数理解析研究所講究録 1445 巻 2005 年 137-142

差分方程式の非双曲型不動点の安定性

徳島大学・総合科学部　村上 公一 (Kouichi Murakami)

1. はじめに

m 次元の差分方程式

$$x_{n+1}=F(x_n), \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

を考える。ただし，$F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ は十分なめらかとする。不動点の安定性については，以下の定理がよく知られている。

定理 1.1. $\bar{x}$ を (1) の不動点とし，$\bar{x}$ でのヤコビ行列の固有値を λ とする。

(i) $|{}^\forall\lambda|<1$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定

(ii) $|{}^\exists\lambda|>1$ ならば $\bar{x}$ は不安定

$|{}^\forall\lambda|\neq 1$ である不動点を**双曲型不動点**といい，$|{}^\exists\lambda|=1$ である不動点を**非双曲型不動点**という。双曲型不動点であれば，上記の定理で安定判別できるが，$|{}^\forall\lambda|\leq 1$ のような非双曲型不動点には適用できない。(非線形項の影響を調べる必要がある。) このような場合には，リヤプノフの方法や中心多様体理論などが使われる。

中心多様体理論によると，不動点でのヤコビ行列の固有値が

$$\begin{cases} |\lambda|=1 & (c\text{個}) \\ |\lambda|<1 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

であるとき，安定性は c 次元の方程式に帰着される。特に $c=1$ の場合は，スカラー方程式に帰着される。

例 1.1. 2 次元の差分方程式

$$\begin{cases} x_{n+1}=y_n \\ y_{n+1}=-\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{3}{2}y_n-y_n^3 \end{cases} \tag{2}$$

を考える。不動点 $(0,0)$ でのヤコビ行列は，

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

で，固有値は $\lambda = 1, \frac{1}{2}$ より，原点は非双曲型不動点となる。このとき，原点の近傍で中心多様体が存在して，

$$\begin{cases} x = u + 4\,u^3 + O(u^4) \\ y = u + 2\,u^3 + O(u^4) \end{cases}$$

と近似できる。図1において，実線が解軌道，破線が中心多様体を表す。中心多様体上の方程式は，

$$u_{n+1} = u_n - 2\,u_n^3 + O(u_n^4)$$

で与えられる。

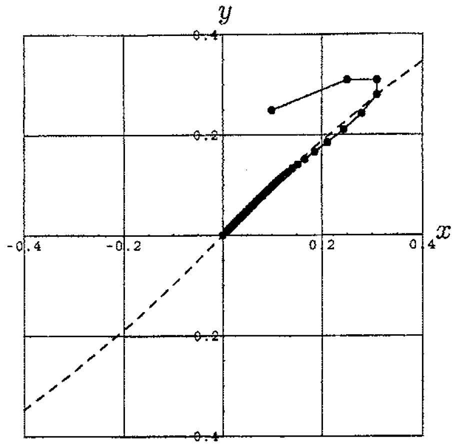

図 1. (2) の解軌道

例 1.2. 3次元の差分方程式

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 3\,y_n\,z_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\,y_n + 3\,x_n^2 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,z_n - x_n\,y_n \end{cases} \tag{3}$$

を考える。原点 $(0,0,0)$ でのヤコビ行列の固有値は $\lambda = -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ となり，原点は非双曲型不動点となる。原点近傍で中心多様体が存在して，

$$\begin{cases} x = u \\ y = 2u^2 + O(u^4) \\ z = \dfrac{4}{3}u^3 + O(u^4) \end{cases}$$

と近似できる。中心多様体上の方程式は，

$$u_{n+1} = -u_n + 8\,u_n^5 + O(u_n^6)$$

で与えられる。

そこで，以下では，スカラー差分方程式

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

の安定性の条件を考える。ただし，不動点 $\bar{x}$ において $|f'(\bar{x})| = 1$ とする。これに関して，以下の定理が知られている。

[I] $f'(\bar{x}) = 1$ の場合

> **定理 1.2.** [2] $f \in C^3$ とし，(4) の不動点 $\bar{x}$ において $f'(\bar{x}) = 1$ とする。
> (i) $f''(\bar{x}) \neq 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定
> (ii) $f''(\bar{x}) = 0$ かつ $f'''(\bar{x}) > 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定
> (iii) $f''(\bar{x}) = 0$ かつ $f'''(\bar{x}) < 0$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定

例 1.1 では，中心多様体上の方程式は

$$u_{n+1} = u_n - 2\,u_n^3 + O(u_n^4)$$

で与えられたが，定理 1.2 の (iii) より原点は漸近安定となる。したがって，(2) の原点も漸近安定となる。

[II] $f'(\bar{x}) = -1$ の場合

> **定理 1.3.** [2] $f \in C^3$ とし，(4) の不動点 $\bar{x}$ において $f'(\bar{x}) = -1$ とする。
> (i) $-3[f''(\bar{x})]^2 - 2f'''(\bar{x}) < 0$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定
> (ii) $-3[f''(\bar{x})]^2 - 2f'''(\bar{x}) > 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定

例 1.2 では，中心多様体上の方程式は，

$$u_{n+1} = -u_n + 8\,u_n^5 + O(u_n^6)$$

で与えられた。この場合は，定理 1.3 は適用できない。($\because f''(0) = f'''(0) = 0$)

この研究では，定理 1.2, 定理 1.3 を拡張し，高階の導関数 $f^{(k)}(\bar{x})$ を使った安定性の条件を求めることを目標とする。

2. 結果

今回は，以下の結果が得られた。

[I] $f'(\bar{x})=1$ の場合

定理 2.1. $f \in C^k$ とする。(4) の不動点 $\bar{x}$ において $f'(\bar{x})=1$ とし，

$$\begin{aligned} &f^{(i)}(\bar{x}) = 0 \quad (i = 2, 3, \cdots, k-1) \\ &f^{(k)}(\bar{x}) \neq 0 \end{aligned}$$

とする。

(i) k : odd かつ $f^{(k)}(\bar{x}) > 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定

(ii) k : odd かつ $f^{(k)}(\bar{x}) < 0$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定

(iii) k : even ならば $\bar{x}$ は不安定

[II] $f'(\bar{x})=-1$ の場合

定理 2.2. $f \in C^{2k-1}$ とする。(4) の不動点 $\bar{x}$ において $f'(\bar{x})=-1$ とし，

$$\begin{aligned} &f^{(i)}(\bar{x}) = 0 \quad (i = 2, 3, \cdots, k-1) \\ &f^{(k)}(\bar{x}) \neq 0 \end{aligned}$$

とする。

(i) k : odd かつ $f^{(k)}(\bar{x}) > 0$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定

(ii) k : odd かつ $f^{(k)}(\bar{x}) < 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定

(iii) k : even かつ $\exists l < k$ s.t.

$$\begin{aligned} &f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \quad (j = k+1,\ k+3,\ \ldots,\ 2l-3) \\ &f^{(2l-1)}(\bar{x}) \neq 0 \end{aligned}$$

とする。

(a) $f^{(2l-1)}(\bar{x}) > 0$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定

(b) $f^{(2l-1)}(\bar{x}) < 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定

(iv) k : even かつ $f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \quad (j = k+1,\ k+3,\ \ldots,\ 2k-3)$ とする。

(a) $\dfrac{k}{2}\left(\dfrac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}\right)^2 + \dfrac{f^{(2k-1)}(\bar{x})}{(2k-1)!} > 0$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定

(b) $\dfrac{k}{2}\left(\dfrac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}\right)^2 + \dfrac{f^{(2k-1)}(\bar{x})}{(2k-1)!} < 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定

3. 応用例

例 3.1. 例 1.2 の方程式 (3) を再考する。中心多様体上の方程式は,

$$u_{n+1} = -u_n + 8\,u_n^5 + O(u_n^6)$$

であったが, 定理 2.2 の (i) より, 原点は漸近安定となる。したがって, (3) についても, 原点は漸近安定となる。図 2 に解軌道と中心多様体を示す。この図より, 解が原点に近づいていることが確認できる。

例 3.2. 例 1.2 の方程式 (3) の右辺の非線形項の一部を変更した

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n - 2\,x_n^2\,y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\,y_n + 3\,x_n^2 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,z_n - x_n\,y_n \end{cases} \tag{5}$$

を考える。この場合の中心多様体は,

$$\begin{cases} x = u \\ y = 2u^2 + 32u^5 + O(u^6) \\ z = \dfrac{4}{3}u^3 + O(u^6) \end{cases}$$

で, 中心多様体上の方程式は,

$$u_{n+1} = -u_n - 4\,u_n^4 - 64\,u_n^7 + O(u_n^8)$$

となるが, 定理 2.2 の (iv)(b) より, 原点は不安定となる。したがって, (5) についても, 原点は不安定となる。図 3 より, 解が原点より離れていくことが確認できる。

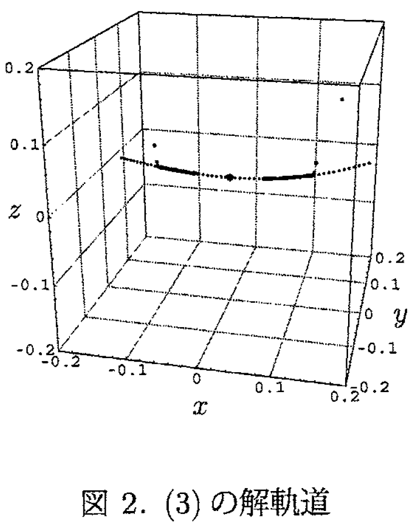

図 2. (3) の解軌道

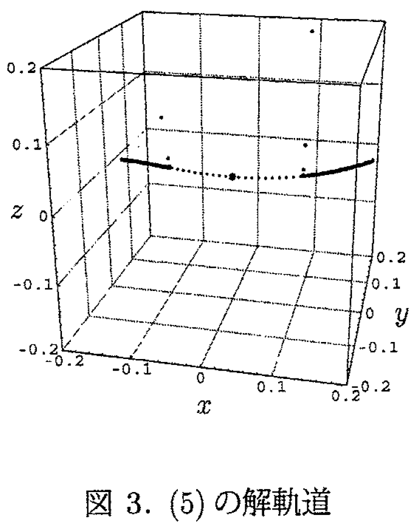

図 3. (5) の解軌道

REFERENCES

[1] J. Carr, Applications of Centre Manifold Theory, Springer-Verlag, 1981.

[2] S. Elaydi, An Introduction to Difference Equations, Springer-Verlag, 1995.

[3] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, 1990.