数理解析研究所講究録 1445 巻 2005 年 206-215

漸近周期的な関数微分方程式の例

電気通信大学電気通信学研究科 西川 武 (Takeshi Nishikawa)

先ず最初に, 本研究で扱う関数微分方程式を定義し, そして定理と命題を述べる. なお, これらの定理や命題は文献 [1] の内容であり, 数理研で既に発表した.

有限の遅れを持つ関数微分方程式:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + Fu_t + f(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

を考える, ここで, $u(t)$ をバナッハ空間 $\mathbb{X}$ に値を取る関数, A を C_0 半群 $(T(t))_{t\geq 0}$ の生成作用素, $F : \mathcal{C} := C([-r, 0], \mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ を有界線形作用素, u_t を $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$ によって定義された $\mathcal{C}$ の元, f を $\mathbb{X}$ 値連続周期 1 の関数, そして, $\tilde{f}_k$ を f のフーリエ係数とする.

方程式 (1) の周期 1 の広義解が存在する為の必要十分条件について紹介する.

定理 3.4;3.7 [1] A を解析的又はコンパクト半群の生成作用素とする. そのとき, 方程式 (1) が周期 1 の広義解を持つ $\Longleftrightarrow$ 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\Delta(2ik\pi)x = \tilde{f}_k, \tag{2}$$

が解 $x \in \mathbb{X}$ を持つ, ただし, $\Delta(\lambda)x := (\lambda I - A - Fe^{\lambda \cdot})x$, $x \in D(A)$, と定義する. もし, x_k が方程式 (2) の解であれば, そのとき, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{2ik\pi t}$ は方程式 (1) の周期 1 の広義解のフーリエ級数となる.

方程式 (1) の全ての広義解が漸近周期 1 の広義解になる必要十分条件について紹介する. その前に, 漸近周期関数と解半群を定義する.

$u(t) = p(t) + q(t)$, $p(t) = p(t+1)$, $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$ と分解するとき, $u(t)$ は漸近 1 周期関数であるという.

方程式 (1) の斉次方程式を考える．そのとき, $V(t)\phi := w_t$ によって定義された $(V(t))_{t\geq 0}$ を $\mathcal{C}$ 上の解半群と呼び, その生成作用素を $\mathcal{G}$ で表す．ここで $w(\cdot)$ は コーシー問題:

$$\begin{cases} w(t) = T(t-s)w(s) + \int_s^t T(t-\xi)[Fw_\xi]d\xi, \quad \forall t \geq s \geq 0, \\ w_0 = \phi. \end{cases}$$

を満たすような一意的解とする．

命題 3.15 [1] A を C_0-半群の生成作用素とする．そのとき, 方程式 (1) の全ての広義解が $[0, +\infty)$ で漸近 1 周期解ならば, 次の条件が成り立つ．

i) 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して, 方程式 (2) が解 $x \in \mathbb{X}$ を持つ,

ii) 解半群 $(V(t))_{t\geq 0}$ が一様有界,

iii) $\sigma_p(\mathcal{G}) \cap i\mathbb{R} \subset 2\pi i\mathbb{Z}$,

ここで, $\sigma_p(\mathcal{G})$ は $\mathcal{G}$ の点スペクトルを表す．

命題 3.16 [1] A がコンパクト半群の生成作用素とする．そのとき, [1] の命題 3.15 の i),ii),iii) が成り立つならば, 方程式 (1) の全ての広義解は $[0, +\infty)$ で漸近 1 周期解である．

本研究では, 三つの場合の境界条件

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) + w(x,t) - aw(x,t-1) + f(x,t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq \forall x \leq \pi, \ \forall t \geq 0, \\ w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \ \forall t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) + w(x,t) - aw(x,t-1) + f(x,t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq \forall x \leq \pi, \ \forall t \geq 0, \\ w'(0,t) = w'(\pi,t) = 0, \ \forall t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) + w(x,t) - aw(x,t-1) + f(x,t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq \forall x \leq \pi/2, \ \forall t \geq 0, \\ w(0,t) = w(\pi/2,t) = 0, \ \forall t > 0 \end{cases}$$

のスペクトルを計算し, それから, それらの場合に対する上記の定理 3.4;3.7 及び命題 3.15 と命題 3.16 の条件について調べる．ここで, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ そして, $w(x,t)$ と $f(x,t)$ をスカラー値関数とする．

例.1 方程式

$$
(3) \qquad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) + w(x,t) - aw(x,t-1) + f(x,t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le \forall x \le \pi,\ \forall t \ge 0, \\ w(0,t) = w(\pi,t) = 0,\ \forall t > 0 \end{cases}
$$

を考える．ここで, $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, そして, $w(x,t)$ と $f(x,t)$ をスカラー値関数とする．$\mathbb{X} := L^2[0,\pi]$ とし, $A_T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ を

$$
(4) \qquad \begin{cases} A_T y = y'' + y, \\ D(A_T) = \{y \in \mathbb{X} : y, y' \text{ は絶対連続},\ y'' \in \mathbb{X}, y(0) = y(\pi) = 0\}, \end{cases}
$$

と定義する．各 t に対して $w(\cdot,t) \in \mathbb{X}$ と仮定する．$\mathbb{X}$ 値関数 $u(t)$ を $u(t) := w(\cdot,t)$ と定義する．そのとき, 関数 $u_t \in \mathcal{C} := C([-1,0],\mathbb{X})$ を

$$
u_t(\theta) := u(t+\theta) = w(\cdot, t+\theta), \theta \in [-1,0]
$$

と定義できる．さらに $F : \mathcal{C} \to \mathbb{X}$ を次のように定義する．

$$
F(\phi) = -a\phi(-1),\ \phi \in \mathcal{C}.
$$

そのとき,

$$
Fu_t = -au_t(-1) = -au(t-1) = -aw(\cdot, t-1)
$$

が成立する．故に, Eq.(3) の解の代わりに, 次のような方程式

$$
(5) \qquad \frac{du(t)}{dt} = A_T u(t) + Fu_t + f(t),\ u(t) \in \mathbb{X},
$$

の広義解を考える．

Travis-Webb [2] p.414により, A_T は $\mathbb{X}$ に於ける解析的かつコンパクト半群 $(T(t))_{t\ge0}$ の生成作用素になる．

特性作用素は $y \in D(A_T)$ に対して

$$
\begin{aligned} \Delta(\lambda)y &= (\lambda I - A_T + ae^{-\lambda})y \\ &= \lambda y - y'' - y + ae^{-\lambda} y \end{aligned}
$$

となる．$\sigma(\Delta)$ は, 方程式

$$
y'' + (1 - \lambda - ae^{-\lambda})y = 0,\ y(0) = y(\pi) = 0
$$

が非自明な解を持つ λ の集合である．それは, $1-\lambda+ae^{-\lambda} = n^2$ の場合であり, 従って,

$$
\sigma(\Delta) = \cup_{n=1}^{\infty} \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda + ae^{-\lambda} = 1 - n^2\}.
$$

虚軸上のスペクトルを調べる為に, $\lambda + ae^{-\lambda} = 1 - n^2$ において,$\lambda = ib,\ b \in \mathbb{R}$ とおくと,

$$1 - n^2 = a\cos b + i(b - a\sin b) \tag{6}$$

が成立する. 故に,

$$a\cos b = 1 - n^2 \tag{7}$$

$$b - a\sin b = 0 \tag{8}$$

となる. (7) と (8) から

$$a^2 - b^2 = (n^2 - 1)^2 \tag{9}$$

が成立する. このグラフは $n \neq 1$ の場合は ab 平面の $(n^2 - 1, 0)$ と $(-n^2 + 1, 0)$ を頂点とする双曲線であり, $n = 1$ の場合は, 2 直線 $b = a$ と $b = -a$ である. (7) は

$$a = (1 - n^2)\sec b \tag{10}$$

と書きかえられ, そのグラフは ab 平面の $|a| \geq n^2 - 1$ のところにある. 従って,$a \neq 0$ を先に与えたとき, (9) と (10) を満たす b は $|a| < n^2 - 1$ のときは存在しないし, $|a| \geq n^2 - 1$ のときは高々二つである.

$n \geq 2$ のとき, $n^2 - 1 \geq 3$ であるから, $|a| < 3$ のときは各 $n = 2, 3, \cdots$ に対し (9) と (10) を満たす b は存在しない.

以後,$0 < |a| < 3$ とする. その場合 $\sigma_i(\Delta)$ は (7) と (8) において $n = 1$ とおいた連立方程式

$$a\cos b = 0 \tag{11}$$

$$b - a\sin b = 0 \tag{12}$$

の解 b の集合である. その結果,

i) $0 < |a| < 3, a \neq \pi/2 \Rightarrow \sigma_i(\Delta) = \emptyset$,

ii) $a = \pi/2 \Rightarrow \sigma_i(\Delta) = \{\pi/2, -\pi/2\}$.

$\sigma(\Delta)$ について考察する. $\lambda + ae^{-\lambda} = 1 - n^2$ において,$\lambda = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ とおくと,

$$1 - n^2 = x + ae^{-x}\cos y + i(y - ae^{-x}\sin y) \tag{13}$$

が成立する. 故に,

$$x + ae^{-x}\cos y = 1 - n^2 \tag{14}$$

$$y - ae^{-x}\sin y = 0 \tag{15}$$

となる. (14) と (15) から

$$y = \pm\sqrt{a^2e^{-2x} - (1 - n^2 - x)^2} \tag{16}$$

が成立する. $n \neq 1$ とする. そのとき, (14) のグラフは $x<0$ の範囲にあり, (14) のグラフと (16) のグラフの交点は高々可算個あるので, $\sigma(\Delta)$ は $x<0$ の範囲に高々可算個存在する. $n=1$ とする. そのとき, (14) と (16) から
(i) $\pi/2 < a < 3 \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x>0$ では二つ存在し, $x=0$ では存在しないし, そして $x<0$ では高々可算個存在する.
(ii) $a=\pi/2 \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x>0$ では存在しないし, $x=0$ では $\sigma(\Delta)=\{i\pi/2, -i\pi/2\}$, $x<0$ で $\sigma(\Delta)$ は高々可算個存在する.
(iii) $0<a<\pi/2 \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x<0$ の範囲に高々可算個存在する.
(iv) $-3<a<0 \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x<0$ の範囲に高々可算個存在する.

$f(\cdot,t)$ を周期 4 の関数とする. そのフーリエ係数を

$$\tilde{f}_k(x)=\frac{1}{4}\int_0^4 e^{-ik\pi t/2}f(x,t)dt$$

と置く. [1] の定理 3.4;3.8 を用いる. i) のときは, $\sigma_i(\Delta)=\emptyset$ であるから,Eq.(5) は無条件に周期 4 の広義解を持つ. そして

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\pi t/2}\Delta^{-1}(ik\pi/2)\tilde{f}_k(x)$$

は Eq.(5) の周期 4 の広義解のフーリエ級数となる.

$a=\pi/2$ とする. 方程式

$$\Delta(i\pi/2)u_1=\tilde{f}_1, \tag{17}$$

$$\Delta(-i\pi/2)u_{-1}=\tilde{f}_{-1}. \tag{18}$$

が可解ならば, Eq.(5) は周期 4 の広義解を持つ. さらに, もし, u_1 と u_{-1} がそれぞれ (17) と (18) の解ならば,

$$e^{i\pi t/2}u_1(x)+e^{-i\pi t/2}u_{-1}(x)+\sum_{k\neq\pm1} e^{ik\pi t/2}\Delta^{-1}(ik\pi/2)\tilde{f}_k(x)$$

は Eq.(5) の周期 4 の広義解のフーリエ級数となる.

(17) と (18) を具体的に書くと,

$$-u_1''(x)-u_1(x)=\tilde{f}_1(x),\ u_1(0)=u_1(\pi)=0, \tag{19}$$

$$-u_{-1}''(x)-u_{-1}(x)=\tilde{f}_{-1}(x),\ u_{-1}(0)=u_{-1}(\pi)=0 \tag{20}$$

となる. (19) と (20) が解を持つ条件は,

$$\int_0^\pi \sin x\tilde{f}_k(x)dx=0,\ k=\pm1. \tag{21}$$

そのとき, 解 $u_k(x)$, $k=\pm1$ は,

$$u_k(x) = -\int_0^x \sin(x-y)\tilde{f}_k(y)dy + C_k \sin x,\ k=\pm1. \tag{22}$$

$\sigma_i(\Delta) = \{\pi/2, -\pi/2\} =: \Lambda$ とおく. Travis-Webb [2] 補題 5.8 により, $(\mathcal{G}-\lambda I)^{-1}$ は Λ に於いて 1 位の極を持つ. ただし, $\mathcal{G}$ は解半群 $(V(t))_{t\geq0}$ の生成作用素とする. 空間 $\mathcal{C}$ は次のように分解される:

$$\mathcal{C} = N(\mathcal{G}-i\pi/2) \oplus N(\mathcal{G}+i\pi/2) \oplus Q_\Lambda,$$

$$Q_\Lambda := R(\mathcal{G}-i\pi/2) \cap R(\mathcal{G}+i\pi/2).$$

そのとき,

$$\forall\phi \in N(\mathcal{G}-(\pm i\pi/2)), V(t)\phi = e^{\pm i\pi t/2}\phi.$$

$\exists K>0, \exists\omega>0,$

$$\forall\phi \in Q_\Lambda, \|V(t)\phi\| \leq Ke^{-\omega t}\|\phi\|.$$

故に, $(V(t))_{t\geq0}$ は漸近 4 周期の解半群になる.

[1] の命題 3.15 と命題 3.16 を適用することにより, $a=\pi/2$ のとき Eq.(5) の全ての広義解が漸近 4 周期解 $\Longleftrightarrow$ (21) が成立する.

例.2 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) + w(x,t) - aw(x,t-1) + f(x,t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq \forall x \leq \pi,\ \forall t \geq 0, \\ w'(0,t) = w'(\pi,t) = 0,\ \forall t > 0, \end{cases} \tag{23}$$

を考える. ここで, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, そして, $w(x,t)$ と $f(x,t)$ をスカラー値関数とする. $\mathbb{X} := L^2[0,\pi]$ とし, $B_T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ を

$$\begin{cases} B_T y = y'' + y, \\ D(B_T) = \{y \in \mathbb{X} : y, y' \text{ は絶対連続},\ y'' \in \mathbb{X}, y'(0) = y'(\pi) = 0\}, \end{cases} \tag{24}$$

と定義する. Eq.(23) の解の代わりに, 次のような方程式

$$\frac{du(t)}{dt} = B_T u(t) + Fu_t + f(t),\ u(t) \in \mathbb{X}, \tag{25}$$

の広義解を考える. 特性作用素は $y \in D(B_T)$ に対して

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda)y &= (\lambda I - B_T + ae^{-\lambda})y \\ &= \lambda y - y'' - y + ae^{-\lambda}y \end{aligned}$$

となる. $\sigma(\Delta)$ は, 方程式

$$y'' + (1 - \lambda - ae^{-\lambda})y = 0,\ y'(0) = y'(\pi) = 0$$

が非自明な解を持つ λ の集合である. 従って,

$$\sigma(\Delta) = \cup_{n=1}^{\infty}\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda + ae^{-\lambda} = 1 - n^2\}.$$

故に, 例題 1 により, 次のような結果が得られる.

$\sigma_i(\Delta)$ と $\sigma(\Delta)$ の結果は例題 1 と同様.

[1] の定理 3.4;3.8 を用いた結果は, $0 < |a| < 3, a \neq \pi/2$ の場合は例題 1 と同様.

$a = \pi/2$ の場合も例題 1 と同様. ただし, (17) と (18) を具体的に書くと,

$$-u_1''(x) - u_1(x) = \tilde{f}_1(x),\ u_1'(0) = u_1'(\pi) = 0, \tag{26}$$

$$-u_{-1}''(x) - u_{-1}(x) = \tilde{f}_{-1}(x),\ u_{-1}'(0) = u_{-1}'(\pi) = 0 \tag{27}$$

となる. (26) と (27) が解を持つ条件は,

$$\int_0^{\pi} \cos x \tilde{f}_k(x)dx = 0,\ k = \pm 1. \tag{28}$$

そのとき, 解 $u_k(x),\ k = \pm 1$ は,

$$u_k(x) = -\int_0^{x} \sin(x-y)\tilde{f}_k(y)dy + C_k \cos x,\ k = \pm 1. \tag{29}$$

[1] の命題 3.15 と命題 3.16 を適用することにより, $a = \pi/2$ のとき Eq.(25) の全ての広義解が漸近 4 周期解 $\Longleftrightarrow$ (28) が成立する.

例.3 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) + w(x,t) - aw(x,t-1) + f(x,t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq \forall x \leq \pi/2,\ \forall t \geq 0, \\ w(0,t) = w(\pi/2,t) = 0,\ \forall t > 0, \end{cases} \tag{30}$$

を考える. ここで, $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ そして, $w(x,t)$ と $f(x,t)$ をスカラー値関数とする. $\mathbb{X} := L^2[0,\pi/2]$ とし, $C_T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ を

$$\begin{cases} C_T y = y'' + y, \\ D(C_T) = \{y \in \mathbb{X} : y, y' \text{ は絶対連続},\ y'' \in \mathbb{X}, y(0) = y(\pi/2) = 0\}, \end{cases} \tag{31}$$

と定義する. Eq.(30) の解の代わりに, 次のような方程式

$$\frac{du(t)}{dt} = C_T u(t) + Fu_t + f(t),\ u(t) \in \mathbb{X}, \tag{32}$$

の広義解を考える. 特性作用素は $y \in D(C_T)$ に対して

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda)y &= (\lambda I - C_T + ae^{-\lambda})y \\ &= \lambda y - y'' - y + ae^{-\lambda}y \end{aligned}$$

となる. $\sigma(\Delta)$ は, 方程式

$$y'' + (1 - \lambda - ae^{-\lambda})y = 0,\ y(0) = y(\pi/2) = 0$$

が非自明な解を持つ λ の集合である. 従って,

$$\sigma(\Delta) = \cup_{n=1}^{\infty}\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda + ae^{-\lambda} = 1 - (2n)^2\}.$$

$\lambda + ae^{-\lambda} = 1 - (2n)^2$ において,$\lambda = ib,\ b \in \mathbb{R}$ とおくと,

$$1 - (2n)^2 = a\cos b + i(b - a\sin b) \tag{33}$$

が成立する. 故に,

$$a\cos b = 1 - (2n)^2 \tag{34}$$
$$b - a\sin b = 0 \tag{35}$$

となる. (34) と (35) から

$$a^2 - b^2 = ((2n)^2 - 1)^2 \tag{36}$$

が成立する. このグラフは ab 平面の $((2n)^2 - 1, 0)$ と $(-(2n)^2 + 1, 0)$ を頂点とする双曲線である. (34) は

$$a = (1 - (2n)^2)\sec b \tag{37}$$

と書きかえられ, そのグラフは ab 平面の $|a| \geq (2n)^2 - 1$ のところにある. $n \geq 2$ のとき, $(2n)^2 - 1 \geq 15$ であるから, $|a| < 15$ のときは各 $n = 2, 3, \cdots$ に対し (36) と (37) を満たす b は存在しない. $n = 1$ のとき, $3 < |a|$ ならば (36) と (37) を満たす b は二つ存在する. 以後,$3 < |a| < 15$ とする. その場合 $\sigma_i(\Delta)$ は (36) と (37) において $n = 1$ とおいた連立方程式

$$a^2 - b^2 = 9 \tag{38}$$
$$a = -3\sec b \tag{39}$$

の解 b の集合である. そこで, (38) と (39) を満たす正数 b を $\alpha_m, m = 1, 2, 3, 4, 5$ とする. ここで, $\pi/2 < \alpha_1 < \pi$, $3\pi/2 < \alpha_2 < 2\pi$, $5\pi/2 < \alpha_3 < 3\pi$, $7\pi/2 < \alpha_4 < 4\pi$, そして, $9\pi/2 < \alpha_5 < 5\pi$ とする. $\beta_m = (-1)^{m-1}\sqrt{\alpha_m^2 + 9}, m = 1, 2, 3, 4, 5$ とする. その結果,

i) $3 < |a| < 15, a \neq \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5 \Rightarrow \sigma_i(\Delta) = \emptyset$,

ii) $a = \beta_m, m = 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow \sigma_i(\Delta) = \{\alpha_m, -\alpha_m\}$.

$\sigma(\Delta)$ について考察する. $\lambda + ae^{-\lambda} = 1 - (2n)^2$ において,$\lambda = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ とおくと,

$$1 - (2n)^2 = x + ae^{-x}\cos y + i(y - ae^{-x}\sin y) \tag{40}$$

が成立する. 故に,

$$x + ae^{-x}\cos y = 1 - (2n)^2 \tag{41}$$
$$y - ae^{-x}\sin y = 0 \tag{42}$$

となる. (41) と (42) から

$$y=\pm\sqrt{a^2e^{-2x}-(1-(2n)^2-x)^2} \tag{43}$$

が成立する. $n\neq 1$ とする. そのとき, (41) のグラフは $x<0$ の範囲にあり, (41) のグラフと (43) のグラフの交点は高々可算個あるので, $\sigma(\Delta)$ は $x<0$ の範囲に高々可算個存在する. $n=1$ とする. そのとき, (41) と (43) から

(i) $\beta_5<a<15 \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x>0$ では六つ存在し, $x=0$ では存在しないし, そして $x<0$ では高々可算個存在する.

(ii) $a=\beta_5 \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x>0$ では四つ存在し, $x=0$ では $\sigma(\Delta)=\{i\alpha_5,-i\alpha_5\}$, $x<0$ で $\sigma(\Delta)$ は高々可算個存在する.

(iii) $\beta_{2l-1}<a<\beta_{2l+1} \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x>0$ では $2l$ 個存在し, $x=0$ では存在しないし, そして $x<0$ では高々可算個存在する.

(iv) $a=\beta_{2l-1} \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x>0$ では $2(l-1)$ 個存在し, $x=0$ では $\sigma(\Delta)=\{i\alpha_{2l-1},-i\alpha_{2l-1}\}$, $x<0$ で $\sigma(\Delta)$ は高々可算個存在する.

(v) $3<a<\beta_1 \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x<0$ の範囲に高々可算個存在する.

(vi) $\beta_2<a<-3 \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x<0$ の範囲に高々可算個存在する.

(vii) $a=\beta_2 \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x>0$ では存在しないし, $x=0$ では $\sigma(\Delta)=\{i\alpha_2,-i\alpha_2\}$, そして $x<0$ では高々可算個存在する.

(viii) $\beta_4<a<\beta_2 \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x>0$ では二つ存在し, $x=0$ では存在しないし, そして $x<0$ では高々可算個存在する.

(ix) $a=\beta_4 \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x>0$ では二つ存在し, $x=0$ では $\sigma(\Delta)=\{i\alpha_4,-i\alpha_4\}$, そして $x<0$ では高々可算個存在する.

(x) $-15<a<\beta_4 \Rightarrow \sigma(\Delta)$ は $x>0$ では四つ存在し, $x=0$ では存在しないし, そして $x<0$ では高々可算個存在する. ここで, $l=1,2$ とする.

$f(\cdot,t)$ を周期 $2\pi/\alpha_m, m=1,2$ の関数とする. そのフーリエ係数を

$$\tilde{f}_k(x)=\frac{\alpha_m}{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha_m}e^{-ik\alpha_m t}f(x,t)dt$$

と置く. [1] の定理 3.4;3.8 を用いる. i) のときは, $\sigma_i(\Delta)=\emptyset$ であるから,Eq.(32) は無条件に $\alpha_m/2\pi$ 周期の広義解を持つ. $a=\beta_n, n\neq m, n=1,2,3,4,5$ のときは, α_n は α_m の整数倍ではないので, Eq.(32) は無条件に $2\pi/\alpha_m$ 周期の広義解を持つ. そして

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ik\alpha_m t}\Delta^{-1}(ik\alpha_m)\tilde{f}_k(x)$$

は Eq.(32) の周期 $2\pi/\alpha_m$ の広義解のフーリエ級数となる.

$a=\beta_m$ とする. 方程式

$$\Delta(i\alpha_m)u_1=\tilde{f}_1, \tag{44}$$

$$\Delta(-i\alpha_m)u_{-1} = \tilde{f}_{-1}. \tag{45}$$

が可解ならば, Eq.(32) は周期 $2\pi/\alpha_m$ の広義解を持つ. さらに, もし, u_1 と u_{-1} がそれぞれ (44) と (45) の解ならば,

$$e^{i\alpha_m}u_1(x) + e^{-i\alpha_m}u_{-1}(x) + \sum_{k\neq\pm1} e^{ik\alpha_m t}\Delta^{-1}(ik\alpha_m)\tilde{f}_k(x)$$

は Eq.(32) の周期 $2\pi/\alpha_m$ の広義解のフーリエ級数となる. (44) と (45) を具体的に書くと,

$$\begin{aligned} i\alpha_m u_1(x) - u_1''(x) &- u_1(x) + \beta_m e^{-i\alpha_m}u_1(x) = \tilde{f}_1(x), \\ u_1(0) &= u_1(\pi/2) = 0, \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} -i\alpha_m u_{-1}(x) - u_{-1}''(x) &- u_{-1}(x) + \beta_m e^{i\alpha_m}u_{-1}(x) = \tilde{f}_{-1}(x) \\ u_{-1}(0) &= u_{-1}(\pi/2) = 0, \end{aligned} \tag{47}$$

となる.

$\sigma_i(\Delta) = \{\alpha_m, -\alpha_m\} =: \Lambda$ とおく. 空間 $\mathcal{C}$ は次のように分解される:

$$\mathcal{C} = N(\mathcal{G} - i\alpha_m) \oplus N(\mathcal{G} + i\alpha_m) \oplus Q_\Lambda,$$

$$Q_\Lambda := R(\mathcal{G} - i\alpha_m) \cap R(\mathcal{G} + i\alpha_m).$$

そのとき,

$$\forall\phi \in N(\mathcal{G} - (\pm i\alpha_m)), V(t)\phi = e^{\pm i\alpha_m t}\phi.$$

$\exists K > 0, \exists\omega > 0,$

$$\forall\phi \in Q_\Lambda, \|V(t)\phi\| \le Ke^{-\omega t}\|\phi\|.$$

故に, $(V(t))_{t\ge0}$ は漸近 $2\pi/\alpha_m$ 周期の解半群になる. [1] の命題 3.15 と命題 3.16 を適用することにより,

$a = \beta_m$ のとき Eq.(32) の全ての広義解が漸近 $2\pi/\alpha_m$ 周期解 $\Longleftrightarrow$ (47) と (48) が成立する.

References

1. T. Nishikawa, Nguyen Van Minh, T. Naito, On the asymptotic periodic solutions of abstract functional differential equations. *Funkcial. Ekvac.* **47** (2004), 307-327.
2. C.C. Travis, G.F. Webb, Existence and stability for partial functional differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **200** (1974), 394-418.