

## Delayed Feedback 制御の限界について

静岡大学・理工学研究科 門脇 正樹 (Masaki Kadowaki)  
 Graduate School of Science and Engineering,  
 Shizuoka University

静岡大学・工学部 宮崎 倫子 (Rinko Miyazaki)  
 Faculty of Engineering,  
 Shizuoka University

### 1 序文

次の  $n$  次元の微分方程式

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x)$$

を考える。ここで、 $\Omega$  を  $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^n$  内のある領域とし、 $f$  は領域  $\Omega$  から  $\mathbf{R}^n$  への  $C^1$  級関数であると仮定する。また、(1.1) は周期が  $\omega > 0$  の不安定な双曲型周期解  $x^*(t)$  を持つとする。この不安定な周期解  $x^*(t)$  を“安定化”する方法のひとつとして、Pyragas [6] によって提案された Delayed Feedback 制御（以下、 $DF$  制御）が知られている。それは、(1.1) に状態フィードバックを施した次の時間遅れを持つ  $n$  次元の微分方程式

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + u(t) \\ u(t) = K(x(t-\omega) - x(t)) \end{cases}$$

で与えられる。ここで、 $K$  は  $n \times n$  定数行列でフィードバックゲインと呼ばれている。制御入力  $u(t)$  は、時刻  $t$  での状態と、安定化したい周期解の周期分だけさかのぼった時刻  $t - \omega$  での状態の差で与えられると言うのがこの方法の特長である。なお、(1.2) も周期解  $x^*(t)$  を解に持つことに注意しよう。そして、フィードバックゲイン  $K$  を適当に取ることにより、(1.2) の周期解  $x^*(t)$  が軌道漸近安定となるときに (1.1) の不安定周期解  $x^*(t)$  が安定化できたと解釈する。この  $DF$  制御は手法的な簡便性から数値シミュレーションを主とした結果が数多く出されている。数学的な解析についても数は少ないがいくつかの結果が知られている。その代表的なものとして、次の定理が知られている。

**定理 A (Nakajima [4]).** (1.1) の双曲型周期解  $x^*(t)$  について、(1.1) の線形変分方程式

$$(1.3) \quad \frac{dy}{dt} = Df(x^*(t))y$$

が 1 より大きな実数の特性乗数を奇数個持つ場合、不安定な周期解は任意のフィードバックゲイン  $K$  に対して  $DF$  制御 (1.2) によって安定化することができない。ここで、 $Df(x)$  は  $f(x)$  の  $x$  におけるヤコビアン行列を表すものとする。

この定理 A における「1 より大きな実数の特性乗数を奇数個持つ」という条件は *odd number condition* と呼ばれ、その後多くの文献において引用されている。しかし、この定理 A の証明には不十分な点が存在する。我々は定理 A の完全な証明を与えることを試みたが、残念ながら達成できなかった。そこで問題を単純化するために、平面系 ( $n = 2$  のとき) に限定し次の定理を得た。

**定理 1.**  $n = 2$  とする。このとき (1.1) の不安定な双曲型周期解  $x^*(t)$  は任意の  $k \in \mathbf{R}$  ( $k \neq -\frac{1}{\omega}$ ) に対してフィードバックゲイン  $K$  を  $K = kI$  とした  $DF$  制御 (1.2) によって安定化することができない。ここで、 $I$  は  $2 \times 2$  単位行列である。

この定理は、フィードバックゲインを単位行列の定数倍で与えたときに安定化できないことを表現している。定理 1 の証明は、フロッケの理論 ([3] 参照) に基づくものであるが、本稿はその証明を与えることを目的としている。フロッケの理論を具体的問題に適用する際、モノドロミー作用素を求める時点で行き詰ってしまうことが多い。これは、時間遅れの存在に起因するのではなく、時間遅れを持たない通常の周期系常微分方程式において基本解を求めることが一般には困難である点に起因している。実際、定理 1 の証明においてもモノドロミー作用素を具体的に求める時点で行き詰ってしまう。そこで我々はモノドロミー作用素を経由せずに特性乗数を評価しようという考えに立ち、定理 1 の証明を行った。これは、定理 1 自体の価値以上に、なかなか使えないフロッケの理論を使えるものにする手がかりとなるのではないかと考えている。

## 2 準備

まず、文献 [3] の Chapter 8 で展開されている時間遅れを持つ微分方程式に対するフロッケの理論で特に重要となるものを引用しておこう。区間  $[-\omega, 0]$  から  $\mathbf{R}^n$  への連続関数からなる集合を  $C$  で表し、そのノルムを  $\phi \in C$  に対して  $\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)| : -\omega \leq \theta \leq 0\}$  で与える。このとき、 $C$  はバナッハ空間になっている。 $\beta > 0$  に対して連続関数  $x: [-\omega, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$  と  $t \in [0, \beta)$  に対して、 $x$  の  $t$ -切片  $x_t \in C$  を  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$  ( $-\omega \leq \theta \leq 0$ ) によって定義する。

以上の設定のもと、時間遅れを持つ周期系線形微分方程式を導入しよう。任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対して線形作用素  $L(t): C \rightarrow \mathbf{R}^n$  が [3] の Section 6.1 の冒頭で述べられている条件を満たすよう与えられ、 $L(t + \omega) = L(t)$  を満たすものとする。このとき、時間遅れを持つ周期系線形微分方程式は一般に次式で与えられる。

$$(2.1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = L(t)x_t.$$

任意の初期条件  $s \in \mathbf{R}$ 、 $\phi \in C$  に対して、(2.1) の  $[s, \infty)$  で定義された解  $x = x(s, \phi)$  が存在し、この  $t$ -切片  $x_t(s, \phi) \in C$  は  $t, s$  および  $\phi$  について連続である。任意の  $t \geq s$  および  $\phi \in C$  に対して、 $C$  上の解作用素  $T(t, s)$  を  $T(t, s)\phi = x_t(s, \phi)$  で定義する。これは線形作用素で、全ての  $t \geq s \geq \tau$  に対して  $T(t, s)T(s, \tau) = T(t, \tau)$  を満たす。また、 $L(t)$  の周期性より全ての  $t \geq s$  に対して  $T(t + \omega, s) = T(t, s)T(s + \omega, s)$  が成り立つ。モノドロミー作用素  $U: C \rightarrow C$  は次式で定義される。

$$U\phi = T(\omega, 0)\phi.$$

$U$  は完全連続作用素となるので、 $U$  のスペクトル  $\sigma(U)$  は高々可算個で、複素平面内において零のみを集積点に持つコンパクトな集合である。また、 $\sigma(U) \setminus \{0\}$  は  $U$  の点スペクトル  $P\sigma(U)$  になっている。すなわち、 $\lambda \in P\sigma(U)$  に対して  $\phi \neq 0$  なる  $C$  の要素が存在して  $U\phi = \lambda\phi$  が成り立つ。任

意の  $\lambda \in P\sigma(U)$  のことを (2.1) の特性乗数,  $\lambda = e^{\mu\omega}$  を満たす  $\mu$  のことを (2.1) の特性指数と言う. 完全連続作用素の性質から, (2.1) の任意の特性乗数  $\lambda$  に対して,  $C$  の 2 つの閉部分空間  $E_\lambda$  と  $Q_\lambda$  が存在して次の性質を満たす:

- (i)  $E_\lambda$  は有限次元;
- (ii)  $E_\lambda \oplus Q_\lambda = C$ ;
- (iii)  $UE_\lambda \subseteq E_\lambda, UQ_\lambda \subseteq Q_\lambda$ ;
- (iv)  $\sigma(U|E_\lambda) = \{\lambda\}, \sigma(U|Q_\lambda) = \sigma(U) \setminus \{\lambda\}$ .

$E_\lambda$  の次元を特性乗数  $\lambda$  の重複度と言う.

**補題 1** ([3, Lemma 8.1.2]).  $\lambda$  が (2.1) の特性乗数で,  $E_\lambda$  の  $d_\lambda$  次元の基底を列として並べた  $n \times d_\lambda$  行列値関数を  $\Psi$  とする. このとき,  $\sigma(e^{B\omega}) = \{\lambda\}$  となるような  $d_\lambda \times d_\lambda$  行列  $B$  と, 各列が  $C$  の要素からなるような  $P(t+\omega) = P(t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$  を満たす  $n \times d_\lambda$  行列値関数  $P(t)$  が存在し,  $\phi = \Psi b$  ( $b \in \mathbf{R}^{d_\lambda}$ ) のとき,  $x_t(0, \phi)$  は  $t \in (-\infty, \infty)$  で定義され,

$$x_t(0, \phi) = P(t)e^{Bt}b, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

したがって, 特に,  $\lambda = e^{\mu\omega}$  が (2.1) の特性乗数となるための必要十分条件は, 次の形で与えられる (2.1) の非自明解が存在することである.

$$(2.2) \quad x(t) = e^{\mu t}p(t), \quad p(t+\omega) = p(t).$$

本稿では特性乗数  $\lambda = e^{\mu\omega}$  に対して, (2.2) の形の解のことを Floquet タイプの解と呼ぶことにする.

次に (1.2) の周期解  $x^*(t)$  の軌道漸近安定性について述べておこう. (1.2) は自励系なので, 以下では, 初期時刻を 0 に設定する. また, 初期関数  $\phi \in C$  を持つ (1.2) の解を単に (初期時刻 0 は省略して)  $x(\phi)$  と表記する.

**定義 1.**  $x^*$  が軌道安定であるとは, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $\delta(\varepsilon) > 0$  が存在し,  $\text{dist}(\phi, x_0^*) < \delta(\varepsilon)$  のとき全ての  $t \geq 0$  に対して  $\text{dist}(x_t(\phi), x_0^*) < \varepsilon$  が成り立つときに言う.  $x^*$  が軌道漸近安定であるとは, 軌道安定であり, かつ, ある  $\delta > 0$  が存在し,  $\text{dist}(\phi, x_0^*) < \delta$  のとき  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x_t(\phi), x_0^*) = 0$  が成り立つときに言う. ここで,  $\phi, \psi \in C$  に対して  $\text{dist}(\phi, \psi) = \min\{\|\phi - \psi\|\}$  とする.

軌道漸近安定に対する付加的な概念も与えよう.

**定義 2** ([1, 5] 参照).  $x^*$  が漸近的位相特性を持つとは, ある  $\delta > 0$  が存在し  $\text{dist}(\phi, x_0^*) < \delta$  を満たす  $\phi$  に対して  $c = c(\phi) \in \mathbf{R}$  が存在し,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_t(\phi) - x_{t+c}^*\| = 0$  となるときに言う.

方程式 (1.2) の周期解  $x^*(t)$  の軌道漸近安定性を調べるために,  $x^*(t)$  まわりでの線形変分方程式

$$(2.3) \quad \frac{dy(t)}{dt} = Df(x^*(t))y(t) + K(y(t-\omega) - y(t))$$

を考える. 明らかに (2.3) は  $y^*(t) = f(x^*(t))$  なる周期解を持っている. したがって, 補題 1 より特性乗数に  $\lambda^* = 1$  を持つ. 1 が重複度 1 の特性乗数のとき,  $x^*(t)$  は (1.2) の非退化周期解と言い, さらに, 1 (重複度は 1) 以外の特性乗数の大きさが 1 に等しくないとき,  $x^*(t)$  は双曲型周期解と言う.

時間遅れがない場合と同様に  $x^*(t)$  の安定性は特性乗数の大きさによって判定可能であることが知られている. 双曲型周期解の安定性に関しては Hale & Lunel による安定集合及び不安定集合の存在とその次元に言及した結果 [3] の Theorem 10.3.2 が有効である. ただし, この定理を用いて軌道安定性を示すことはできない. 軌道安定性まで示すには, [2] の Theorem 10.3.1 が便利である. それによると, 1 以外の全ての特性乗数の大きさが 1 より小さければ (漸近位相特性を持つ) 軌道漸近安定であり, 1 より大きいものがひとつでも存在すれば不安定であることがわかる. しかし, 現段階では  $x^*(t)$  が (1.2) の双曲型周期解であることを示すことができていないので Hale の結果を用いることはできない.

双曲型周期解よりも弱い仮定である非退化周期解に対する安定性については, Stokes による結果 [5, Theorem 2.6] が知られており, やはり, 1 以外の全ての特性乗数の大きさが 1 より小さければ (漸近位相特性を持つ) 軌道漸近安定であるというものである. しかし, 不安定性については我々の知る限り既存の結果は存在しないようである. そこで, Stokes の証明に倣い以下の補題を得た. 証明は長くなるので省略する.

**補題 2.**  $x^*(t)$  が (1.2) の非退化周期解とする. このとき, 大きさが 1 より大きな特性乗数が存在すれば, (1.2) の周期解  $x^*(t)$  は軌道安定ではない, すなわち, 不安定である.

### 3 定理 1 の証明

未制御状態の線形変分方程式 (1.3) も  $y^*(t) = f(x^*(t))$  なる周期解を持っている. したがって, (1.3) の特性乗数のうちひとつは 1 である. また,  $n = 2$  であるという仮定より, 特性乗数がもうひとつ存在しこれを  $\lambda_0$  とおく. (1.1) の周期解  $x^*(t)$  が双曲型で不安定であるという仮定に注意すると,  $|\lambda_0| > 1$  である. 特性乗数  $\lambda_0 = e^{\mu_0\omega}$  に対する (1.3) のフロッケ解を  $\hat{y}^*(t) = e^{\mu_0 t} p^*(t)$  ( $p^*(t+\omega) = p^*(t)$ ) と表すことにする. (1.3) の基本解行列  $\Phi(t)$  として, 第 1 列目に  $y^*(t)$ , 第 2 列目に  $\hat{y}^*(t)$  を並べた行列を採用すると

$$\Phi(\omega) = [y^*(\omega) \quad \hat{y}^*(\omega)] = [y^*(0) \quad e^{\mu_0\omega} p^*(\omega)] = [y^*(0) \quad \lambda_0 p^*(0)] = [y^*(0) \quad \lambda_0 \hat{y}^*(0)]$$

より,

$$(3.1) \quad \Phi(0)^{-1} \Phi(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

が得られる. この行列を  $M$  とおく. フロッケの理論から任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対して

$$(3.2) \quad \Phi(t+\omega) = \Phi(t)M$$

が成り立ち,  $M$  の固有値が (1.3) のフロッケ乗数となる. また, 非自励系線形方程式のよく知られた性質 (例えば, [1, Theorem 1.2.4] 参照) から,

$$\det \Phi(\omega) = \det \Phi(0) \exp \left( \int_0^\omega \operatorname{tr} Df(x^*(s)) ds \right)$$

が成り立つことに注意すると,

$$\lambda_0 = \det \{ \Phi(0)^{-1} \Phi(\omega) \} = \exp \left( \int_0^\omega \operatorname{tr} Df(x^*(s)) ds \right).$$

したがって,  $\lambda_0 > 1$  であることもわかる. ここで, (2.3) の解  $y(t)$  に対して

$$(3.3) \quad y(t) =: \Phi(t)z(t), \quad z = \text{col}[z_1, z_2]$$

と変数変換を行うと,

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}z(t) + \Phi(t)\frac{dz(t)}{dt} = Df(x^*(t))\Phi(t)z(t) + K(\Phi(t-\omega)z(t-\omega) - \Phi(t)z(t))$$

となり,  $\Phi(t)$  が (1.3) の基本解行列であることと, (3.2) より  $\Phi(t-\omega) = \Phi(t)M^{-1}$  に注意すると,

$$(3.4) \quad \frac{dz(t)}{dt} = \Phi^{-1}(t)K\Phi(t)(-z(t) + M^{-1}z(t-\omega))$$

を得る.  $K = kI$  を代入し,  $z$  を各成分  $z_1, z_2$  で書き下すと, (3.1) より,

$$(3.5) \quad \frac{dz_1(t)}{dt} = k(-z_1(t) + z_1(t-\omega)),$$

$$(3.6) \quad \frac{dz_2(t)}{dt} = k\left(-z_2(t) + \frac{1}{\lambda_0}z_2(t-\omega)\right).$$

これらの方程式の根については, 特性方程式を解析することにより以下の補題が得られる.

**補題 3.** (i)  $k > -\frac{1}{\omega}$  のとき,  $(0, \phi) \in \mathbf{R} \times C$  を初期値に持つ (3.5) の解  $z_1(t)$  について,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = z_1^*, \quad \text{ただし,} \quad z_1^* = \frac{1}{1+k\omega} \left( \phi(0) + k \int_{-\omega}^0 \phi(\xi) d\xi \right)$$

が成り立つ. また  $k \leq -\frac{1}{\omega}$  のとき,  $t \rightarrow \infty$  で発散する解が存在する.

(ii)  $k > 0$  のとき, (3.6) の特性方程式 ( $\eta$  を変数にとっている)

$$(3.7) \quad \eta = -k\left(1 - \frac{1}{\lambda_0}e^{-\eta\omega}\right)$$

は, 唯一つの負の実数根  $\eta_0$  を持ち,  $(0, \phi) \in \mathbf{R} \times C$  を初期値に持つ (3.6) の解  $z_2(t)$  について,

$$(3.8) \quad z_2(t) = e^{\eta_0 t} \alpha + \bar{z}_2(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}_2(t) = 0.$$

が成り立つ. ただし,

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + k\omega} \left( \phi(0) + k \int_{-\omega}^0 \phi(\xi) d\xi \right).$$

また  $k < 0$  のとき, (3.8) は正の実数根  $\eta_1$  を持ち, したがって,  $z_2(t) = e^{\eta_1 t}$  なる解が存在する.

一方,  $\Phi(t)$  の構成法に注意すると,

$$(3.9) \quad y(t) = z_1(t)y^*(t) + z_2(t)\hat{y}^*(t) = z_1(t)f(x^*(t)) + z_2(t)e^{\mu_0 t}p^*(t)$$

であることに注意しよう.

$k < 0$  のとき, 補題 3 の (ii) の後半部分から (3.6) には  $z_2(t) = e^{\eta_1 t}$  なる解が存在する. (3.5) において  $z_1(t) = 0$  となるような初期条件 (具体的には  $z_1(t) = 0, -\omega \leq t \leq 0$  とすればよい) をとって

くると,  $y(t) = e^{(\eta_1 + \mu_0)t} p^*(t)$  となり, 補題 1 より, (2.3) は  $e^{(\eta_1 + \mu_0)\omega} = e^{\eta_1 \omega} \lambda_0 > 1$  なる特性乗数を持つことになる. ゆえに, 補題 2 より安定化できないことがわかる.

$k > 0$  のとき, 補題 3 より, (3.5) の解は初期値に応じた一定値  $z^*$  に収束し, (3.6) の解は初期値に応じて決まる  $\alpha$  を用いて (3.8) と書くことができる. (3.9) に代入すると

$$(3.10) \quad y(t) = z_1(t)f(x^*(t)) + e^{(\eta_0 + \mu_0)t} \alpha p^*(t) + \bar{z}_2(t)e^{\mu_0 t} p^*(t).$$

(3.5) において  $z_1(t) = 0$ , (3.6) において  $z_2(t) = e^{\eta_0 t}$  となるような初期条件 (具体的には,  $z_1(t) = 0$ ,  $z_2(t) = e^{\eta_0 t}$ ,  $-\omega \leq t \leq 0$  とすればよい) をとってくると,  $y(t) = e^{(\eta_0 + \mu_0)t} p^*(t)$  となる.  $\eta_0$  は (3.7) の実数根であることより,  $e^{\eta_0 \omega} \lambda_0 > 1$  が成り立つことが容易に確かめられるので, 補題 1 より, (2.3) は  $e^{(\eta_0 + \mu_0)\omega} = e^{\eta_0 \omega} \lambda_0 > 1$  なる特性乗数を持つことになる. この場合にも補題 2 より安定化できないことがわかる.

なお, (1.2) の周期解  $x^*(t)$  が非退化性については次の補題の通りである.

**補題 4.**  $n = 2$ ,  $K = kI$  とする.  $k \neq -\frac{1}{\omega}$  のとき, (2.3) の特性乗数 1 の重複度は 1 である. すなわち, (1.2) の周期解  $x^*(t)$  は非退化周期解である.  $k = -\frac{1}{\omega}$  のとき, (2.3) は  $y(t) = ty^*(t)$  なる解を持ち, 重複度が 3 以上になることはない.

**証明.**  $k \neq -\frac{1}{\omega}$  のとき, 重複度  $d$  が  $d \geq 2$  であると仮定する. 補題 1 における行列  $B$  は  $d \times d$  行列であり,  $\sigma(e^{\omega B}) = \{1\}$  に注意すると, 行列  $B^{t\omega}$  は

$$(3.11) \quad e^{tB} = I + \frac{t}{1!} B + \frac{t^2}{2!} B^2 + \cdots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} B^{d-1}$$

とかける. また,  $\mathcal{N}(B^j) = \{b \in \mathbf{R}^d : B^j b = 0\}$  とすると,

$$\mathcal{N}(B) \subset \mathcal{N}(B^2) \subset \cdots \subset \mathcal{N}(B^d), \quad \mathcal{N}(B^{j+1}) \setminus \mathcal{N}(B^j) \neq \emptyset, \quad \mathcal{N}(B^d) = \mathbf{R}^d$$

である. 補題 1 より,  $b \in \mathbf{R}^d$  に対して  $x(t) = P(t)e^{Bt}b$  は (2.3) の解である ( $P(t)$  の各列は  $C$  の要素で与えられているので, 正確には  $x_t = P(t)e^{Bt}b$  であり,  $x(t) = P(t)(0)e^{Bt}b$  と書くべきであるが, 記述が煩雑となることを避けるため (0) を省略している). なお, [3] における Lemma 8.1.2 の直前に記されている事柄から,  $P(t) = T(t, 0)\Psi e^{-Bt}$  であることが分る. したがって,  $D(f(x^*(t))) = A(t)$  とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(t) &= \left\{ \frac{d}{dt} T(t, 0)\Psi \right\} \Psi e^{-Bt} - T(t, 0)\Psi e^{-Bt} B \\ &= [A(t)T(t, 0) + K \{T(t - \omega, 0) - T(t, 0)\}] \Psi e^{-Bt} - P(t)B \\ &= A(t)P(t) + K \{P(t - \omega)e^{-\omega B} - P(t)\} - P(t)B \end{aligned}$$

(3.11) と  $P(t - \omega) = P(t)$  より,

$$(3.12) \quad \frac{d}{dt} P(t) = A(t)P(t) + KP(t) \left\{ \frac{-\omega}{1!} B + \frac{(-\omega)^2}{2!} B^2 + \cdots + \frac{(-\omega)^{d-1}}{(d-1)!} B^{d-1} \right\} - P(t)B$$

が成り立つ.  $b \in \mathcal{N}(B)$  ( $b \neq 0$ ) とすると,  $B^j b = 0$  ( $j = 1, \dots, d$ ) であるから, (3.11) および (3.12) より,

$$x(t) = P(t)e^{-Bt} = P(t)b, \quad x'(t) = P'(t)b = A(t)P(t)b = A(t)x(t)$$

となる. これは,  $P(t)b$  が (2.3) の解であると同時に (1.3) の解であることを示している. (1.1) の周期解  $x^*(t)$  の双曲性より, (1.3) の周期  $\omega$  の非自明な周期解は  $y^*(t)$  のスカラー倍のみである. したがって, ある適当なスカラー  $\alpha \neq 0$  に対して,  $P(t)b = \alpha y^*(t)$  とおける.

$b \in \mathcal{N}(B^2) \setminus \mathcal{N}(B)$  とする. まず,  $Bb \in \mathcal{N}(B)$  かつ  $Bb \neq 0$  であるから, ある適当なスカラー  $\alpha \neq 0$  に対して,  $P(t)Bb = \alpha y^*(t)$  とおけるので, (3.12) より,

$$P'(t)b = A(t)P(t)b - \alpha(\omega K + I)y^*(t).$$

(1.3) の基本解行列  $\Phi(t) = [y^*(t) \quad \hat{y}^*(t)]$  を用いると定数変化法の公式から

$$P(t)b = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}P(0)b - \alpha\Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1}(\omega K + I)y^*(s)ds.$$

$\Phi$  の定義より,

$$(3.13) \quad I = \Phi(s)^{-1}\Phi(s) = [\Phi(s)^{-1}y^*(s) \quad \Phi(s)^{-1}\hat{y}^*(s)]$$

であることと  $K = kI$  より

$$\begin{aligned} P(t)b &= \Phi(t)\Phi(0)^{-1}P(0)b - \alpha(1 + \omega k)\Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1}y^*(s)ds \\ &= \Phi(t)\Phi(0)^{-1}P(0)b - \alpha(1 + \omega k)ty^*(t). \end{aligned}$$

$P(t + \omega)b = P(t)b$  と (3.2) より

$$\Phi(t)M\Phi(0)^{-1}P(0)b - \alpha(1 + \omega k)(t + \omega)y^*(t + \omega) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}P(0)b - \alpha(1 + \omega k)ty^*(t).$$

$y^*(t + \omega) = y^*(t)$  に注意して上式を整理すると

$$(3.14) \quad \Phi(t)(M - I)\Phi(0)^{-1}P(0)b = \alpha\omega(1 + \omega k)y^*(t).$$

一方, (3.1) と  $\Phi$  の定義から

$$\Phi(t)(M - I) = [0 \quad (\lambda_0 - 1)e^{\mu_0 t}p^*(t)]$$

であるので,  $\Phi(0)^{-1}P(0)b = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  とおくと, (3.14) より,

$$(3.15) \quad \gamma(\lambda_0 - 1)e^{\mu_0 t}p^*(t) = \alpha\omega(1 + \omega k)y^*(t).$$

$k \neq -\frac{1}{\omega}$  であるから, (3.15) は成り立ち得ない. ゆえに  $d = 1$ , すなわち,  $x^*(t)$  は (1.2) の非退化周期解である.

$k = -\frac{1}{\omega}$  のとき,  $x(t) = ty^*(t)$  とすると,

$$x'(t) = y^*(t) + ty^{*'}(t) = y^*(t) + A(t)x(t),$$

および

$$K\{x(t - \omega) - x(t)\} = k\{(t - \omega)y^*(t - \omega) - ty^*(t)\} = -k\omega y^*(t)y^*(t) = y^*(t)$$

より,  $x(t) = ty^*(t)$  が (2.3) の解であることがわかる.  $d \geq 3$  を仮定する. このとき, 先の議論から  $b \in \mathcal{N}(B^2)$  に対して  $P(t)b = \alpha y^*(t)$  なる  $\alpha$  が存在することに注意しよう.  $b \in \mathcal{N}(B^3) \setminus \mathcal{N}(B^2)$  とする. まず,  $Bb \in \mathcal{N}(B^2)$ ,  $B^2b \in \mathcal{N}(B) \subset \mathcal{N}(B^2)$  であるから, ある適当なスカラー  $\alpha, \beta$  に対して,  $P(t)Bb = \alpha y^*(t)$ ,  $P(t)B^2b = \beta y^*(t)$  とおけるので, (3.12) より,

$$P'(t)b = A(t)P(t)b + \left\{ -\alpha(\omega K + I) + \frac{\beta\omega^2}{2}K \right\} y^*(t).$$

(1.3) の基本解行列  $\Phi(t) = [y^*(t) \quad \hat{y}^*(t)]$  を用いると定数変化法の公式から

$$P(t)b = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}P(0)b + \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} \left\{ -\alpha(\omega K + I) + \frac{\beta\omega^2}{2}K \right\} y^*(s) ds.$$

$K = kI$  と (3.13) より

$$P(t)b = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}P(0)b + \left\{ -\alpha(1 + \omega k) + \frac{\beta\omega^2}{2}k \right\} ty^*(t).$$

(3.15) と同様に,

$$\gamma(\lambda_0 - 1)e^{\mu_0 t} p^*(t) = \omega \left\{ \alpha(1 + \omega k) - \frac{\beta\omega^2}{2}k \right\} y^*(t).$$

$k = -\frac{1}{\omega}$  であるから, こえはあり得ない. したがって, 重複度が 3 以上になることはない.  $\square$

**注意 1.** (3.4) において  $\Phi^{-1}(t)K\Phi(t) = K$  が成り立てば, 非自励系方程式から自励系方程式へと帰着でき, 同様の解析が可能であろう. しかし, そのようなゲイン行列  $K$  の条件を求めるのは難しい.

定理 1 の証明には, 補題 3 の (ii) で特性方程式の根  $\eta_0$  や  $\eta_1$  の存在を示すだけで十分である.

$k = -\frac{1}{\omega}$  のときに重複度は 2 であることは状況から見て明らかであるが, 現段階では証明できていない.

## 参考文献

- [1] Farkas, M., *Periodic Motions*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [2] Hale, J. K., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [3] Hale, J. K. and Verduyn Lunel, S. V., *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [4] Nakajima, H., On analytical properties of delayed feedback control of chaos, *Phys. Lett. A*, (1997), 232, 207–210.
- [5] Stokes, A. P., On the stability of a limit cycle of an autonomous functional differential equation, *Cont. Diff. Eq.*, (1964), 3, 121–139.
- [6] Pyragas, K., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Physics Letters A*, (1992), 170, 421–428.