

# ザリスキー幾何

板井 昌典 (ITAI Masanori)

東海大学 理学部 情報数理学科

Department of Mathematical Sciences, Tokai University

## 目次

<b>1 講義 1 : 体の純粹性</b>	<b>2</b>
1.1 ザリスキー幾何の由来	2
1.2 ザリスキー幾何とザリスキー・タイプの比較	2
1.3 どうやって体を作るか	4
1.4 位相的情報から代数的情報を引き出す	5
1.5 代数的に閉じていること	5
1.6 純粹性 : $T_a = T_b$	5
<b>2 講義 2 : 内的被覆と外的被覆</b>	<b>7</b>
2.1 外的写像, 内的タイプ	7
2.2 外的写像の性質	9
2.3 曲線による 2 点の識別	11
<b>3 講義 3 : 定理 A</b>	<b>13</b>
3.1 豊富なザリスキー幾何, 非常に豊富なザリスキー幾何	13
3.2 正規化による特異点除去	13
3.3 滑らかな曲線としてのザリスキー幾何	13
<b>4 今後への展望</b>	<b>15</b>

## 1 講義 1 : 体の純粹性

### 1.1 ザリスキー幾何の由来

ザリスキー幾何の由来を簡単に振り返っておこう。はじめは代数的閉体のモデル理論であった。 $T$  を代数的閉体の理論とする。  $T$  は強極小理論である。  $T$  の任意の無限モデル  $M$  を考えると、  $M$  の定義可能 (パラメーターを使ってもよい) 部分集合は、有限または補-有限になっている。

強極小理論  $T$  は  $\aleph_1$ -範疇的である。すなわち、  $T$  の非可算モデルは同型を除いて1個しかない。ここで  $\aleph_1$ -範疇的という言葉を使ったが、これは Morley の「非可算範疇性定理」による。非可算範疇性定理によれば、一階の理論は、ある非可算濃度で範疇的ならば、すべての非可算濃度で範疇的だからである。

さて  $T$  を再び、代数的閉体の理論とする。  $T$  の可算モデルの個数はいくつであろうか。標数 0 の場合を考えれば容易に分かるように可算個ある。よって  $T$  は  $\aleph_1$ -範疇的であり、可算モデルは可算個ある。実はこの現象は、一般的現象なのである。

**定理 1 (Baldwin-Lachlan)**  $T$  を  $\aleph_1$ -範疇的理論とする。  $T$  が  $\aleph_0$ -範疇的でなければ、  $T$  は可算モデルを可算無限個持つ。

これらの議論は「幾何的安定性理論」の古典的結果である。

代数的閉体の理論は  $\aleph_1$ -範疇的理論の典型例である。代数的閉体のモデルと同じような内部構造を持つモデル  $M$  ( $M$  の組合せ幾何が非局所モジュラー) を考える。モデル理論的性質だけを手掛かりに  $M$  を用いて代数的閉体を再構成することが出来ると考えたのが Zilber であった。

この予想は Zilber 予想と呼ばれていたが、1980 年代最後になって反例が Hrushovski によって構成された。しかし、ザリスキー幾何と呼ばれる構造に関しては正しかったのである。

1993 年に Hrushovski が幾何的 Mordell-Lang 予想を解き、そのなかでザリスキー幾何の結果を巧みに使ったことによってザリスキー幾何が一躍脚光を浴びることになった。

### 1.2 ザリスキー幾何とザリスキー・タイプの比較

#### ザリスキー幾何の公理系と基本性質

**定義 2 (ザリスキー幾何)**  $D$  を無限集合とし、各  $n$  について  $D^n$  にはネーター位相が入っている。次の 4 つの公理系が満たされるとき、  $D$  はザリスキー幾何であるという。

(Z0)  $f_i$  は定数写像  $f_i(x_1, \dots, x_n) = c$ 、あるいは射影  $f_i(x_1, \dots, x_n) = x_j$  ( $j$  は  $1, \dots, n$  のどれか) とする。  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  とすると  $f: D^n \rightarrow D^m$  は連続写像である ( $n, m$  の大小関係に制限がないことに注意)。  $D^n$  の対角集合  $\Delta_{i,j}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = x_j\}$  は閉集合である。

(Z1)  $C$  を  $D^n$  の既約閉集合、  $\pi$  を  $D^n$  から  $D^k$  への射影とする。このとき、  $\overline{\pi C}$  の真部分閉集合  $F$  で、  $\pi C \supseteq (\overline{\pi C} - F)$  となるものが存在する。

(Z2)  $D$  は既約である。また次の意味で、一様に 1 次元的である :  $C \subseteq D^n \times D$  が閉集合であるとき、ある自然数  $m$  が存在して、任意の  $\bar{a} \in D^n$  に対して、  $C(\bar{a}) = D$  または  $|C(\bar{a})| \leq m$  である。ただし、  $C(\bar{a}) = \{x \in D : (\bar{a}, x) \in C\}$ 。

(Z3) (次元定理)  $\dim(D^n) \leq n$ ,  $U$  を  $D^n$  の既約閉集合,  $T_{ij} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = x_j\}$  とする. このとき  $U \cap T_{ij}$  の各成分の次元は,  $\dim(U) - 1$  以上である.

ザリスキー幾何ではまず位相の言葉で公理が与えられる. その後で各閉集合  $C \subseteq D^n$  に対して述語記号を導入してザリスキー幾何の理論  $\text{Th}(D)$  を考える. 基本的な性質は次の2つである.

**定理 3** 1.  $\text{Th}(D)$  は強極小である.

2.  $D$  の初等拡大もザリスキー幾何である.

**注 4** 1. 公理 (Z1) は, ザリスキー幾何  $D$  にたいしてその理論  $\text{Th}(D)$  が量記号を消去すること, すなわち論理式には  $\forall, \exists$  が現れないと仮定してよいことを保証している. このことを代数の言葉で言いかえると, 「構成可能集合の射影は構成可能である」という Chevalley の定理と同値である (“Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties”, D.Mumford, Springer 1976, Proposition 2.31, p.37 参照).

2. 公理 (Z2) は, ザリスキー幾何  $D$  が強極小集合になっていることを保証している.

3. 公理 (Z3) は, ザリスキー幾何  $D$  を代数曲線とみたとき, 非特異あるいは滑らかな曲線であることを要請している. なぜなら, 特異点では次元公式が成立しないからである.

**例 5**  $K$  を微分閉体,  $D \subset K^n$  を強極小集合, すなわち Morley 階数, Morley 次数がともに 1 の定義可能集合とする. このとき必要ならば有限個の点を除くと  $D$  はザリスキー幾何になる.

### ザリスキータイプ

安定理論  $T$  においても, Morley 階数をより一般化した階数の概念を定義することができる. Morley 階数 1 の定義可能集合に相当するものとして, 極小タイプというものを考える.

**定義 6**  $\mathfrak{M}$  を  $T$  の万有モデルとする.  $p$  を完全タイプとする.  $\mathfrak{M}$  のどんな定義可能部分集合  $X$  に対しても,  $p(\mathfrak{M}) \cap X$  が有限集合か補-有限集合であるとき,  $p$  を極小タイプと呼ぶ. ここで  $p(\mathfrak{M})$  は  $\mathfrak{M}$  におけるタイプ  $p$  の解集合である.

**定義 7 (ザリスキータイプの公理)**  $P$  を極小タイプ  $p$  の  $\mathfrak{M}$  における解集合とする. 量記号と否定記号が現れない論理式で定義される  $X \subseteq P^n$  を基本閉集合系とする位相を各  $P^n$  に導入する. 次の性質が成り立つとき, タイプ  $p$  はザリスキータイプであるという.

(1)  $P^n$  の各閉集合は, 有限個の既約閉部分集合の和集合である.

(2)  $X \subset Y$  を  $P^n$  のそれぞれ閉集合とする.  $Y$  が既約ならば  $\text{RU}(X) < \text{RU}(Y)$  である.

(3)  $X$  を  $P^n$  の既約閉部分集合とする.  $\Delta_{i,j}^n = \{\bar{x} \in P^n : x_i = x_j\}$  とおく.  $\text{RU}(X) = m$  とすると,  $X \cap \Delta_{i,j}^n$  の空でない既約成分  $W$  について  $\text{RU}(W) \geq m - 1$  である.

**注 8** 1. ザリスキー・タイプを考える場合, 理論  $T$  は量化記号を消去すると仮定している.

2.  $T$  を量化記号を消去する安定理論とする.  $p$  がザリスキー・タイプであるとき, 上のように入して導入した位相に関して, 各  $P^n$  にはザリスキー位相が入る.

3.  $T$  を量化記号を消去する安定理論とする.  $p$  がザリスキー・タイプであるとき, 各  $P^n$  にはザリスキー位相が入りさらに上の性質を持つ. 「 $P$  はこの位相に関してザリスキー幾何になるか」という疑問が生じる. ザリスキー幾何の公理 (Z2) が保障されないので, 必ずしもザリスキー幾何になるとは限らない.
4.  $\text{SCF}_p$  を標数  $p$  の分離閉体の理論とする (ただし言語は環の言語より大きい).  $\text{SCF}_p$  の極小タイプはザリスキー・タイプである (Delon-Hrushovski). このことが幾何的 Mordell-Lang 予想の解決で重要な働きをする.

### 1.3 どうやって体を作るか

$D$  を豊富なザリスキー幾何とすると代数的閉体が  $D^{\text{eq}}$  に構成される. この構成法の核心部分を簡単に振り返っておこう.

技術的なポイントは「ランク 2 の群が, ランク 1 の集合に作用していると体が出来ると」という標語としてまとめることが出来る. Zil'ber の講義録 [Z04] の 74 ページを参考に仕組みを概観する.

まず既約な群に関しては, ランク 2 の群が可解群 (Cherlin), ランク 1 の群が可換群 (Reinecke) であるということが知られている.

$G = (G, \cdot, 1)$  を既約なランク 2 (RM または RU) の群,  $X$  をランク 1 の集合とする.  $G$  は中心を持たない, すなわち  $C(G) = \emptyset$  と仮定する.

交換子群  $[G, G]$  は  $G$  の正規部分群である.  $1 \neq a \in [G, G]$  とする.  $0 < \dim a^G < \dim G = 2$  より,  $\dim a^G = 1$  である.  $1 \neq b \in [G, G]$  についても同様であり, さらに

$$a^G \neq b^G \longrightarrow a^G \cap b^G = \emptyset$$

である. よって  $[G, G] - \{1\}$  の分割を考えると,

$$[G, G] - \{1\} = \bigcup_{i=1}^k a_i^G$$

となっている (つまり 1 次元の軌跡の有限和). よって  $[G, G]$  の既約成分を考えると

$$[G, G]^\circ = a^G \cup \{1\}$$

である.  $K^+ := [G, G]^\circ$  とおき,  $K^+$  の演算を加法で書く ( $G$  の 1 が  $K^+$  の単位元になっている).  $g \in G, x \in K^+$  に対して, 群  $G$  の  $K^+$  への作用,  $g^{-1}xg$  を  $gx$  と書くことにすると,  $\sigma_g : x \mapsto gx$ , は  $K^+$  の自己同型である.  $g, g' \in G$  に対して,  $g, g' \in C(a) = \{x \in G : ax = xa\}$  ならば,  $\sigma_g = \sigma_{g'}$  である.  $C(a)$  は  $G$  の正規部分群である.  $K^\times := G/C(a)$  とおく.  $K^\times$  は  $K^+ - \{1\}$  に推移的に作用している.  $K^\times$  は連結で 1 次元だから可換群 (Reinecke の定理) である.

任意の  $g, g_1, g_2 \in K^\times$  と任意の  $x \in K^+$  に対して

1.  $ga = g_1a + g_2a$  ならば  $gx = g_1x + g_2x$

2.  $g_1a = -g_2a$  ならば  $g_1x = -g_2x$

$g \in K^\times$  と  $ga (= g^{-1}ag) \in K^+ - \{1\}$  を同一視して, 乗法を  $K^\times$  から  $K^+$  へ移植することにする. こうやって  $K^+$  に 2 つの演算を導入し体にすることが出来る.

## 1.4 位相的情報から代数的情報を引き出す

問題は、どうやってザリスキー幾何の位相的情報から代数的情報を引き出すかである。

[HZ96]にある議論では、Morley列の一般化である indiscernible array という概念を導入する。ザリスキー幾何が多様であれば、この indiscernible array を用いて群図表を定義し、群図表を用いて前小節で概説した構成法を用いて体を定義する。したがって第一義的にはこの indiscernible array が位相的性質から代数的性質への橋渡しをしている。

したがってザリスキー幾何を用いて体を構成するにあたってこの部分が核心であるのだが、Zilberの講義ノート ([Z04])にある議論と [HZ96]における indiscernible array から specialization を用いて群図表 (group configuration) を作る議論との関係には、筆者にとっていまひとつ不明瞭な点がある。

## 1.5 代数的に閉じていること

豊富なザリスキー幾何において構成される体は「代数的閉体」であるが、複数の方法で証明することが出来る。

1.  $\omega$ -安定な体は代数的閉体である (Macintyre の定理) の拡張: まず完全体であることを示し、Artin-Schreier 拡大, Kummer 拡大を持たないことを示す。
2. 正標数の極小体は代数的閉体である (Wagner の定理)。
3. ザリスキー幾何における射影空間の弱完備性を応用する ([It04]).  $F$  を豊富なザリスキー幾何で構成された体とする.  $f(x) \in F[x]$  を既約多項式とする.  $f; F \rightarrow F$  を射と考える.  $f$  を  $g: \mathbb{P}^1(F) \rightarrow \mathbb{P}^1(F)$  に拡張する.  $g(F)$  が  $\mathbb{P}^1(F)$  でザリスキー稠密であるので、弱完備性より  $g(F) = F$  である. このことから  $f(a) = 0$  となる  $a \in F$  の存在を導く。

## 1.6 純粋性: $T_a = T_b$

豊富なザリスキー幾何には2つの位相が定義される。ここでは、 $D$  を豊富なザリスキー幾何とし、 $D$  で構成される代数的閉体  $F$  を考え、 $F = D$  とする。

1.  $F$  におけるザリスキー位相を  $T_a$  とする ( $a$  は algebraic の頭文字)。
2. ザリスキー幾何における、初めに与えられているネーター位相を  $T_b$  とする。

$T_a = T_b$  となることを、ここでは体の純粋性と呼ぶことにする。本質的には同じだが、2つの方法がある。Zilberの問題意識は「Chowの定理のモデル理論的定式化」にある。

### 定義 9

$T_b$  に関して既約な  $\mathbb{P}^2(F)$  の真部分閉集合を曲線と呼ぶ。

つぎの補題が重要である。

**補題 10 (Hrushovski)**  $C$  を曲線、 $L$  を代数曲線とする。  $C \subseteq L$  ならば  $C$  も代数曲線である。

この補題を使って  $T_a = T_b$  であることを次のように議論する.

- 弱完備性を用いて, Bézout の定理を導き, 曲線に関して  $T_a = T_b$  を示す. そのあと, 高次元の定義可能集合について帰納的に証明する.

## 2 講義 2 : 内的被覆と外的被覆

豊富なザリスキー幾何から, 代数的閉体が構成される. 非常に豊富なザリスキー幾何ではどうなるかということが次に問題になる.

$X$  を非常に豊富なザリスキー幾何とする.  $X$  が豊富であることから代数的閉体  $K$  が構成される. ザリスキー幾何  $X$  が非常に豊富だと  $X$  と  $K$  の間の関係は強くなり  $K$ -内的と呼ばれる関係になる. ここでは [HZ96] の 9 節を参照しながら, 「内的, 外的」という概念について考える.

**設定:**  $\omega$ -安定理論の飽和モデル  $\mathfrak{M}$  で議論する. しかし安定理論の飽和モデルでの議論に一般化することが出来る.

応用するときは,  $X$  を非常に豊富なザリスキー幾何とし, 言語は  $L_X$ , 理論  $\text{Th}(X)$  は強極小とする. また  $X$  は飽和モデルとして考える.

単にタイプといった場合, 部分タイプを意味する (論理式の無矛盾な集合). タイプ  $p$  に対して,  $p$  の  $\mathfrak{M}$  における解集合を  $p(\mathfrak{M})$  と書く. また  $C$  を定義可能集合としたとき,  $C$  を定義している論理式と  $C$  を特に区別しない.  $E$  を定義可能集合としたとき,  $E$  の一般元  $e$  をとり  $e$  の完全タイプ  $\text{tp}(e)$  を  $E$  に付随するタイプと呼ぶ.

### 2.1 外的写像, 内的タイプ

**定義 11 (外的写像, 内的タイプ)**  $A$  を有限集合とする.  $p, q$  を  $A$  上のタイプとし,  $f: p(\mathfrak{M}) \rightarrow q(\mathfrak{M})$  を  $A$ -定義可能写像とする. また  $R$  を集合とする.

1. 写像  $f$  はつぎの性質を持つとき  $R$ -外的写像と呼ばれる.  $A \subseteq B$  となる任意の有限集合  $B$  と,  $a, a' \in p(\mathfrak{M})$  に対して,

$$(a \downarrow_A B \wedge a' \downarrow_A B \wedge f(a) = f(a')) \text{ ならば } \text{tp}(a/R \cup B \cup \{f(a)\}) = \text{tp}(a'/R \cup B \cup \{f(a)\})$$

2.  $A \subseteq B$  となる有限集合  $B$  が存在して, どんな  $b, b' \in q(\mathfrak{M})$  に対しても  $b \neq_R b'$  であるとき,  $q$  は  $R$ -内的であるという.

**注 12** 内的性に関するつぎの 3 つの定義は同値である.

1. 定義 11 の 2 番
2.  $q$  が  $\text{acl}$  に関して閉じている集合上のタイプの場合. 集合  $B$  と  $a \in q(\mathfrak{M})$  が存在して,  $a \downarrow B$  かつ  $a \in \text{dcl}(B, R)$
3. ある有限集合  $B$  に対して,  $q(\mathfrak{M}) \subseteq \text{dcl}(B, R)$

**補題 13**  $A$  を有限集合とする.  $p$  を  $A$  上のタイプ,  $R$  を  $A$ -定義可能集合とする. このとき,  $A$  上のタイプ  $p^*$  と, 定義可能写像  $f: p(\mathfrak{M}) \rightarrow p^*(\mathfrak{M})$  が存在して,

1.  $p^*$  は  $R$ -内的
2.  $f$  は  $R$ -外的

である.

証明: 考えている理論が  $\omega$ -安定なので,  $a \in p(\mathfrak{M})$  とすると,  $A$  上  $R$ -内的タイプ  $p^*$  と  $a^* \in p^*(\mathfrak{M}) \cap \text{dcl}(a)$  が存在して

$$q \text{ が } A \text{ 上 } R\text{-内的タイプで } b \in q(\mathfrak{M}) \cap \text{dcl}(a) \text{ ならば } b \in \text{dcl}(a^*) \quad (1)$$

が成り立つ.  $a^* \in \text{dcl}(a)$  なので,  $a^* = f(a)$  となる定義可能写像  $f: P \rightarrow P^*$  を考える. この  $f$  が  $R$ -内的であることを示す.  $p(\mathfrak{M})$  上の同値関係  $E_0, E, E^*$  を次のように定義する.

$$E_0: aE_0a' \iff f(a) = f(a')$$

$$E: aEa' \iff \left( f(a) = f(a') \text{ かつ任意の } B \perp_A \{a, a'\} \text{ に対して,} \right. \\ \left. \text{tp}(a/B \cup R \cup \{f(a)\}) = \text{tp}(a'/B \cup R \cup \{f(a)\}) \right)$$

$$E^*: aE^*a' \iff \left( f(a) = f(a') \text{ かつ } \text{tp}(a/\text{acl}(f(a))) = \text{tp}(a'/\text{acl}(f(a))) \right)$$

今理論は  $\omega$ -安定だから同値関係  $E^*$  は定義可能であり,  $E_0$  の各同値類を有限個に細分している. ここで  $B \perp_A a$  ならば  $a \perp_{A \cup \{f(a)\}} B \cup R$  である. (この部分非自明) よって,  $f(a) = f(a')$  かつ  $\text{tp}(a/\text{acl}(f(a))) = \text{tp}(a'/\text{acl}(f(a)))$  ならば,  $\text{tp}(a/B \cup R \cup \{f(a)\}) = \text{tp}(a'/B \cup R \cup \{f(a)\})$  である. したがって  $aE^*a'$  ならば  $aEa'$  である. これで3つの同値関係の間に

$$E^* \subseteq E \subseteq E_0$$

という関係が成り立っていることが分かった.  $E$  は定義可能であり,  $E_0$  の各同値類を有限個に細分している.  $f$  を同値関係  $E$  で考えた写像を  $f_E$  と書く. つまり  $aEa'$  のとき  $f_E(a) = f_E(a')$  である.  $a \in p(\mathfrak{M})$  に対して  $\text{tp}(f_E(a)/A)$  を  $p_E$  と書く.

主張: タイプ  $p_E$  は  $R$ -内的である. まず  $E$  は  $E_0$  の細分になっているので,  $f = g f_E$  となる写像  $g$  が存在する.  $a_E \in p_E$  をひとつとる.  $b = g(a_E)$  とおく. 有限集合  $B$  で

- $p^* \subseteq \text{dcl}(B, R)$ ,  $b \perp_A B$
- $g(c) = b$  かつ  $c \neq a_E$  ならば  $\text{tp}(c/B \cup R \cup \{b\}) \neq \text{tp}(a_E/B \cup R \cup \{b\})$

を満たすものが存在する. ここで  $c$  の可能性は有限個あり, 各々の  $c$  に対して上の性質を持つ  $B$  が存在することに注意しよう. よって,

$$b \in p^*(\mathfrak{M}) \subseteq \text{dcl}(B, R) \text{ かつ } g^{-1}(b) \subseteq \text{acl}(b)$$

である. ゆえに,

$$b_1 \neq b_2 \in g^{-1}(b) \longrightarrow \text{tp}(b_1/B \cup R \cup \{b\}) \neq \text{tp}(b_2/B \cup R \cup \{b\})$$

である. したがって  $g^{-1}(b) \in \text{dcl}(B, R)$  であるので  $a_E \in \text{dcl}(B, R)$  である. よってタイプ  $p_E$  は  $R$ -内的である.

したがって性質 (1) より,  $f_E(a) \in \text{dcl}(f(a))$  である. したがって  $g$  は 1-1 であり, 実は  $E = E_0$  であることが分かる. よって  $f$  は  $R$ -外的である.

証明終



系 14  $X$  を豊富なザリスキ幾何とし,  $K$  を  $X$ -多様体としての代数的閉体とする. このときつぎの性質をみたす  $K$ -内的被覆  $P$  が存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{ここは } K\text{-外的写像}} & P \\ & & | \quad P \text{ は } K\text{-内的被覆} \\ & & K \end{array}$$

定義 15  $P$  を  $A$  上のタイプとする.  $a_1, \dots, a_n \in P(\mathfrak{M})$  とする.

$$\text{tp}(a_1/\text{acl}(A)) = \dots = \text{tp}(a_n/\text{acl}(A)), \text{ かつ } a_1, \dots, a_n \text{ は } A \text{ 上独立}$$

であるとき  $(a_1, \dots, a_n)$  の  $A$  上のタイプを  $[P]^n$  と書く.

補題 16  $f: P \rightarrow Q$  を  $R$ -外的写像する.  $f$  によって定まる  $[P]^n$  から  $[Q]^n$  への写像を  $f^{[n]}$  と書く. このとき  $f^{[n]}$  は  $R$ -外的写像である.

証明:  $n = 2$  のときを示す.  $a = (a_1, a_2) \in [P]^2$  とし  $A \subseteq B$  を考える. ただし  $a \perp_A B$  とする.  $f^{[2]}(a) = c = (c_1, c_2) \in [Q]^2$  とおく.  $\text{tp}(a/B \cup R)$  が  $c$  だけに依存することを示せばよい.

さて,  $f$  は  $R$ -外的写像だから  $\text{tp}(a_2/B \cup R \cup \{c_2\})$  は  $c_2$  だけに依存する.  $B' = B \cup \{a_2\}$  とおく.  $a_1 \perp_A B'$  だから  $\text{tp}(a_1/B')$  は  $c_1$  だけで決まる. よって  $\text{tp}(a/B \cup R)$  は  $c$  だけで決まる.

一般の  $n$  についても同様に証明できる.

証明終

## 2.2 外的写像の性質

外的写像に関するつぎの定理は基本的である.

定理 17  $P, P^*, E, C$  を  $A$  上の完全タイプ,  $f: P \rightarrow P^*$  を  $R$ -外的写像とする. つぎの4つの仮定が成り立っているとす.

1.  $E \subseteq \text{acl}(R)$
2.  $C \subseteq E \times P$
3. 各  $e \in E$  に対して  $C(e)$  は強極小
4. 各  $e \in E$  に対して  $[P]^2 \cap C(e)^2 \neq \emptyset$

このとき,  $f$  は各  $C(e)$  上で定数関数であるか, または有限-1である. また各  $e \in E$  に対して

$$C(e) = f^{-1}fC(e)$$

である.

証明:  $e \in E$  を任意の点とし  $f$  は  $C(e)$  で定数関数でないとする.  $C(e) \subseteq P$  だから  $x, y \in C(e)$  に対して,

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

によって同値関係を定義すると,  $C(e)/\sim$  は2つ以上の同値類を持つ. 仮定3より  $C(e)$  は強極小だから  $C(e)/\sim$  は高々1個の無限同値類しか持てない.

さて  $C(e)$  は  $e$  上の完全タイプに拡張されるから、もし  $C(e)/\sim$  に無限同値類があると  $C(e)$  のすべての元はこの無限同値類に入ってしまうことになる。これは  $f$  が  $C(e)$  で定数関数でないという仮定に反する。よって  $C(e)/\sim$  のすべての同値類は有限でなければならない、よって  $f$  は  $C(e)$  上で有限 - 1 である。したがって  $f$  による  $C(e)$  の像  $fC(e)$  も  $C(e)$  同様に強極小である。

各  $C(e)$  が強極小であることから、つぎの性質をもつ自然数  $N$  が  $C$  だけに依存して決まる。任意の  $e \neq e'$  に対して、

$$|C(e) \cap C(e')| \leq N \text{ または } (|C(e) - C(e')| \leq N \text{ かつ } |C(e') - C(e)| \leq N)$$

ここで実は  $|C(e) \cap C(e')| \leq N$  の場合だけを考えても一般性を失わないことを示そう。

同値関係  $e \sim e'$  を  $|C(e) - C(e')| \leq N$  かつ  $|C(e') - C(e)| \leq N$  によって定義する。  $E^* = E/\sim$ ,  $e^* = e/\sim$  とおく。このときタイプ  $C^* \subseteq E^* \times P$  が存在して、集合  $C(e)$  と  $C(e')$  は有限個の点を除いて一致する。集合  $C(e)$  のすべての点は  $e$  上同一のタイプを持つので、  $C(e) \subseteq C^*(e^*)$  である。よって各  $e \in E$  に対して  $[P]^2 \cap C^*(e^*) \neq \emptyset$  が成り立つ。  $f$  は  $C(e)$  上で有限 - 1 なので、  $f$  は  $C^*(e^*)$  上有限 - 1 である。したがって  $C^*(e^*) = f^{-1}C^*(e^*)$  であることが証明できれば、ほとんどすべての  $b \in C(e)$  に対して  $f^{-1}(fb) \subseteq C(e)$  であることが分かる。なぜなら  $C(e)$  のすべての点は  $e$  上同一タイプを持つので、任意の  $b \in C(e)$  に対して  $f^{-1}(fb) \subseteq C(e)$  となつて  $C(e) = f^{-1}fC(e)$  となるからである。

したがって  $C$  を  $C^*$  で置き換えることによって、常に

$$e \neq e' \rightarrow |C(e) \cap C(e')| \leq N$$

が成り立っているとしてよい。

集合  $E$  上の同値関係  $e \equiv_R e'$  を  $\text{tp}(e/R) = \text{tp}(e'/R)$  によって定義する。仮定より  $E \text{acl}(R)$  だったので  $\equiv_R$  の各同値類は有限である。  $e_R = (e/\equiv_R)$  とおく。  $fC(e)$  は  $e_R$  によって決まる。さらに  $E_R = \{e_R : e \in E\} \subseteq \text{dcl}(R)$  である。

**主張:**  $C(e)$  の一般点  $a$  に対して、  $e \in \text{dcl}(e_R, a)$  である。これを示すために、  $a \in C(x)$  かつ  $x_R = e_R$  ならば  $x = e$  であることを示そう。いま  $e'_R = e_R$  かつ  $a \in C(e')$  とし  $e \neq e'$  だったとす。  $C(e) \cap C(e')$  は有限集合だから  $a \in \text{acl}(e, e') = \text{acl}(e_R)$  となつて  $a$  が  $C(e)$  の一般点であることに反する。

写像  $f$  は  $R$ -外的写像だから  $\text{tp}(a/f(a)) \vdash \text{tp}(a/f(a), e_R)$  である。  $a \in C(e)$  ならば、  $a \in \text{acl}(e, f(a)) = \text{acl}(e_R, f(a))$  だから、  $a \in \text{acl}(f(a))$  である。したがって、  $f$  は  $C(e)$  上で有限 - 1 であったが、  $f$  は  $p$  全体で有限 - 1 である。

集合  $f^{-1}fC(e)$  のモーレー階数は 1 であり、  $C(e')$  の形の曲線を有限個しか含まない。  $b, b' \in C(e)$  とし  $(b, b') \in [p]^2$  とする。  $b'' \in f^{-1}f(b')$  を  $b'' \notin C(e)$  となるようにとる。  $\text{acl}(b') \text{acl}(b'')$  だから  $(b, b'') \in [p]^2$  である。よって補題 16 より、  $\text{tp}(b, b'/e_R) = \text{tp}(b, b''/e_R)$  である。よって  $\text{tp}(b'/b, e_R) = \text{tp}(b''/b, e_R)$  が得られ、  $\text{tp}(b/e) = \text{tp}(b''/e)$  となる。したがって  $b'' \in C(e)$  であることがわかった。  $b''$  は  $f^{-1}f(b')$  の任意の点だから

$$f^{-1}f(b') \subseteq C(e)$$

である。  $C(e)$  のすべての点  $x$  に対して  $\text{tp}(x/e) = \text{tp}(b'/e)$  だから

$$f^{-1}fC(e) \subseteq C(e)$$

である。

証明終

### 2.3 曲線による2点の識別

$p$  上任意の2点を通る曲線族があつて、さらに  $p$  の各点は曲線によって識別されているとする。各点を識別する曲線は  $p^*$  への射影によって決まるということを主張するのが定理 17 の内容である。よつて曲線族は  $p^*$ -内的である。したがつて曲線族が  $p$  の各点を識別していれば  $p$  は  $R$ -内的である。

この結果を非常に豊富なザリスキー幾何に応用する場合もうすこし議論が必要である。というのは非常に豊富なザリスキー幾何において、各点を識別する曲線族の添字集合は既約閉集合であるが、定理 17 では完全タイプだからである。

非常に豊富なザリスキー幾何の性質

$$\text{任意の } a, b \in X^2 \text{ に対して } e \in E \text{ が存在して } C(e) \text{ は } a, b \text{ の一方だけを通る} \quad (2)$$

に対して、 $E^*$  を  $E$  から決まる完全タイプとしたとき、

$$\text{異なる一般点 } a, b \in X^2 \text{ に対して } e \in E^* \text{ が存在して } C(e) \text{ は } a, b \text{ の一方だけを通る} \quad (3)$$

が成り立っていることを確認しなければならない。

**補題 18**  $D$  をザリスキー幾何とする。  $X \subseteq D^m, Y \subseteq D^n$  とし  $C \subseteq X \times Y$  を既約閉集合とする。いま  $C$  の  $D^m$  への射影が  $X$  のなかで稠密であり、 $D^n$  への射影が  $Y$  で稠密であると仮定する。  $F$  を  $Y$  の真部分閉集合とする。このとき一般点  $a \in X$  に対して、 $C(a)$  のどのような既約成分も  $F$  に含まれてしまうことはない。

**証明** :  $a \in X$  を一般点とし、

$$U = \bigcup C_i, C_i \text{ は } C(a) \text{ の既約成分で } C_i \not\subseteq F$$

とおく。  $C_i$  は有限個しかないから  $U$  は閉集合である。また  $\sigma \in \text{Aut}(D/a)$  に対して  $\sigma C_i = C_i$  である。よつてザリスキー幾何の性質から、 $U = C^*(a)$  となる既約閉集合  $C^* \subseteq D^m \times D^n$  が存在する。  $C^*$  を  $C^* \cap C$  で置き換えて、一般点  $a$  に対して、 $C(a) \subseteq C^*(a) \cup F$  だとする。よつて

$$C \subseteq C^* \cup (X \times F) \cup (F' \times Y)$$

となる閉集合  $F \subset X$  が存在する。  $C$  は既約だから、 $C \subseteq C^*, C \subseteq X \times F$  または  $C \subseteq F' \times Y$  のどれか1つが成り立っている。仮定から  $C$  の  $X$  への射影と  $Y$  への射影はそれぞれ稠密な集合になっているから、 $C \subseteq C^*$  だけが成り立っていることが分かる。よつて

$$C(a) = C^*(a) = U$$

である。よつて  $C(a)$  のどの既約成分も  $F$  に含まれてしまうことはない。

**証明終**

**補題 19**  $E$  を 0-定義可能な既約閉集合とし  $E^*$  を  $E$  によって決まる完全タイプとする。  $C \subseteq E \times Y$  を既約閉集合とする。このとき、異なる一般点  $a, b \in Y$  に対して  $C(a) \neq C(b)$  とすると、 $C(a) \cap E^* \neq C(b) \cap E^*$  である。

証明：対偶を示す。  $C(a) \cap E^* = C(b) \cap E^*$  となる一般点  $a, b \in Y$  があったとする。  $E$  の部分集合になっている 0-閉集合  $F$  で  $C(a) - F = C(b) - F$  となっているものが存在する。 よって  $C(a) \subseteq C(b) \cup F$  である。 補題 18 より  $C(a)$  の既約成分は  $F$  の部分集合になっていないから、  $C(a)$  のすべての既約成分は  $C(b)$  に含まれている。 よって  $C(a) \subseteq C(b)$  である。 同様に  $C(b) \subseteq C(a)$  も分かるから、  $C(a) = C(b)$  である。 証明終

補題 20  $Y$  は既約閉集合で  $\dim(Y) = 2$  とし  $C \subseteq E \times Y$  はつぎの性質を持つ。

1. 各一般点  $e \in E$  に対して  $C(e)$  は既約閉集合で  $\dim C(e) = 1$
2. 異なる一般点  $e, e'$  に対して  $C(e) \neq C(e')$
3. 一般点  $(y_1, y_2) \in Y$  に対して  $e \in E$  が存在して  $y_1, y_2 \in C(e)$

このとき一般点  $(y_1, y_2)$  に対して  $e \in E^*$  が存在して  $y_1, y_2 \in C(e)$  である。

証明：仮定からまず  $\dim(E) \geq 2$  が分かる。 なぜなら、もし  $\dim(E) = 1$  とすると、  $y_1, y_2 \in C(e)$  に対して  $e \in \text{acl}(y_1)$  だから

$$\text{RM}(y_2) = \text{RM}(y_2/y_1) \leq \text{RM}(y_2/e) \leq 1$$

となって矛盾する。 よって  $\text{RM}(E^*) \geq 2$  である。 矛盾を導くために、一般点  $(y_1, y_2) \in Y$  に対して、  $y_1, y_2 \in C(e)$  となる  $e \in E^*$  がなかったとする。 そうすると  $e \in E^*$  と一般点  $y_1 \in C(e)$  に対して、すべての  $y_2 \in C(e)$  は

$$y_2 \in C_0(y_2) \subseteq Y$$

を満たす。 ただし  $C_0$  は 0-定義可能閉集合であらう。  $\dim C_0(y_2) = 1$  だから  $C(e')$  の形の異なる集合を有限個しか含まない。 つまり  $e \in \text{acl}(y_2)$  ということになる。 よって  $\text{RM}(e) + \text{RM}(y/e) = \text{RM}(y)$  となり  $\text{RM}(e) \leq 1$  となって矛盾する。 証明終

### 3 講義 3 : 定理 A

#### 3.1 豊富なザリスキー幾何, 非常に豊富なザリスキー幾何

豊富なザリスキー幾何には代数的閉体が入るが, さらに射影直線とも関係が深い.

**定理 21** ([It04], 定理 8 参照)  $D$  を豊富なザリスキー幾何とする. このとき代数的閉体  $K$  と  $D$  から  $\mathbb{P}^1(K)$  の上へのザリスキー写像  $f$  が存在する.

この定理の証明に必要な主な性質は, ザリスキー幾何における「射影空間の弱完備性」と, 「弱い仮想元消去」である.

#### 3.2 正規化による特異点除去

代数曲線の特異点除去としては, 「ブロー・アップ」が知られているが, 「正規化」も有用である (ただし正規化によって特異点が除去されるのは多様体の次元が 1 すなわち曲線の場合だけである).

**例 22** ([Cu04], p. 10)  $K$  を体とし,  $K$  上で  $y^2 - x^3 = 0$  を考える. 座標環  $R = K[x, y]/(y^2 - x^3)$  の商体を  $L$  とすると,  $L$  では  $(\frac{y}{x})^2 - x = 0$  なので,  $\frac{y}{x}$  は  $R$  上整である.  $R[\frac{y}{x}] = K[\frac{y}{x}]$  は正規環 (極大イデアルが 1 個) だから,  $R[\frac{y}{x}]$  は  $L$  中での  $R$  の整閉包になっている. よって

$$\text{spec}\left(R\left[\frac{y}{x}\right]\right) \rightarrow \text{spec}(R)$$

は特異点の解消である.

#### 3.3 滑らかな曲線としてのザリスキー幾何

**定理 A**  $X$  を非常に豊富なザリスキー幾何とする. このとき代数的閉体  $K$  と  $K$  上の滑らかな代数曲線  $D$  が存在して  $X$  と  $D$  はザリスキー幾何として同型である.

**証明**: 第一段階:  $X$  が  $K$ -内的であること. ザリスキー幾何が非常に豊富であるということを用いて,  $X$  が  $K$ -内的であることを示す. 系 14 より, まずつぎの図式が成り立つことを確認する. これは豊富なザリスキー幾何で成り立っている. 豊富なザリスキー幾何の性質を用いて,  $X$  が  $K$ -内的であることを示す.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{ここは } K\text{-外的写像}} & P \\ & & | \quad P \text{ は } K\text{-内的被覆} \\ & & K \end{array}$$

$X$  が非常に豊富なザリスキー幾何であるので,  $X$ -多様体としての代数的閉体  $K$  が存在する. また  $C \subset E \times X^2$  となる  $C, E$  が存在する.  $E$  は既約閉集合で,  $C$  はつぎの 2 つの性質を持っている.

- (i) 一般点  $a, b \in X^2$  に対して  $e \in E$  が存在して, 曲線  $C(e)$  は  $a, b$  を通る.
- (ii) 任意の  $a, b$  に対して  $e \in E$  が存在して, 曲線  $C(e)$  は  $a, b$  の一方のみ通る.

講義 2 の結果から, 既約閉集合  $E$  に付随するタイプ  $E^*$  に対して, (ii) を

(ii) 異なる一般点  $a, b \in X^2$  に対して  $e \in E^*$  が存在して、曲線  $C(e)$  は  $a, b$  の一方のみ通る。の形にすることが出来る。また、ザリスキー幾何の仮想元消去を用いて次の

(iii)  $e \neq e' \in E$  ならば  $C(e) \neq C(e')$

が成り立っていると仮定する。さて  $f: X \rightarrow P$  が  $K$ -外的だから、補題 16 より  $f^{[2]}: X^{[2]} \rightarrow P^{[2]}$  も  $K$ -外的である。  $C^*$  を  $C$  に付随するタイプとすると、

$$C^* \subset E^* \times [X]^2$$

である。さらに、 $e \in E^*$  とすると  $C(e)$  は  $C^*(e)$  の閉包になっている。定理 17 より、

$$e \in E^* \text{ ならば } C^*(e) = f^{-1}fC^*(e)$$

なので、 $e \neq e' \in E^*$  とすると、(iii) より

$$C(e) \neq C(e') \text{ よって } C^*(e) \neq C^*(e') \text{ したがって } fC^*(e) \neq fC^*(e')$$

これは  $e$  と  $e'$  が  $P$  上共役でないことを意味する。なぜなら、 $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{M}/P)$  とすると  $fC^*(e) \subseteq P$  だから

$$fC^*(e') = fC^*(\sigma e) = \sigma fC^*(e) = fC^*(e)$$

となるからである。したがって  $E^* \subseteq \text{dcl}(P)$  となる。  $P$  は  $K$ -内的だから  $E^*$  も  $P$ -内的である。

$a \neq b \in X^2$  とする。性質 (ii) より、 $a \in C(e)$  かつ  $b \notin C(e)$  となる  $e \in E^*$  が存在する。  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{M}/P)$  に対して  $\sigma e = e$  だから  $\sigma a \neq b$  である。したがって任意の  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{M}/P)$  は  $X^2$  の各点を動かさない。よって  $X \subseteq \text{dcl}(P)$  となり、 $X$  が  $K$ -内的であることが分かる。

**第二段階:**  $X$  は  $K$ -内的だから、 $X$  の一般点  $a$  に対して  $b \in K^n$  となる  $b$  が存在する。ここで  $n$  は  $a$  によって決まる正整数である。よってザリスキー幾何  $X$  の意味で 0-定義可能な関数  $h$  が存在して  $a = h(b)$  となる。  $K^n$  上の同値関係  $E$  を、

$$b E b' \iff h(b) = h(b')$$

によって定義する。  $h$  の性質から、 $E$  はザリスキー幾何  $X$  の意味で構成的である。  $T_a = T_b$  より  $K$  の意味、つまり代数幾何の意味でも構成的である。  $b' = b/E \in K^{eq}$  とおくと、 $\text{dcl}(a) = \text{dcl}(b')$ 。  $K$  に対する仮想元消去より、 $K$ -多様体、すなわち代数多様体  $V$  と  $b'' \in V$  が存在して、 $\text{dcl}(b') = \text{dcl}(b'')$  である。ここで  $\text{rk}(b'') = \text{rk}(a)$  に注意しよう。  $V$  における点  $b''$  の、 $\text{acl}(\emptyset)$  上の軌跡、つまり  $b''$  を含む既約閉集合を考えて  $\dim(V) = 1$  とする。つまり  $b''$  を通る既約な曲線として  $V$  を考えている。  $V$  は特異点を持っているかもしれないので、正規化して  $V$  は特異点の無い完備な曲線だとする。

点  $(a, b'') \in X \times V$  の  $\text{acl}(\emptyset)$  上の軌跡を  $H$  とする。  $H$  は  $X \times V$  の既約閉集合で、 $\dim(H) = 1$  である。一般点  $x \in X$  に対して、 $(x, v) \in H$  となる  $v \in V$  がちょうど一個存在する。また、一般点  $v \in V$  に対して、 $(x, v) \in H$  となる  $x \in X$  がちょうど一個存在する。

一方、任意の  $x \in X$  に対しては、 $(x, v) \in H$  となる  $v \in V$  は高々一個しか存在しない。また、任意の  $v \in V$  に対して、 $(x, v) \in H$  となる  $x \in X$  も高々一個しか存在しない。多様体  $V$  は  $\mathbb{P}^3(K)$  に埋め込めるので、

$$H \subseteq X \times V \subseteq X \times \mathbb{P}^3(K)$$

である。ザリスキー幾何  $X$  の弱完備性により  $H$  は  $X$  の上へ射影される。  $H$  の  $V$  への射影  $\pi_V(H)$  を  $D$  とおく。  $D$  は  $V$  の補一有限な部分集合になる。したがって  $H$  は  $X$  から  $D$  への射 (morphism) であり、写像としては全単射になっているもののグラフである。

証明終

## 4 今後への展望

今後どのような方向に進むことが可能かを考えてみる.

1. 高次元のザリスキー幾何
2. 解析的ザリスキー幾何

ザリスキー幾何というのは、代数曲線の持つ位相的性質を公理化し、モデル理論を駆使して体を構成するということが核心部分である。体を構成する技法はすでに存在していたが、この方法は対象の次元に依存するところが大きい。したがって高次元に拡張するのは容易ではないと予想される。

それに反して解析的ザリスキー幾何には大いなる可能性を見出すことが出来そうである。実際、Zilber はここ数年「幾何的ザリスキー幾何」の枠組み構築を試みている。

## 参考文献

- [Cu04] S. D. Cutkosky, *Resolution of Singularities*, Grad. Studies in Math. vol. 63, A. M. S., 2004
- [Hr96] E. Hrushovski, *The Mordell-Lang conjecture for the function fields*, J of the A.M.S., Vol. 9, No. 3, pp. 667-690, 1996
- [HZ96] E. Hrushovski, B. Zil'ber, *Zariski Geometries*, J of the A.M.S., Vol.9, No.1, pp. 1-56, 1996
- [It02] 板井 昌典, 『幾何的モデル理論入門』, 日本評論社, 2002
- [It03] 板井 昌典, ザリスキータイプの幾何: 豊富な幾何上での代数的閉体の構成, 京都大学数理解析研究所 講究録 1344, 1-6, 2003年10月
- [It04] 板井 昌典, ザリスキータイプの幾何(2): Bézout の定理, Chow の定理, そして主定理, 京都大学数理解析研究所 講究録 1390, 23-29, 2004年7月
- [Z04] B. Zil'ber, *Notes on Zariski Geometries*, Oxford 大学における講義のためのノート