数理解析研究所講究録 1450 巻 2005 年 1-22

代数閉体のモデル理論について

鹿児島国際大学国際文化学部　福崎賢治 (Kenji Fukuzaki)
Faculty of Intercultural Studies,
The International University of Kagoshima

目次

Hrushovski による geometric Mordell-Lang 予想の解決では、代数閉体、微分閉体、分離閉体のモデル理論が用いられた。これらについては、[1] “Model Theory and Algebraic Geometry” ,LNM 1696 ,E. Bouscaren Ed. に詳しい解説がある。特に代数閉体のモデル理論については、A. Pillay による優れた解説がある。しかしその解説はモデル理論のある程度の素養を前提としていると思われる。

本稿では代数閉体のいくつかの話題について、初等的に解説する。ただし [1] 第 1 章の E. Bouscaren による “Introduction to model theory” の大体の知識を仮定する。以下言語は $\mathfrak{L}$ で一般の言語を、L で ring language $\{+,-,\cdot,0,1\}$ をあらわすことにする。

1 Quantifier Elimination (Q.E.)

Definition 1 *$\mathfrak{L}$-theory T*が *quantifier elimination* を持つとは、任意の *$\mathfrak{L}$-formula* $\varphi(\bar{x})$ に対して、ある *quantifier free* な *$\mathfrak{L}$-formula* $\psi(\bar{x})$ があり、任意の T のモデル M に対して、

$$M \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$$

となることである。

Q.E. の例はよくある。例えば実数体（の理論）では、

$$\forall \bar{x}(\exists y(y^2 + x_1 y + x_2 = 0) \Longleftrightarrow x_1^2 - 4x_2 \geq 0)$$

と quantifier $\exists$ が eliminate される。（ただし言語は $L_{ord} = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$ である。）

また良く知られている例として、Resultant を用いるものがある。つまり k を代数閉体、$f(y, \bar{x}), g(y, \bar{x}) \in k[y, \bar{x}]$ で f または g の y についての最高次の係数が定数ならば、

$$\forall \bar{x}(\exists y(f(y, \bar{x}) = 0 \wedge g(y, \bar{x}) = 0) \Longleftrightarrow \mathrm{Res}(f, g, y) = 0)$$

が成り立つ。つまり共通解を持つという first order sentence が parameter による（quantifier のない）条件に（一様に）置き換えられるのである。

代数閉体では、たとえ $\forall$ や $\exists$ がどのように複雑に入っていてもすべての formula は quantifier をとる事ができるのである。

標数 p の代数閉体の理論 ACF が Q.E. を持つことの証明法はいろいろある。例えば [1] の Pillay による方法は back and forth を用いるものである。（この方法については Poizat[2] を参照のこと。）ここでは Fried, Jarden[3] の代数的な方法を紹介する。

formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が prenex normal form であるとは、それが

$$Q_1 y_1 \cdots Q_m y_m \psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$

の形であることである。ここで各 Q_i は $\exists$ か $\forall$ であり、ψ は quantifier free である。

Lemma 2 すべての *$\mathfrak{L}$-formula* $\varphi(\bar{x})$ は *prenex normal form* なある *formula* と論理的に同値である。

証明は、formula の構成に関する帰納法により容易である。

Lemma 3 *quantifier freeな$\mathfrak{L}$-formulaは disjunctive-conjunctive normal formなある formulaと論理的に同値である。つまり、z_{ij} 達を $\mathfrak{L}$-atomic formula とするとき、*

$$\bigvee_{i\in I}\left(\bigwedge_{j\in J} z_{ij} \wedge \bigwedge_{j\in J'} \neg z_{ij}\right)$$

な形のものと論理的に同値である。

証明は de-Morgan の法則により容易である。

Lemma 2. より Q.E. を示すには $\exists y\psi(x_1,\ldots,x_n,y)$ の形の formula から quantifier が取れることを言えば十分である。なぜなら $\forall y\psi$ は $\neg\exists y\neg\psi$ と論理的に同値であり、prenex normal form の内側から quantifier を消去すればよいからである。

言語 L における atomic formula は $\mathbb{Z}$ 上の多項式であり、$\bigwedge_i g_i(\bar{x}) \neq 0$ は $\prod_i g_1(\bar{x}) \neq 0$ と論理的に同値でありまた $\exists y(\psi \vee \theta)$ は $\exists y\psi \vee \exists y\theta$ と論理的に同値であるから、ACF が Q.E. を持つことを言うには、

$$(\dagger) \qquad \exists y\,(f_1(\bar{x},y)=0 \wedge \cdots f_m(\bar{x},y)=0 \wedge g(\bar{x},y)\neq 0)$$

が quantifier freeなものと ACF 上論理的同値であることを言えばよい。ここで $f_1,\ldots f_m, g \in \mathbb{Z}[\bar{x},y]$ である。

Lemma 4 *T を体の公理からなる L-theory とすると、$(\dagger)$ の形の formulaは*

$$\bigvee_i \varphi_i(\bar{x}) \wedge \exists y\,(h_i(\bar{x},y)=0 \wedge g_i(\bar{x},y)\neq 0)$$

の形の formulaと T のもとで同値である。ここで $\varphi_i(\bar{x})$ は quantifier freeであり、$h_i, g_i \in \mathbb{Z}[\bar{x},y]$ である。

Proof. $p(\bar{x},y), q(\bar{x},y) \in \mathbb{Z}[\bar{x},y]$ で $0 \leq \deg_y p \leq \deg_y q = d$ とする。さらに

$$p(\bar{x},y) = a_k(\bar{x})y^k + a_{k-1}(\bar{x})y^{k-1} + \cdots a_0(\bar{x}),$$

各 $a_i \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$, として各 $0 \leq j \leq k$ に対して

$$p_j(\bar{x},y) = a_j(\bar{x})y^j + a_{j-1}(\bar{x})y^{j-1} + \cdots a_0(\bar{x})$$

とする。

もし $a_j(\bar{x})$ が恒等的に 0 でないならば、$a_j(\bar{x})^d q(\bar{x},y)$ を y について $p_j(\bar{x},y)$ で割って、多項式の商と余り $q_j(\bar{x},y)$ と $r_j(\bar{x},y)$ を得る。つまり

$$a_j(\bar{x})^d q(\bar{x},y) = q_j(\bar{x},y)p_j(\bar{x},y) + r_j(\bar{x},y)$$

で $\deg_y r_j < \deg_y p_j \le d$ である。

もし $b_1,\ldots,b_n,c$ がある体の元で、$a_k(\bar{b}) = \cdots = a_{j+1}(\bar{b}) = 0$ で $a_j(\bar{b}) \neq 0$ ならば $p(\bar{x},y) = 0 \wedge q(\bar{x},y) = 0$ はその体の中で $p_j(\bar{b},c) = 0 \wedge r_j(\bar{b},c) = 0$ と同値である。したがって、$a_j(\bar{x})$ が恒等的に等しいときは $r_j(\bar{x})$ を、例えば 0 にして、$p(\bar{x},y) = 0 \wedge q(\bar{x},y) = 0$ は

$$\begin{aligned}&\textstyle\bigvee_{j=0}^{k} (a_k(\bar{x}) = 0 \wedge \cdots \wedge a_{j+1}(\bar{x}) = 0 \wedge a_j(\bar{x}) \neq 0 \wedge p_j(\bar{x},y) = 0 \wedge r_j(\bar{x},y) = 0)\\ &\vee (a_k(\bar{x}) = 0 \wedge \cdots \wedge a_0(\bar{x}) = 0 \wedge q(\bar{x},y) = 0)\end{aligned}$$

と T のもとで同値となる。さらに r_j と p_j にこの操作を繰り返して $m=2$ の場合が示される。$m>2$ の場合もこれを繰り返せばよい。

□

Lemma 5 (†) で $m=1$ の形の *formula* は

$$\bigvee_i \varphi_i(\bar{x}) \wedge \exists y\, (g_i(\bar{x},y) \neq 0)$$

の形の *formula* と *ACF* のもとで同値である。ここで $\varphi_i(\bar{x})$ は *quantifier free* であり、$h_i, g_i \in \mathbb{Z}[\bar{x},y]$ である。

Proof. K を勝手な代数閉体とし、$b_1,\ldots,b_n \in K$ とする。もし $f(\bar{b},y)$ が恒等的に 0 でないならば、

$$K \models \exists y(f(\bar{b},y) = 0 \wedge g(\bar{b},y) \neq 0)$$

は $g(\bar{b},y) \notin \sqrt{f(\bar{b},y)}$ と同値である。$\deg_y(f(\bar{x},y)) = k$ としたとき、これは、$K[y]$ の中で $f(\bar{b},y)$ が $g(\bar{b},y)^k$ を割り切らないことと同値である。したがって、$p(\bar{x},y) = f(\bar{x},y), q(\bar{x},y) = g(\bar{x},y)^k$ として前の補題の notation を使って、$\exists y(f(\bar{x},y) = 0 \wedge g(\bar{x},y) \neq 0)$ は *ACF* 上

$$\begin{aligned}&\textstyle\bigvee_{j=0}^{k} (a_k(\bar{x}) = 0 \wedge \cdots \wedge a_{j+1}(\bar{x}) = 0 \wedge a_j(\bar{x}) \neq 0 \wedge \exists y r_j(\bar{x},y) \neq 0)\\ &\vee (a_k(\bar{x}) = 0 \wedge \cdots \wedge a_0(\bar{x}) = 0 \wedge \exists y g(\bar{x},y) \neq 0)\end{aligned}$$

と同値である。 □

Lemma 6 T を体の公理及び無限体であることをあらわす *sentence* からなる理論とすると、$\exists y(g(\bar{x},y)\neq 0)$ は T 上 *quantifier free* なある *formula* と同値である。

Proof.

$$g(\bar{x},y)=a_l(\bar{x})y^l+a_{l-1}(\bar{x})y^{l-1}+\cdots+a_0(\bar{x})$$

とかくと、明らかに

$$a_l(\bar{x})\neq 0\vee a_{l-1}(\bar{x})\neq 0\cdots\vee a_0(\bar{x})\neq 0$$

と T 上同値である。 □

Theorem 7 *ACF* は *Q.E.* を持つ。

Proof. *ACF* から無限体であることはすぐに出て、上の 3 つの補題から明らか。 □

model theory では扱う対象が $\forall$ や $\exists$ を含む一般の論理式なためある構造の拡大を考えるとき、elementary extension を考えなければならない。しかし Q.E. を持つ理論のモデルに関しては単に拡大を考えればよい すなわち、

Lemma 8 *Q.E.* を持つ理論 T は *model complete* である。つまり、$M,N\models T$ のとき、$M\subseteq N\iff M\prec N$.

Proof. $\varphi(\bar{x})$ を $\mathfrak{L}$-formula, $\bar{a}$ を M の tuple としたとき、$M\models\varphi(\bar{a})\iff N\models\varphi(\bar{a})$ を示せばよい。Q.E. よりある quantifier free な formula $\psi(\bar{x})$ があって M,N で $\varphi(\bar{a})\iff\psi(\bar{a})$ である。quantifier free な $\psi(\bar{a})$ は拡大、縮小に関してもそのまま成り立つので明らか

□

よって *ACF* は model complete である。*ACF* に標数が p であることを書いた sentence を付け加えたものが ACF_p であった。ACF_p の論理的帰結全体が complete であることが model completeness からすぐわかる。(普通略して ACF_p は complete であるという。)

まず complete とは consistency に関して極大な sentence の集合であった。(つまりどんな L-sentence σ をとってもそれ自身かその否定が入っていて consistent なこと。) いいかえると ACF_p の 2 つのモデル M,N をかってにとったとき、$M\equiv N$ であることである。なぜなら、今 ACF_p の論理的帰結全体 (これを T_{ACF_p} と書く) が complete とする。$M\equiv N$ は任意の L-sentence σ に対して $M\models\sigma\iff N\models\sigma$ のことである。$M,N\models ACF_p$ ならば当然 $M,N\models T_{ACF_p}$ だからこれは明らか。逆に T_{ACF_p} が complete ではないとすると、ある σ があって $\sigma,\neg\sigma\notin T_{ACF_p}$ である。$T_{ACF_p}\cup\{\sigma\},T_{ACF_p}\cup\{\neg\sigma\}$

ともに consistent である。(そうでないと論理的帰結としてその否定が出てきてしまう。)よって consistency の定義からモデル M, N を持ち $M, N \models ACF_p$ だが $\mathrm{Th}(M) \neq \mathrm{Th}(N)$、つまり $M \not\equiv N$ である。

いま M, N を標数 p の代数閉体とすると、共通の prime field を持つ。そこに model completeness を使えば $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(N)$ がでる、つまり $M \equiv N$ である。

Remark. Σ を $\mathfrak{L}$-sentence の集合とすると、$\mathfrak{L}$-sentence φ が Σ の論理的帰結であるとは任意の Σ を満たすモデル($\mathfrak{L}$-structure)が必ず φ を満たすことである。よって T_{ACF_p} とはすべての標数 p の代数閉体で成り立つような L-sentence 全体である。

また $\Sigma \cup \{\varphi\}$ が consistent ではない(つまりモデルを持たない)とは、Σ が consistent である限り任意の Σ を満たすモデルが必ず $\neg\varphi$ を満たすことである。なぜなら任意のモデルでは φ か $\neg\varphi$ のうち一方が成り立つからである。したがって $\neg\varphi$ が Σ の論理的帰結ということである。また Σ が consistency に関して極大ならば、その論理的帰結をすべて含みどんな L-sentence σ をとってもそれ自身かその否定が入っていることが分かる。

Corollary 9 *ACF_p は model complete であり、complete である。*

$\mathrm{Th}(\mathbb{C}) = T_{ACF_0}$ である。ACF_0 は無限個の公理からなるが、きれいに公理化できている(recursively axiomatizable)。しかしたとえば $\mathrm{Th}(\mathbb{Q})$ は Gödel の結果により recursively axiomatizable ではない。

2 Compactness theorem

$\mathfrak{T}$ を complete $\mathfrak{L}$-theory(つまり $\mathfrak{L}$-sentence の集合で complete なもの)全体の集合とする。$\mathfrak{T}$ に位相を定義する。各 $\mathfrak{L}$-sentence φ に対して $\langle\varphi\rangle = \{T \in \mathfrak{T}; \varphi \in T\}$ とする。$\langle\varphi\rangle$ 全体の集合は明らかに open base をなす。$\mathfrak{T}$ は明らかに Hausdorff space であり、各 basic open set $\langle\varphi\rangle$ は clopen である。さらに、

Theorem 10 (Compactness theorem) *$\mathfrak{T}$ は compact である。*

つまり $\mathfrak{T}$ は Stone space である。証明は Poizat[2] を参照のこと。

普通 Compactness theorem として引用されるのは次の形である。

Corollary 11 *Σ を $\mathfrak{L}$-sentence の集合とする。すると、*

Σ が consistent(model を持つ)iff Σ のすべての有限部分集合が consistent(model を持つ).

Proof. 閉集合の family $\{\langle\varphi\rangle; \varphi \in \Sigma\}$ は finite intersection property を持つ。なぜならその有限個の φ たちのモデルを M としたとき $T = \mathrm{Th}(M)$ は $\langle\varphi\rangle$ たちの共通部分に入っている。よって明らか。 □

また次の形も良く用いられる。

Corollary 12 Σ を $\mathfrak{L}$-*sentence* の集合とする。すると、

1. Σ が *consistent* でない（*model* を持たない）*iff* Σ のある有限部分集合が矛盾する。
2. $\mathfrak{L}$-*sentence* φ が Σ の帰結ならば（Σ のすべてのモデルで φ が成り立つならば）、ある Σ の有限部分集合 Σ' があって φ は Σ' の帰結である。

3 つの形が同値である事はすぐに分かる。
簡単な応用として、

Lemma 13 M, N を $M \equiv N$ な $\mathfrak{L}$-*structure* とすると、M, N は共通な *elementary extension* を持つ。

証明には言語の constants による expansion を使う。M を $\mathfrak{L}$-structure, A を M の subset としたとき、言語 $\mathfrak{L}$ に constant として $\{c_a\}_{a\in A}$ を付け加える。（A の各要素に名前をつける）普通省略して c_a のかわりに a をそのまま使う。できた言語を $L(A)$ と普通書く。M は当然 $L(A)$-structure である。M の $\mathfrak{L}$-theory（つまり M で成り立つ $\mathfrak{L}$-sentence 全体）を $T = \mathrm{Th}(M)$ とかいたが、$\mathfrak{L}(A)$-theory を $T(A) = \mathrm{Th}(M, a)_{a\in A}$ のように書く。
Proof. $\mathfrak{L}(M \cup N)$-theory $T(M) \cup T(N)$ が consistent（つまりモデルを持つ）ことを言えばよい。そのモデルの $\mathfrak{L}$-reduct（言語を $\mathfrak{L}$ の制限したもの）は求めるものである。有限個を持ってくる。それらは必ず M をモデルに持つ。
$T(M)$ からのものは M がそれらを満たすのは当たり前（M からの constant symbol の解釈はそのまま）。$T(N)$ からのものを考える。そのひとつを $\varphi(\bar{b})$ とする。ここで $\bar{b} \in N$ である。すると $N \models \exists\bar{x}\varphi(\bar{x})$. $M \equiv N$ だから $M \models \exists\bar{x}\varphi(\bar{x})$. よってある $\bar{b}' \in M$ があって $M \models \varphi(\bar{b}')$. constant symbol $\bar{b}$ の解釈として $\bar{b}'$ をとればよい。
したがって compactness theorem よりいえた。 □

$M \prec K \Longleftrightarrow K \models T(M)$ である。
言語 $\mathfrak{L}(M \cup N)$ は正確に書くと、$\mathfrak{L} \cup \{c_a\}_{a\in M} \cup \{d_b\}_{d\in N}$ である。したがって共通の elementary extension の中での M と N の重なり具合は分からない。$\mathfrak{L}$ に constant symbol があれば、$T(M), T(N)$ の中に新しい constant symbol との等式が現れる。

同様にして、

Lemma 14 $\{M_i\}_{i\in I}$ をすべて *elememtary equivalent* な $\mathfrak{L}$*-structure* とすると、それらすべてに共通な *elementary extension* がある。

T を complete $\mathfrak{L}$-theory, M を T のモデルとする。(別な言い方：M を $\mathfrak{L}$-structure, $T = \mathrm{Th}(M)$ とする。) A を M の (universe の) subset とする。このとき n-formula の集合 p が A 上の partial n-type であるとは、p の任意有限個が必ず M^n に解を持つような $\mathfrak{L}(A)$-formula の集合であることであった。さらにいま n-formula の variables $x_1, \ldots, x_n$ を constants として考えたとき、p が $\mathfrak{L}(A \cup \{\bar{x}\})$-theory として complete なとき (complete) n-type over A といい、その全体を $S_n^M(A)$ と書いた。普通 M を省略して $S_n(A)$ と書く。

Lemma 15 *partial n-type p* はある M の *elementary extension* で解を持つ。さらにすべての *partial n-type* を実現させる M の *elementary extension* もある。

Proof. 今 type の variables $x_1, \ldots, x_n$ を new constants と考え、言語 $\mathfrak{L}(M \cup \{\bar{x}\})$ で考える。$p \cup T(M)$ は compactness theorem によってモデル N を持つ。N が $T(M)$ を満たすということは、その $\mathfrak{L}$-reduct が M の ($\mathfrak{L}$-)elementary extension であることを意味する。また N が p を満たすということは、その $\mathfrak{L}$-reduct に p の解があると言うことである。

後半は、各 partial type ごとにそれを実現させる elementary extension をとる。それらは $T(M)$ のモデルであるから、$\mathfrak{L}(M)$-structure として elementary equivalent である。よって前の補題から出る。 □

後半では、各 partial type ごとのそれを実現させる elementary extension に含まれる M を共通にするため言語 $\mathfrak{L}(M)$ を考えなくてはならない。

$p \in S_n(A)$ とするとある $N \succ M$(elementary extension), $\bar{a} \in N$ があって $\bar{a}$ は p の解である。すると p が complete(consistent で極大) より $p = \mathrm{tp}^N(\bar{a}/A)$ である。つまりどの解をとってもそれが満たす $\mathfrak{L}(A)$-formula は同じである。ここに $\mathrm{tp}^N(\bar{a}/A) = \{\varphi(\bar{x}) \in \mathfrak{L}(A); N \models \varphi(\bar{x})\}$ である。普通 $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ と N を省略する。$\in \mathfrak{L}(A)$ で $\mathfrak{L}(A)$-formula であることを表す。

$S_n(A)$ に前と同様に位相を入れる。各 $\mathfrak{L}(A)$-formula $\varphi(\bar{x})$ に対して $\langle\varphi(\bar{x})\rangle = \{p \in S_n(A); \varphi \in p\}$ とする。$\langle\varphi(\bar{x})\rangle$ 全体の集合は明らかに open base をなす。$S_n(A)$ は明らかに Hausdorff space であり、各 basic open set は clopen である。再び、

Theorem 16 $S_n(A)$ は *compact* である。

Proof. いま $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を有限交叉性をもつ閉集合の族とする。つまり各 C_λ は $\bigcap_{i\in I_\lambda}\langle\varphi_i^\lambda(\bar{x})\rangle$ の形で任意有限個をとるとその共通部分にはある $p\in S_n(A)$ が入っている。

$q=\{\varphi_i^\lambda(\bar{x});\lambda\in\Lambda,i\in I_\lambda\}$ とおく。q から任意有限個の formula をとったときそれらが M で共通の解を持つことを言えば $q\in S_n(A)$ で $q\in\bigcap_\lambda C_\lambda$ だから証明は終わる。$\psi_1,\ldots,\psi_m\in q$ とする。$\bigcap_{1\leq k\leq m}\langle\psi_k\rangle$ はある何個かの C_λ たちの共通部分を含む。よって $\bigcap_{1\leq k\leq m}\langle\psi_k\rangle$ はある $p\in S_n(A)$ を含む。したがって p は ψ_k 達を含む。type の定義から明らか。 □

上のことは compactness theorem からも出てくる。

$p\in S_n(A)$ とする。大切なことは $p\supset T(A)$ なことである。もしこの表現がいやならば、各 $\varphi\in T(A)$ に対して $p\ni\varphi\wedge x_1=x_1\wedge\ldots\wedge x_n=x_n$ と思えばよい。p は complete な $\mathfrak{L}(A\cup\{\bar{x}\})$-theory である。

逆に p を complete な $\mathfrak{L}(A\cup\{\bar{x}\})$-theory とする。そのモデルを N とし $\mathfrak{L}(A)$-reduct を考えると complete な $T(A)$ を満たすことより、M と elementary equivalent である。よって p は M で finitely satisfiable で $p\in S_n(A)$ であることが分かる。

今 $\mathfrak{T}$ を言語 $\mathfrak{L}(A\cup\{\bar{x}\})$ の complete theory 全体とする。$\mathfrak{T}$ は Stone space である。すると、$S_n(A)$ は閉集合 $\bigcap_{\varphi\in T(A)}\langle\varphi\rangle$ と一致する。よって再び Stone space である。

ここで compactness theorem の適用例を 1 つ紹介する。[1], p63 の Corollary 1.5 である。

Proposition 17 *F を標数 p の代数閉体とする。k を perfect な部分体、$X\subseteq F^n$ を k-definable set, $f:X\to F$ を k-definable function とする。するとある有限個の k-definable sets $X_1,\ldots,X_m$ と k-rational functions $f_1(\bar{x}),\ldots,f_m(\bar{x})$ と自然数 $j(1),\ldots,j(m)$ があって $X=X_1\cup\ldots\cup X_m$ で $f|X_i=(Fr^{-j(i)}\cdot f_i)|X_i$ である。ここに Fr は Frobenius map である。*

Proof. 使うのは、[1] p63 の Corollary 1.4 である。A を F の subset, k を A から生成された部分体、$a\in F$ とすると、$a\in dcl(A)$ iff $a\in k_{ins}$ である。ここに $k_{ins}=\bigcup_n Fr^{-n}(k)=k^{p^{-\infty}}$ である。

X,f を define する $L(k)$-formula を $\varphi(\bar{x}),\psi(\bar{x},y)$ とする。$L(k)$-formula $\varphi\wedge\psi$ を考える。$S_{n+1}(k)$ の閉集合 $\langle\varphi\wedge\psi\rangle$ の無限開被覆を次のように取る。$p\in S_{n+1}(k)$ をとり、$p\in\varphi\wedge\psi$ とする。p を実現する elementary extension F'（つまり F のある拡大代数閉体）をとり、1 つの解を $(\bar{b},a)$ とする。$a\in dcl(k\cup\{\bar{b}\})$ だから $a\in(k(\bar{b}))_{ins}$ である。k は完全体だから、ある k-rational function $f_p\in k(\bar{x})$ と自然数 j_p があって

$$a=(Fr^{-j_p}\cdot f_p)(\bar{b})=(f_p(\bar{b}))^{p^{-j_p}}$$

である。$f_p = h_p/k_p, h_p, k_p \in k[\bar{x}]$ とかき、

$$k_p(\bar{x}) \neq 0 \wedge \varphi(\bar{x}) \wedge \exists y, z(yk_p(\bar{x}) = h_p \wedge y = z^{j_p} \wedge \psi(\bar{x}, z)$$

を $\theta_p(\bar{x}, y)$ とおくと、$p \in \langle \theta_p(\bar{x}, y) \rangle$ である。

各 $p \in \varphi \wedge \psi$ ごとに θ_p をとれば開被覆をえる。$S_{n+1}(k)$ は compact だから有限開被覆を得る。後は明らか。 □

p を実現するモデルがあるところに compactness theorem が使われている。F^{n+1} 内の f のグラフの各点に使うだけでは不十分である。$S_{n+1}(k)$ のすべての type ごと θ_p をとらねばならない。F^{n+1} で実現されないものがあるかもしれない。はじめに $S_{n+1}(k)$ のすべてのタイプを実現するような拡大をとってもよい。

他にもいろいろな使い方があるが、1つの典型例である。

3 saturated extension

T を complete $\mathfrak{L}$-theory, M を T のモデル、A を M の subset とする。このとき前節で $S_n(A)$ のすべてのタイプを実現するような elementary extension の存在を示した。しかし多くの場合色々な部分集合上のタイプが解を持つような elementary extension を考えることが望ましい。

しかしすべてのタイプを実現する構造を望むのは無理である。partial 1-type $p = \{x \neq a; a \in M\}$ は M に解を持たないからである。ちなみに partial type は、Zorn の lemma により必ず complete type に拡張できる。したがって cardinality で制限を設けることが自然と出てくる。

M が κ-saturated であるとは、濃度 κ 未満の部分集合上のタイプが必ず解を持つような構造のことであった。習慣によって $\aleph_0$-saturated は ω-saturated と書くことになっている。

実は容易に次の定理が得られる。

Theorem 18 すべての構造は *ω-saturated elementary extension* を持つ。

Proof. 有限部分集合上のタイプごとにそれを実現する elementary extension をとる。ここにタイプは 1-type, 2type,... すべてをとる。それらの $\mathfrak{L}(M)$-theory はすべて $T(M)$ であり $\mathfrak{L}(M)$-structure として elementary equivalent である。よって共通な elementary extension M_1 があり、そこではすべての有限部分集合上のタイプは解を持つ。この操作を繰り返して elementary extension の tower $M \prec M_1 \prec \cdots \prec M_n \prec M_{n+1} \prec \cdots$ を得る。それらの union が M の elementary extension であることは容易に分かり、また求めるものであるのも明らか。 □

κ-saturated elementary extension の存在を示すのも同様である。今度は長さ κ^+ の elementary extension の tower を作る必要がある。つまり各 ordinal $\alpha < \kappa^+$ に対して M_α をつくる。M_α から $M_{\alpha+1}$ は上と同様。$\gamma < \kappa^+$ が limit のときは $M_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} M_\alpha$ とする。tower の union を M^* とする。$A \subset M^*, |A| < \kappa$ とすれば κ^+ の性質よりある $\alpha < \kappa^+$ があって $A \subset M_\alpha$ である。よって明らかに M^* は M の κ-saturated elementary extension である。

Theorem 19 すべての構造は *κ-saturated elementary extension* を持つ。

κ-saturated structure の濃度は当然 κ 以上である。$p = \{x \neq a; a \in M\}$ を考えればすぐわかる。もちろん best possible は κ であるが一般にはいえない。しかし代数閉体、微分閉体、分離閉体の場合には存在する。広くはstableな理論には存在することがわかっている。

M が $|M|$-saturatedなとき単に saturate しているという。completeな理論 T の saturated model は universal domain の性格を持っている。つまり、

Theorem 20 T を *complete*な理論、M を濃度 κ の *saturated model*とする。

1. N を濃度 κ の別な *saturated model*とすると M と N は同型である。
2. 濃度が κ 以下の T のモデルは M の *elememtary substructure*として埋め込める。(*κ-universal*であるという。)
3. A, B を M の濃度 κ 未満の部分集合で $\mathrm{tp}(A) = \mathrm{tp}(B)$ とする、つまり A から B への *bijection* σ があり任意の *$\mathfrak{L}$-formula* $\varphi(\bar{x}), \bar{a} \in A$ に対して M で $\varphi(\bar{a}) \Longleftrightarrow \varphi(\sigma(\bar{a}))$ が成り立つとき (σ を *partial elementary mapping*という)、σ を M の自己同型に拡張できる。(*(strongly) κ-homogeneous* という。)

証明は Poizat[2] または坪井 [4] を参照のこと。よって saturated なモデルがある場合には十分大きな濃度の saturated model を universal domain としてとる。一般の場合には、complete な T に対して十分大きな正則基数 κ をとったとき κ-saturated, (strongly) κ-homogeneous なモデルが存在することが知られている (その濃度は κ より大きいかもしれないが)。これを universal domain としてとる。(他の立場もある。[1] Ziegler を参照のこと。)

κ-universality は κ-saturatedness からでる。つまり、

Theorem 21 T を *complete $\mathfrak{L}$-theory,* M を T の *κ-saturated*なモデルとする。このとき、濃度が κ 以下の T のモデルは M の *elememtary substructure* として埋め込める。

証明は再びPoizat[2] または坪井 [4] を参照のこと。

Remark M が $S_1(A)$ (ここで $A \subset M$) のすべてのタイプを実現するならば、実はすべての n に対して M は $S_n(A)$ のすべてのタイプを実現することが容易に分かる。quantifier $\exists$ で縛って一つ一つ実現すればよい。

空集合上のタイプは $\mathrm{tp}(\bar{a}/)$ の代わりに $\mathrm{tp}(\bar{a})$ と書く。また一般に $\mathrm{tp}(B/A)$ も考えられる。$B = \{b_\lambda\}$ として対応する変数 $\{x_\lambda\}$ を用意して

$$\mathrm{tp}(B/A) = \{\psi(x_{\lambda_1}, \ldots, x_{\lambda_m}); m \in \mathbb{N}, \psi \in \mathfrak{L}(A), M \models \psi(b_{\lambda_1}, \ldots, b_{\lambda_m})\}$$

とすればよい。

このようにモデル論では(場合によっては可算無限より)大きい濃度の定数記号列、変数記号列をよく用いる。これは代数で無限変数多項式環を考えることと同じである。

4 type と prime ideal

今 K を ACF_p のモデル、A を K の部分集合、k を A から生成された K の部分体とする。

まず $S_n(k)$ と $S_n(A)$ はhomeomorphicであることがすぐわかる。$\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ を L-formula, $\bar{b} \in k$ とすると、$L(\bar{b})$-formula $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ に対してある L-formula $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ とある $\bar{a} \in A$ があって

$$K \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{a}))$$

が成り立つ。(各 b_i はある $\bar{a}_i \in A$ によって素体上の $\bar{a}_i$ の有理関数の形にかける。それを代入してすべての分母をはらえばよい。) よって明らかである。したがってこれからはparameter setとして部分体だけを考えてよい。

$p \in S_n(k)$ に対して

$$I(p) = \{f(\bar{x}) \in k[\bar{x}]; f(\bar{x}) = 0 \in p\}$$

とおくと、$I(p)$ は $k[\bar{x}]$ の素イデアルである。

$$f = 0 \text{ かつ } g = 0 \Longrightarrow f + g = 0,$$

$$f = 0 \Longrightarrow gf = 0 (\forall g)$$

だから $I(p)$ はイデアルである。(complete typeはdeductionで閉じている。) 次に $fg \notin I(p)$ とすると、$fg = 0 \notin p$、よって $f = 0 \vee g = 0 \notin p$. したがって $f = 0, g = 0 \notin p$ で $f, g \notin I(p)$. よって $I(p)$ はprimeである。

逆に I を $k[\bar{x}]$ の素イデアルとする。

$$\{f(\bar{x})=0; f \in I\} \cup \{g(\bar{x}) \neq 0; g \notin I\}$$

から生成される（つまりその帰結全体）タイプ $p \in S_n(k)$ を考えると、Q.E. から complete なことがわかる。明らかに $I(p)=I$ である。

従って $I : S_n(k) \to Spec(k[\bar{x}])$ は全射であり、$I(p)=I(q)$ から $p=q$ もすぐいえるので bijection である。さらに通常どおり $Spec(k[\bar{x}])$ に Zariski topology をいれると、I は continuous bijection である。しかし homeomorphism ではない。$f(\bar{x}) \in k[\bar{x}] \setminus k$ としたとき、$\{p \in S_n(k); f=0 \in p\}$ は clopen であるが、$\{I(p) \in Spec(k[\bar{x}]); f \in I(p)\}$ は open ではなく closed なだけである。

ACF のとき $S_n(k)$ の位相を constructible topology という。(definable set が Q.E. によって constructible なため。) Constructible topology は Zariski topology より細かい位相である。前者が Haussdorf compact であるのに対して後者は Haussdorf ではなく quasi-compact なだけである。

上の I を通じてしばしば type と prime ideal を同一視することが多い。しかしタイプ $p \in S_n(k)$ の実現点は generic point だけであるが、素イデアル $I(p) \in Spec(k[\bar{x}])$ はそうではない。またタイプどおしの包含関係はないが、素イデアルにはあり重要な役目を示す。じつはこれに対応するのが、モデル論の fundamental order である。しかしこれについては省略する。

代数幾何では素体上無限の超越次数を持つ拡大代数閉体を universal domain Ω とする。実はこれはモデル論でいうものと一致する。

$|k| < |\Omega|$ とすると、Ω は k 上 infinite transcendence degree を持つ。よって $I \in Spec(k[\bar{x}])$ をとると整域 $k[\bar{x}]/I$ は必ず Ω に k-embed することができる。この埋め込みによる $(x_1+I, \dots, x_n+I)$ の像が I に対応するタイプの実現点である。よって、

Proposition 22 素体上、濃度 κ の超越基底持つ代数閉体は濃度 κ の *saturated structure* である。

universality も明らかである。F を濃度 $|\Omega|$ 以下の代数閉体とすると、その超越基底の濃度は Ω の超越基底の濃度 $|\Omega|$ 以下である。よって明らかに埋め込める（埋め込み先が elementary submodel であることは model complete より明らか。）

strong homogenity も明らかである。今 A, B を濃度 $|\Omega|$ 未満の部分集合とする。$\mathrm{tp}(A) = \mathrm{tp}(B)$ とすると、明らかに $\langle A \rangle \simeq \langle B \rangle$. ここで $\langle\ \ \rangle$ で生成される部分体をあらわす。するとまずこの同型は algebraic closure まで拡大される。Ω での $\langle A \rangle$,

$\langle B\rangle$ の代数的閉包を k, l とする。$\mathrm{trans}_k(\Omega) = \mathrm{trans}_l(\Omega)$ であり、k, l は濃度が $|\Omega|$ 未満なため k 上の Ω の超越基底と l 上の Ω の超越基底とは無限で濃度が同じである。代数閉体の基底の性質より、k 上の Ω の超越基底 C と l 上の Ω の超越基底 D がとれて $\mathrm{acl}(k(C)) = \mathrm{acl}(l(D)) = \Omega$ である。しかも $|C| = |D|$ である。よって明らかに同型は Ω の自己同型に拡大される。(A, B が濃度 $|\Omega|$ 未満でなければ一般には成り立たない。例えば $\mathbb{C}$ をとる。これは濃度 $2^{\aleph_0}$ の saturated structure である。A を $\mathbb{C}$ の $\mathbb{Q}$ 上の超越基底とする。B として $A \setminus \{\pi\}$ をとる。二つの部分体として $\mathbb{Q}(A)$ と $\mathbb{Q}(B)$ をとると、体として同型だが、$\mathbb{C}$ の自己同型には拡張できない。)

実は代数閉体では単に2つの部分体の同型から(代数閉体での)タイプが等しいことがでる。$K, L \subset \Omega, K \simeq_\sigma L$ とする。さらに $\varphi(\bar{x}) \in L, \bar{a} \in K$ とする。$\Omega \models \varphi(\bar{a})$ とすると Q.E. により $\Omega \models \varphi(\sigma(\bar{a}))$ である。なぜなら体の同型は quantifier free な formula を保存するからである。逆も明らかであり、よって $\mathrm{tp}(K) = \mathrm{tp}(L)$.

5 Elimination of imaginaries(E.I.)

普通に考えれば第1階述語論理では集合族は取り扱えない。しかし簡単な集合族に限れば、many sorted にすることによって取り扱うことができる。簡潔な説明が [1] 第2章 Ziegler にある。また場合によっては many sorted にしなくても取り扱うことができる。代数閉体、微分閉体、分離閉体がその例である。

これらにおいては例えば two-elenent set $\{a, b\}$ 全体を扱う代わりに、definable set K^2 を考えて、その点 (tuple) を、対応 $\{a, b\} \leftrightarrow (a+b, ab)$ のもとで two-element set とみなせばよい。

Definition 23 *T を complete な理論、Ω をその universal domain とする。T が (strong) elimination of imaginaries を持つとは、すべての formula $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ (ここで $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ は $\mathfrak{L}$-fomula で $\bar{a} \in \Omega$) に対してある tuple $\bar{b}$ があって次のことが成り立つことである。$D = \{\bar{d} \in \Omega^n; \Omega \models \varphi(\bar{d}, \bar{a})$ として、*

$$\forall \sigma \in \mathrm{Aut}(\Omega) \ \ \sigma(D) = D \Longleftrightarrow \sigma(b_i) = b_i \ \ for\ \ each\ \ i$$

例えば two-elenent set $\{a, b\}$ に対して tuple $(a+b, ab)$ はこの性質を持っている。($\{a, b\}$ は $x = a \vee x = b$ で定義されている。この tuple $(a+b, ab)$ を $\{a, b\}$ の canonical parameter という。) canonical parameter は一意に決まるわけではない。例えば tuple $a+b-ab, a+b+ab)$ も $\{a, b\}$ の canonical parameter である。一般に $\bar{b}$ が canonical parameter で $\mathrm{dcl}(\bar{b}) = \mathrm{dcl}(\bar{c})$ ならば $\bar{c}$ も canonical parameter である。

よく知られている例として最小定義体がある。Ω を ACF_p の universal domain とする。V を Ω^n の affine algebraic set としてその最小定義体 k_0 をとる。k_0 は素体上有限生成であるから1組の素体上の生成元をとり $\bar{b}$ とする。すると上記のことが成り立つ。

実はこの拡張として ACF_p が E.I. を持つことがいえる。つまり一般の definable set についても同様なことがいえるのである。

Q.E. より Ω^n の definable set V は

$$\bigvee_{i=1}^{k}\left(f_1^i(\bar{x},\bar{b}_1^i)=0\wedge\cdots f_m^i(\bar{x},\bar{b}_m^i)=0\wedge g^i(\bar{x},\bar{c}^i)\neq 0\right)$$

の形である。(definable set と formula を同一視する。) ただし $1\leq i\leq k$ によっては $g^i(\bar{x},y)$ は1とする。(つまり inequation はない disjunct があるとき付け加える。) 新しい変数 $y_1,\ldots,y_k$ を用意して,

$$\bigvee_{i=1}^{k}\left(f_1^i(\bar{x},\bar{b}^i)=0\wedge\cdots f_m^i(\bar{x},\bar{b}^i)=0\wedge y_i g^i(\bar{x},\bar{c}^i)-1=0\right)$$

なる Ω^{n+k} 内の代数的集合 V' を考える。(分配すれば代数的集合となる。) 任意の Ω の自己同型 σ に対して $\sigma(V)=V\Longleftrightarrow\sigma(V')=V'$ だから V の最小定義体のある一組の生成元の tuple が V の canonical parameter となる。

Theorem 24 *ACF_p は E.I. を持つ。*

代数閉体では最小定義体(素体上有限生成)のどの生成元の tuple も canonical parameter である。そしてこの場合 definable closure は生成される体の perfect closure だからそれらの definable closure は一致する。

ここでもうひとつの Elimination of imaginaries の定義は、[1] の Pillay にあるように、まず、

Definition 25 構造 M が *E.I.* を持つとは、
任意の $e\in M^{eq}$ に対してある *tuple* $\bar{b}$ があって、$e\in dcl(\bar{b})$ で $\bar{b}\in dcl(e)$ であることである。

これは構造が E.I. を持つことの定義だが、この theory version として、

Definition 26 *complete* な理論 T が *E.I.* を持つとは、その任意のモデルが *E.I.* を持つことである。

この定義から先の定義が出てくるのはやさしい。T の universal domain Ω をとる。Ω の definable set が canonical parameter をもつことをいえばよい。

まず definable set が $\emptyset$ 上の同値関係（つまり parameter なしの）の同値類の場合を考える。$E(\bar{x},\bar{y}) \in \mathfrak{L}$ を同値関係として、$\bar{a} \in \Omega$ とし、同値類 $E(\bar{x},\bar{a})$ を考える。$e = \bar{a}/E = f_E(\bar{a})$ とする。canonical parameter として上の定義の $\bar{b}$ を取れることをいう。$\sigma(\bar{b}) = \bar{b}$(pointwise) となるような Ω の自己同型をとる。

$e \in dcl(\bar{b})$ はある parameter $\bar{b}$ を持った（なくてもよい）$\mathfrak{L}^{eq}$-formula で一意的に e が決まるということだから、σ を施しても e は変わらない、つまり $E(\bar{x},\bar{a})$ は変わらない（setwise）。($\sigma(e) = \sigma(f_E(\bar{a})) = f_E(\sigma(\bar{a}))$. よって $\sigma(e) = e$ は $E(\sigma(\bar{a}),\bar{a})$ を意味する。)

$\bar{b} \in dcl(e)$ は同じく e を動かさないような自己同型（つまり $E(\bar{x},\bar{a})$ を動かさない自己同型によって $\bar{b}$ が動かない（poitwise）ことを意味する。よって同値類の場合は確かに canonical parameter を持つ。

次に一般の definable set だがもしそれが parameter なしの $\psi(\bar{x})$ （で定義される）なら同値類が 2 つの同値関係 $\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{y})$ （$E(\bar{x},\bar{y}$ とする）をとり、definable set 内の 1 点 $\bar{a}$ による同値類 $E(\bar{x},\bar{a})$ を考えればよい。

parameter ありの $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ ならば、$\emptyset$ 上の同値関係

$$\forall \bar{z}(\varphi(\bar{z},\bar{x}) \leftrightarrow \varphi(\bar{z},\bar{y}))$$

（$E(\bar{x},\bar{y}$ とする）を考える。$E(\bar{x},\bar{a})$ を変えない（setwise）自己同型は definable set $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ を変えないし（setwise）、逆もそうである。これを考えればよい。

これより先の定義から後の定義がでることをしめす。準備として一般に成り立つこととして、

Lemma 27 *T を complete theory, Ω を universal domain, $A \subset \Omega$ とする。Ω^n の definable set $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ が $\mathrm{Aut}(\Omega/A)$ （つまり A の各元を変えない）のすべての自己同型で setwise に不変ならば、この definable set は A からの parameter $\bar{b}$ を持った formula $\psi(\bar{x},\bar{b})$ で定義される（つまり同値）。*

代数では次のような定理が有る。Ω を ACF_p の universal domain, K を部分体としたとき、Ω^n の代数的集合 V が K 上 algebraically normal ならば V は $K[\bar{x}]$ の部分集合で定義される。ここで algebraically noromal とは $V^\sigma = V$ ($\forall \sigma \in \mathrm{Aut}(\Omega/K)$) のことである。実は一般的にいえるのである（ただし十分‘大きな’構造の中で)。

Proof. $S_n(A \cup \{\bar{a}\})$ から $S_n(A)$ への制限写像 π を考える。明らかに π は連続写像である。compact space から Hausdorff space への連続写像は閉写像であるから

$$H_1 = \pi(\langle \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \rangle), \quad H_2 = \pi(\langle \neg\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \rangle)$$

は閉集合である。明らかに $H_1 \cup H_2 = S_n(A)$ である。

$H_1 \cap H_2 = \emptyset$ を示す。

$H_1 \cap H_2 \ni p$ とすると、ある $q_1, q_2 \in S_n(A \cup \{\bar{a}\})$ があって

$$q_1 \in \langle \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \rangle, \; q_2 \in \neg\langle \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \rangle$$

. q_1, q_2 の Ω での realization を $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ とすると、

$$\Omega \models \varphi(\bar{c}_1, \bar{a}), \neg\varphi(\bar{c}_2, \bar{a})$$

である。$\mathrm{tp}(\bar{c}_1/A) = \mathrm{tp}(\bar{c}_2/A)$（これより $\mathrm{tp}(\{\bar{c}_1\} \cup A) = \mathrm{tp}(\{\bar{c}_2\} \cup A)$ がでる）からある $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Omega/A))$ があって $\sigma(\bar{c}_1) = \bar{c}_2$. $\bar{c}_1$ は definable set $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ に入っていてこの definable set は σ で不変だから矛盾する。よっていえた。

したがって H_1, H_2 は clopen である。そして $S_n(A)$ の clopen set は必ずある $\psi \in \mathfrak{L}(A)$ があって $\langle \psi \rangle$ の形である。なぜならまず open なことより $\bigcup \psi_i$ の形である。closed なことより compact である。よって finite open covering をとれる。その disjunction をとればよい。

それゆえ $H_1 = \langle \psi(\bar{x}, \bar{b}) \rangle, H_2 = \langle \neg\psi(\bar{x}, \bar{b}) \rangle$ とおけて、

$$\forall \bar{d} \in \Omega(\Omega \models \varphi(\bar{d}, \bar{a}) \Rightarrow \Omega \models \psi(\bar{x}, \bar{b}))$$

$$\forall \bar{d} \in \Omega(\Omega \models \neg\varphi(\bar{d}, \bar{a}) \Rightarrow \Omega \models \neg\psi(\bar{x}, \bar{b}))$$

. よって明らか。（任意の $\bar{d}$ に対してタイプ $\mathrm{tp}(\bar{d}/A \cup \{\bar{a}\})$ を考えればよい。） □

Lemma 28 T を *complete theory*, Ω を *universal domain* とする。T がはじめの定義の意味で *E.I.* を持つための必要十分条件は、

すべての *formula* $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$（ここで $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ は $\mathfrak{L}$-*formula* で $\bar{a} \in \Omega$）に対してある $\mathfrak{L}$-*formula* $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ があり

$$\Omega \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{b}))$$

となる（つまり同じ Ω^n の部分集合を定義する）$\bar{b} \in \Omega$ が一意的に存在することである。

例えば $x = a \vee x = b$ に対しては formula $x^2 - z_1 x + z_2 = 0$ が上の ψ にあたる。
Proof. まず $\Longleftarrow$ は明らかである。$\bar{b}$ は明らかに canonical parameter である。

逆を示す。今 definable set $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$（これを D とする）の canonical parameter を $\bar{b}$ とする。先の補題より D はある formula $\psi'(\bar{x}, \bar{b})$ で定義される。ここで $\bar{b}$ によって満たされるある $\mathfrak{L}$-formula $\theta(\bar{z})$ があり、$\psi'(\bar{x}, \bar{d})(\bar{d} \in \Omega)$ が $\psi'(\bar{x}, \bar{b})$ と同じ部分集合を定義して $\theta(\bar{d})$ が成り立つならば実は $\bar{b} = \bar{d}$ であることが示される。

なぜならこのような $\theta(\bar{z})$ がないとすると、$\mathfrak{L}(\{\bar{b}\})$-formula の集合

$$tp(\bar{b}/\emptyset) \cup \{\forall \bar{x}(\psi'(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \psi'(\bar{x}, \bar{b})), \bar{z} \neq \bar{b}\}$$

の有限部分集合が解を持つことになり、結局 Ω に共通な解 $\bar{b}'$ を持つ。$\mathrm{tp}(\bar{b}) = \mathrm{tp}(\bar{b}')$ よりある自己同型があり $\bar{b}$ を $\bar{b}'$ に移す。一方この自己同型は D を変えないから矛盾がおこる。

$\theta(\bar{z}) \wedge \psi'(\bar{x}, \bar{z})$ を $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ とすればよい。 □

上のことより、すべての T のモデル M で同じことが成り立つのは明らかである。

まず M を universal domain Ω に埋め込む。$M \prec \Omega$ である。M の definable set $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$（ここで $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ は $\mathfrak{L}$-formula で $\bar{a} \in M$）をとる。ψ と $\bar{b} \in \Omega$ が上を満たすように存在するが、'一意的にある' ことは言語でかけるので、M にもそのような $\bar{b}$ は存在する。

上のことを言語 $\mathfrak{L}^{eq}$ でかく。$E(\bar{x}, \bar{y})$ を definable equivalence relation over $\emptyset$, $\bar{a} \in M$, $e = \bar{a}/E = f_E(\bar{a})$, $\bar{b} = b_1, \ldots, b_k$, x_E を M_E の変数とする。

$$\forall \bar{x}(x_E = f_E(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{b}))$$

を満たす x_E は e ただひとつであるから、$e \in \mathrm{dcl}(\bar{b})$.

$$\exists z_2, \ldots, z_k \forall \bar{x}(e = f_E(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{z}))$$

を満たす z_1 は b_1 ただひとつであるから、$b_1 \in \mathrm{dcl}(e)$. 他の $b_2, \ldots, b_k$ も同様である。

よって先の定義と後の定義とが同値である事が分かった。さらに canonical parameter は D を定義する parameter であることが分かった。$\mathrm{dcl}(\bar{b}') = \mathrm{dcl}(\bar{b})$ ならば $\bar{b}'$ も canonical parameter であることは、（Ω での自己同型を考えれば）すぐに分かるので定義する parameter の definable closure を考えることにすると、$\mathrm{dcl}(\bar{b})$ は最小の定義する parameter の definably closed set であることが分かる。

$\bar{a}$ を definable set D を定義する parameter であるとすると（つまりある formula $\eta(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathfrak{L}$ があって D は $\eta(\bar{x}, \bar{a})$ で定義されると）、$\bar{a}$ を変えない Ω の自己同型は $\bar{b}$

を変えないから $\bar{b} \in \mathrm{dcl}(\bar{a})$. よって最小である。$ACF_p$ の場合は、標数 $p = 0$ の場合 dcl は生成する体で、$p > 0$ のときは生成する体の perfect closure だから最小定義体である。

なお complete でない理論が E.I. を持つ、という言い方もする。そのすべてのモデルが E.I. を持つことを意味する。例えば ACF は E.I. を持つ。

$D \subset \Omega^n$ を $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ で定義される definable set とする。このときある parameter なしの formula $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ があってただひとつの $\bar{b}$ に対して D が $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ として定義された。しかしこの ψ は parameter $\bar{a}$ によってことなるかもしれない。

いまから T が少なくとも 2 つの異なる constant の存在を認めるならば（つまり $\mathrm{dcl}(\emptyset)$ が少なくとも 2 つの元を含むならば）上の ψ は parameter に依存せず、$\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ によってのみ決まることを示す。(T のモデルはすべて $\mathrm{dcl}(\emptyset)$ を含む。)

ACF_p は $\mathrm{dcl}(\emptyset) \ni 1, 0$ より上の条件を満たす。アイデアは compactness theorem によって表現をいくつかに絞ってやり、後は場合分けで書くことである。

Proposition 29 *T が E.I. を持ち、T で $\mathrm{dcl}(\emptyset)$ が少なくとも 2 つの元を含むとする。M を T のモデルとし、$D \subset M^n$ を $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ で定義される definable set とする。このとき $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ だけで決まるある parameter なしの formula $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ があってただひとつの $\bar{b}$ に対して D が $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ として定義される。*

Proof. Ω を universal domain とする。n を $\bar{y}$ の長さとして、$S_n(\emptyset)$ の無限開被覆を次のように取る。

$p \in S_n(\emptyset)$ に対して p の Ω の実現点を $\bar{a} \in \Omega$ とする。すると、$\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ に対してある formula $\psi(\bar{x}, \bar{z}_p)$ があって、

$$\Omega \models \exists! \bar{z}_p \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \psi_p(\bar{x}, \bar{z}_p))$$

である。つまり

$$p \in \langle \exists! \bar{z}_p \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_p(\bar{x}, \bar{z}_p)) \rangle$$

である。すると、$S_n(\emptyset)$ は

$$\bigcup_{p \in S_n(\emptyset)} \langle \exists! \bar{z}_p \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_p(\bar{x}, \bar{z}_p)) \rangle$$

で覆われる。よって有限個の $\psi_1, \ldots, \psi_k$ があって

$$S_n(\emptyset) = \bigcup_i \langle \exists! \bar{z}_i \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{x}, \bar{z}_i)) \rangle$$

である。

すべての T のモデルに対して、特に M に対して、

$$M \models \forall \bar{y} \bigvee_i \exists! \bar{z}_i \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{x}, \bar{z}_i)))$$

である。($\bar{a} \in M$ を勝手に取る。$p = \mathrm{tp}(\bar{a}) \in S_n(\emptyset)$ をとれば $\bar{a}$ が上の $\forall \bar{y}$ 以下の formula を満たすことが分かる。)

ここで仮定で保証されている $\mathrm{dcl}(\emptyset)$ の異なる 2 つの元を $0, 1$ としておく。

適当に $z_j = 0$ を $\wedge$ で付け加えて各 $\bar{z}_i$ の長さを同じ長さにしておく。($\psi_1(\bar{x}, \bar{z}_1)$ で $\bar{z}_1$ の長さを l_1 とすれば $\psi_1(\bar{x}, \bar{z}_1) \wedge z_{l_1+1} = 0$ で parameter の長さは $l_1 + 1$ となる。) このようにしたとき、

$$M \models \forall \bar{y} \bigvee_i \exists! \bar{z} \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{x}, \bar{z})))$$

が成り立つ。

新しい parameter 用の変数 $u_1, \ldots, u_k$ を用意して場合分けを formula でかく。$i = 1, \ldots, k$ にたいして、

- 各 u_i は 0 か 1 であり、また u_i の中でただ 1 つだけが 0 である。
- $u_i = 1$ iff $\psi_i(\bar{x}, \bar{z})$ であり

$$\forall \bar{t} (\forall \bar{x} (\psi_i(\bar{x}, \bar{z}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{x}, \bar{t})) \rightarrow \bar{t} = \bar{z}$$

であって $j < i$ に対しては

$$\neg (\forall \bar{t} (\forall \bar{x} (\psi_i(\bar{x}, \bar{z}) \leftrightarrow \psi_j(\bar{x}, \bar{t})) \rightarrow \bar{t} = \bar{z})$$

である。

この conjunction を $\psi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{z})$ とすると統一的に、任意の $\bar{a} \in M$ に対してある unique な $\bar{c}, \bar{b}$ があり、D は $\psi(\bar{x}, \bar{c}, \bar{b})$ で定義される。 □

今 $E(\bar{x}, \bar{y})$ を parameter なしで定義可能な同値関係とすると、上のことよりある parameter なし definable な function f_E (M^n から M^m への、ここで n は $\bar{x}$ の長さで、m は上の $\bar{c}, \bar{b}$ の長さ) があって、商集合 $\{\bar{a}/E; \bar{a} \in M^n\}$ は、全体が f_E の image で、各剰余類はその点 (tuple) であらわすことができる。よって商集合を definable set として扱うことができる。

ここで問題になるのは、同値関係 $E(\bar{x},\bar{y})$ が parameter を用いて定義できる場合である。parameter set を A とする。A の各元に名前を付けた言語 $\mathfrak{L}(A)$ のもとでの theory $T(A) = \mathrm{Th}(M,a)_{a\in A}$ を考えると、$T(A)$ も明らかに E.I. を持つ。言語 $\mathfrak{L}(A)$ のもとでは $E(\bar{x},\bar{y})$ は $\emptyset$-definable だからそのまま上のことが適用でき、結局 f_E が A-definable となる。商集合は A-definable set として扱うことができる。

上の場合分けは複雑そうに見えるが、もっと単純な場合はしばしば現れるものである。

Example. 体 K 上の射影直線 $\mathbb{P}^1$.

1. 通常のように definable set $K^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の $\emptyset$-definable equivalence relation $E(\bar{x},\bar{y}) : x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ による商集合とする。parameter (a_1,a_2) をとるとき、$E(\bar{x},\bar{a})$ は

   $a_1 \neq 0$ ならば canonical parameter として $b = a_2/a_1$ を、

   $a_1 = 0$ ならば canonical parameter として $b = 1$ ををとることができる。($\mathrm{acl}(\emptyset)$、つまり素体の元なら何でも良いから今は 1 としておく。) 付随する formula としては前者は $x_2 - bx_1 = 0$, 後者は $x_1 + 1 - b = 0$ (又は明示的に $x_1 + 1 - b = 0 \wedge x_2 = x_2$)

   この二つに対して前の方法を適用すればよいが、結局 f_E を例えば、新しい parameter u を用意して、

   $$(y_1 \neq 0 \wedge z = y_2/y_1 \wedge u = 1) \vee (y_1 = 0 \wedge z = 1 \wedge u = 0)$$

   とすれば、f_E は商集合 $\{E(x_1,x_2,y_1,y_2); (y_1,y_2) \in K^2\}$ から K^2 への definable injection となる。座標として (u,z) をとれば普通の代表元のとり方となる。この場合は体でいえるが、代数閉体ならばどんなに複雑なものに対しても同様なことがいえるのである。

2. このような仕方は一通りではない。$\mathbb{P}^1$ を affine 直線の張りあわせと見ると、次のような f_E が得られる。

   お互いに disjoint な affine 直線 $K \times \{0\}, K \times \{1\}$ を K^2 の中にとる。開集合 $x \neq 0$ どおしの張り合わせを、$(x,0) \leftrightarrow (1/x,1)$ で与える。つまり K^2 上の同値関係

   $$E(x_1,x_2,y_1,y_2); (x_1 \neq 0 \wedge y_1 \neq 0 \wedge x_2 = 0 \wedge y_2 = 1 \wedge x_1y_1 - 1 = 0)$$

   $$\vee((x_1 = 0 \vee y_1 = 0 \vee x_2 \neq 0 \vee y_2 \neq 1) \wedge \bar{x} = \bar{y})$$

を $(K\times\{0\})\cup(K\times\{1\})$ に制限したものである。(この E は張り合わせ部分以外は各同値類は 1 点からなる。) 張り合わせ部分の同値類 $\{(a,0),(1/a,1)\}$ $(a\neq 0)$ に対しては canonical parameter として a を、1 点からなる同値類 $\{(c,d)\}$ にはその点の座標を tuple として canonical parameter にとる。f_E を $(K\times\{0\})\cup(K\times\{1\})$ 上、

$$(y_1\neq 0\wedge z_1=y_1\wedge z_2=0)\vee(y_1=0\wedge z_1=y_1\wedge y_2=z_2)$$

とすればよい。

上のようにして、Weil が定義した abstarct algebraic variety は definable set (constructible set) として定義される。definable な atlas と definable な chart を持っているものである。もちろん geometry は見えなくなる。例えば subvariety かどうかを見るのは元の variety に戻らなくてはいけない。しかし f_E を知っていればそれは難しいことではない。これは普通の代数幾何で行っていることである。

顕著な例として、Weil-Hrushovski-van den Dries theorem がある。([1]Pillay 参照) G を代数閉体で definable な群とする。(つまりある K^n の definable set で群演算が definable なものである。) すると G はある代数群と definably isomorphic である。この場合、代数群は上のようにして得られた definable set として扱っている。(もちろん群演算はただの definable ではなく morphism である。) そして二つが definable group として同型であることを出張している。(この同型も definable であることもである。)

model theory が力を発揮するのはこのようなことも踏まえて、代数閉体よりも豊かな構造、微分閉体、分離閉体の理論等に現れるいろいろな概念 (代数閉体では無意味になることも多い) が有効であることにある。

参考文献

[1] E. Bouscaren (Ed.), *Model Theory and Algebraic Geometry*, L.N.M. 1696,Springer, 1998.

[2] B. Poizat, *A Course in Model Theory*, Springer, 2000.

[3] M.D.Fried, M. Jarden, *Field Arithmetic*, 2nd Ed., Springer, 2005.

[4] 坪井明人, モデルの理論, 河合文化教育研究所, 1997.