

Siegel の定理の証明に使われる超準モデル

東京大学・大学院 数理科学研究科 村上 雅彦 (Masahiko Murakami)
 Graduate School of Mathematical Sciences,
 The University of Tokyo

1 はじめに

A. Robinson と P. Roquette は [1] において Siegel の定理: 代数体 K において種数 $g > 0$ の既約な代数曲線上には代数的整数による格子点があっても有限個である; の K. Mahler らによる一般化された定理を超準解析で用いられている超準モデルを利用した証明を示した.

ここでは, 超準モデルの紹介と超準モデルの言葉による Siegel-Mahler の定理の書き換え (定理 2) について述べる.

2 Siegel-Mahler の定理

ここでは, 超準モデルにおいて扱いやすいように Siegel-Mahler の定理を形式的に論理式より表記する.

以下では, K を代数体, $f \in K[X, Y]$ を種数 $g > 0$ の既約な多項式, Γ を f による集合としての代数曲線, すなわち

$$\Gamma = \{(x, y) \in K \times K \mid f(x, y) = 0\}$$

とする. また, K の素因子全体の集合を V とする. 素因子 \mathfrak{p} による $x \in K$ の正規付値を $\|x\|_{\mathfrak{p}}$ と表記し, $\gamma = (x, y) \in K \times K$ に対しては $\|\gamma\|_{\mathfrak{p}} = \max\{\|x\|_{\mathfrak{p}}, \|y\|_{\mathfrak{p}}\}$ と表記する.

有限個の素因子 $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in V$ における分母を許した格子点 $\gamma \in K \times K$ とは $\mathfrak{p} \in V$ が $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ のどれでもないとき $\|\gamma\|_{\mathfrak{p}} \leq 1$ となることをいう. 例えば, K が有理数体であり, \mathfrak{p}_1 は Archimedes 付値である絶対値の同値類, \mathfrak{p}_2 は 2-進絶対値の同値類, \mathfrak{p}_3 は 3-進絶対値の同値類であるとき, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ における分母を許した格子点は有理整数 i, j, m により $(\frac{i}{6^m}, \frac{j}{6^m})$ となる点である.

定理 1 (Siegel-Mahler). 代数曲線 Γ 上には有限個の素因子 $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in V$ における分母を許した格子点があっても有限個である. すなわち, V の有限部分集合 \mathcal{S} について

$$\neg \exists^{\omega} \gamma \in \Gamma \quad \forall \mathfrak{p} \in V \setminus \mathcal{S} \quad \|\gamma\|_{\mathfrak{p}} \leq 1$$

である。ここで量記号 $\exists^{\geq \omega}$ は、式を満たす無限個の $\gamma \in \Gamma$ があるという略記である。

定理は、 γ が存在することを主張しているのではなく、(有限個しか) 存在しないことを主張しているので、このように否定が前置された論理式となるのが自然である。

A. Robinson と P. Roquette による証明は、定理の結論の否定、すなわち、無限個の $\gamma \in \Gamma$ があるという論理式

$$\exists^{\geq \omega} \gamma \in \Gamma \quad \forall \mathfrak{p} \in V \setminus S \quad \|\gamma\|_{\mathfrak{p}} \leq 1 \quad (*)$$

から次節で述べる超準モデルを用いて導かれる論理式の否定を示すことに帰着されている。

Siegel の定理は、この Siegel-Mahler の定理において S を無限素因子全体とすることで得られる。なぜなら、代数体 K の無限素因子、すなわち Archimedes 付値の同値類は有限個しかないからである。

3 Enlargement

すべての数学的対象は集合であり、所属関係 $\bullet \in \bullet$ だけですべての数学的記述がなされる。

まず、定理の証明において必要になるであろうものすべて持っている十分大きな全体集合 U を用意する。

各複素数も集合であるが、集合としての内部の構造には興味がないので、点集合 C に函数としての和や積などが与えられたものとみなしたい。例えば、 C の部分集合である実数体の集合 \mathbb{R} が複素数であるというような状況 $\mathbb{R} \in C$ は起こってほしくない。

このような望まない状況が起こらないために C と U を以下の 1-4 を満たすものとする。

1. $z \in C$ ならば $z \cap U = \emptyset$ であり、 $\emptyset \notin C$.
2. $C \in U$.
3. $x \in U \setminus C$ ならば $x \subseteq U$.
4. $x \in U \setminus C$ ならば $\mathcal{P}(x) \in U$, ここで $\mathcal{P}(x)$ は x の冪集合である。

$\mathbb{R} \in C$ などとはならないことは 1 から導かれる。また、このような C, U は集合論の議論により存在することが示される。

3 及び 4 によって、代数体 $K, K \times K$, 代数曲線 Γ , 素因子 \mathfrak{p} , 素因子全体の集合 V などなどは U の元となる。

写像 $U \rightarrow I, a \mapsto *a$ が *Enlargement* であるとは次の 1, 2 を満たすときをいう。

1. (移行の原理) 自由変数が x_1, \dots, x_m だけである論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ について

$$\mathbb{U} \models \varphi(a_1, \dots, a_m) \iff \mathbb{I} \models \varphi(*a_1, \dots, *a_m).$$

2. 無限集合 $A \in \mathbb{U} \setminus \mathbb{C}$ について $\{ *x \mid x \in A \} \subseteq \{ y \mid \mathbb{I} \models y \in *A \}$.

Enlargement $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{I}$ の存在は, 超冪という手段により示される. さらに, $*\mathbb{C}$ を \mathbb{C} の拡大体としたいので,

3. $z \in \mathbb{C}$ について $*z = z$ であり, $n \in \mathbb{N}$ と $\mathbb{I} \models R \subseteq *(C^n)$ なる R について $R = \{ z \mid \mathbb{I} \models z \in R \}$.

となることを要請する. 3 により 2 は $\mathbb{N} \subseteq *\mathbb{N}$ となることと同値となる.

定義. 集合 a が \mathbb{I} の元であるとき *internal* という. internal でない集合を *external* という. internal な a が *standard* であるとは a が写像 $*$ の値域に属していることをいう. standard でない internal な集合は *nonstandard* という.

以上により \mathbb{I} において新述語 “standard である” を導入し, 量記号 \forall^{nonst} , \exists^{nonst} をそれぞれ

$$\mathbb{I} \models \forall^{\text{nonst}} x \varphi(x) \quad \text{“すべての nonstandard な } x \text{ について } \varphi(x)\text{”},$$

$$\mathbb{I} \models \exists^{\text{nonst}} x \varphi(x) \quad \text{“}\varphi(x)\text{ となる nonstandard な } x \text{ がある”}$$

と定める.

Enlargement の性質 2 により無限集合 $A \in \mathbb{U} \setminus \mathbb{C}$ は真に拡大され $\mathbb{I} \models x \in *A$ なる nonstandard な x がある. 有限集合 $B \in \mathbb{U} \setminus \mathbb{C}$ については B の元の個数に関する帰納法により $\mathbb{I} \models x \in *B$ なる x は standard となる. よって, 次の性質が導かれる.

$$\mathbb{U} \models \exists^{\geq \omega} x \varphi(x, a_1, \dots, a_m) \iff \mathbb{I} \models \exists^{\text{nonst}} x \varphi(x, *a_1, \dots, *a_m).$$

4 超準モデルにおける Siegel-Mahler の定理

第 2 節の論理式 (*) を \mathbb{I} に移行して変形していく. まず, 無限個の存在と nonstandard なものの存在は同値であったので,

$$\mathbb{I} \models \exists^{\text{nonst}} \gamma \in * \Gamma \quad \forall \mathfrak{p} \in *V \setminus *S \quad \|\gamma\|_{\mathfrak{p}} \leq 1$$

となる. 厳密には γ と \mathfrak{p} に対して $\|\gamma\|_{\mathfrak{p}}$ を対応させる写像と不等号 \leq にも $*$ が付くのであるが省略してある. $*1 = 1$ であったので 1 には $*$ は不要である.

さらに S は有限集合であったので論理式 (*) の仮定の下

$$\mathbb{I} \models \exists^{\text{nonst}} \gamma \in {}^* \Gamma \forall^{\text{nonst}} \mathfrak{p} \in {}^* V \|\gamma\|_{\mathfrak{p}} \leq 1$$

が導かれる。よって、この否定

$$\mathbb{I} \models \forall^{\text{nonst}} \gamma \in {}^* \Gamma \exists^{\text{nonst}} \mathfrak{p} \in {}^* V \|\gamma\|_{\mathfrak{p}} > 1 \quad (**)$$

が示されれば、Siegel-Mahler の定理が示されたことになる。

$\mathbb{I} \models \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in {}^* \Gamma$ なる nonstandard な γ について考える。II の性質 3 により $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in {}^* K \times {}^* K$ である。そこで

$$F = K(\gamma_1, \gamma_2) = \{ {}^* \alpha(\gamma_1, \gamma_2) \mid \alpha \in K[X, Y] \}$$

とすると、 F は K と ${}^* K$ の間の中間体である。ただし F は external である。

γ_1, γ_2 のどちらかは nonstandard であり、 $K = \mathbb{C} \cap {}^* K$ であることから γ は ${}^* \Gamma$ の generic な点、すなわち $\alpha \in K[X, Y]$ が ${}^* \alpha(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ であれば $f \mid \alpha$ である。よって、函数体 F の元 ${}^* \alpha(\gamma_1, \gamma_2) / {}^* \beta(\gamma_1, \gamma_2)$ に対して $K(\Gamma)$ の元 $\frac{\alpha + (f)}{\beta + (f)}$ が定まり、この対応が F と $K(\Gamma)$ の同型を与え、 Γ の種数と F/K の種数は一致する。

さて、次の定理から Siegel-Mahler の定理が導かれることを示す。

定理 2. $K \subseteq F \subseteq {}^* K$ なる K 上の 1 変数代数函数体 F について F/K の種数 $g > 0$ ならば、

$$\forall x \in F \setminus K \quad \mathbb{I} \models \exists^{\text{nonst}} \mathfrak{p} \in {}^* V \quad \|x\|_{\mathfrak{p}} > 1.$$

この定理から論理式 (**) を導けばよい。II における nonstandard な点 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ に対して $F = K(\gamma_1, \gamma_2)$ とすると前述のことから F/K の種数 g は f の種数と一致し $g > 0$ である。そこで、定理 2 を適用する。 x を γ_1 または γ_2 とすると II における ${}^* K$ の素因子 \mathfrak{p} があり $\mathbb{I} \models \|x\|_{\mathfrak{p}} > 1$ である。 $\|(\bullet, \bullet)\|_{\mathfrak{p}}$ の定義から $\mathbb{I} \models \|\gamma\|_{\mathfrak{p}} \geq \|x\|_{\mathfrak{p}}$ であったので $\mathbb{I} \models \|\gamma\|_{\mathfrak{p}} > 1$ となり、論理式 (**) が導びかれた。

References

- [1] A. ROBINSON and P. ROQUETTE, *On the finiteness theorem of Siegel and Mahler concerning diophantine equations*, *J. Number theory*, 7 (1975) 121–176.