任意の $n \ge N$ に対して,

$$\begin{aligned}\|\psi \circ P_n - \psi(1) \circ \varphi\| &\le \|(\psi - \psi_i) \circ P_n\| + \|\psi_i \circ P_n - \psi_i(1) \circ \varphi\| + \|(\psi(1) - \psi_i(1))\varphi\| \\ &\le \varepsilon + 1/n + \varepsilon \\ &\le 3\varepsilon\end{aligned}$$

となる. よって $\lim_n \|\psi \circ P_n - \psi(1)\varphi\| = 0$ である. □

補題 1(B) の証明. $\{u_j^n\}$, $\{\lambda_j^n\}$ を命題 9 の様に取る. $T \in B(\mathfrak{H})$ に対して, $\Psi_n(T) := \sum_j \lambda_j^n \langle u_j^{n*} T u_j^n \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle$ と定義する. すると命題 9 から, $x, y \in \mathcal{M}$ に対しては, $\Psi_n(xy^o) = \langle P_n(x) y^o \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \to \varphi(x) \langle y^o \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle$ となる. また $\Psi_n(\Delta_\varphi^{it}) = \sum_j \lambda_j^n \langle \Delta_\varphi^{it} u_j^n \xi_\varphi, u_j^n \xi_\varphi \rangle$ となるが, [1, Lemma 2.7] より, 定数 C が

$$\|(\Delta_\varphi^{it} - 1) u_j^n \xi_\varphi\| \le C(1 + |t|) \sqrt{\|[u_j^n, \varphi]\|} \le C(1 + |t|)/\sqrt{n}$$

を満たす様に存在する事を用いると, $\Psi_n(\Delta_\varphi^{it}) \to 1$ がわかる. □

参考文献

[1] Connes, A., *Almost periodic states and factors of type III_1*, J. Funct. Anal. **16** (1974), 415–445.

[2] Connes, A., *Classification of injective factors*, Ann. Math. **104** (1976), 73–115.

[3] Connes, A., *Type III_1 factors, property L'_λ and closure of inner automorphisms*, J. Operator Theory **14** (1985), 189–211.

[4] Haagerup, U., *Connes' bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III_1*, Acta Math. **158** (1987), 95–148.