数理解析研究所講究録 1452 巻 2005 年 129-141

スクィズド状態とビームスプリッターを用いた量子テレポーテーションに関する一考察

東京理科大学 理工学研究科 情報科学専攻 宮下 真行(Masayuki Miyashita)
東京理科大学 理工学部 情報科学科 渡邉 昇(Noboru Watanabe)
Department of Information Sciences Faculty of Science and Technology
Tokyo University of Science

1 はじめに

ベネット達は,ベル基底の特有な(EPR)エンタングルド状態から作られるチャネルを通して量子テレポーテーションが可能であることを示した.しかしながら, EPR エンタングルド状態は,非干渉性によってエンタングルド状態がすぐに壊れてしまうことが知られている.大矢とフィットナーは,一般的なビームスプリッティングとコヒーレント・エンタングルド状態を用いて,より安定した量子テレポーテーション過程を定式化した.

本研究では,大矢とフィットナーの研究を基に,スクィズド状態をビームスプリッターに通して得られるエンタングルド状態を用いた実現可能な工学技術のみで構成される量子テレポーテーション過程を提案し,この量子テレポーテーションの効率について議論する.

2 光状態の数学的記述

2.1 コヒーレント状態

コヒーレントな状態ベクトルとは,消滅作用素 a の固有状態ベクトルのことをいう.すなわち,θ を固有値,その固有ベクトルを $|\theta\rangle$ とすると,

$$a|\theta\rangle = \theta|\theta\rangle$$

と表せる.光子数確定状態ベクトル $|n\rangle$ はヒルベルト空間の $CONS$ をなすから,$|\theta\rangle$ を $|n\rangle$ でフーリエ展開し

$$|\theta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n,\theta\rangle|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}c_n|n\rangle$$

と表す.ここで,$|c_n|^2 = |\langle n,\theta\rangle|^2$ は,状態 $|\theta\rangle\langle\theta|$ において調和振動子のエネルギーが $\left(n+\frac{1}{2}\right)h\omega$ である確率を表し,

$$c_n = \langle n\,|\,\theta\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\theta|^2\right\}\frac{\theta^n}{\sqrt{n!}}$$

となる.さらに,$|\theta\rangle$ でつくられる状態,

$$\rho_0 = |\theta\rangle\langle\theta|$$

をコヒーレント状態と呼ぶ.

2.2 スクィズド状態

スクィズド状態はコヒーレント状態と同様,安定な光子状態である.光子の生成・消

滅作用素a^*, aと$|\lambda|^2-|\mu|^2=1$を満たす複素数λ, μを用いて,

$$b=\lambda a+\mu a^*$$
$$b^*=\bar{\lambda}a^*+\bar{\mu}a$$

で新たな生成・消滅作用素b^*, bを定めるとこれらは,CCRを満たす.このbの固有ベクトルをスクィズド状態ベクトル,あるいは二光子コヒーレント状態ベクトルといい,$|\theta;\lambda,\mu\rangle$あるいは$|\kappa\rangle_g$で表す.すなわち,消滅作用素$b$の固有値と固有ベクトルは

$$b|\theta;\lambda,\mu\rangle=(\lambda\theta+\mu\bar{\theta})|\theta;\lambda,\mu\rangle \qquad \left(b|\kappa\rangle_g=\kappa|\kappa\rangle_g\right)$$

を満たす.ここで,$\kappa=\lambda\theta+\mu\bar{\theta}$である.このスクィズド状態ベクトルによってつくられた状態

$$\rho_{sq}=|\theta;\lambda,\mu\rangle\langle\theta;\lambda,\mu|$$

がスクィズド状態である.スクィズド状態ベクトルを光子数確定状態の$CONS$でフーリエ展開すると,

$$|\theta;\lambda,\mu\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}s_n|n\rangle$$

となる.ただし,s_nは,

$$s_n=\langle n|\theta;\lambda,\mu\rangle=\frac{1}{\sqrt{\lambda n!}}\left(\frac{\mu}{2\lambda}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{|\theta|^2}{2}+\frac{\bar{\mu}\theta^2}{2\lambda}\right)H_n\left(\frac{\theta}{\sqrt{2\lambda\mu}}\right)$$

であり,$H_n(x)$はn次のエルミート多項式である.

3　主なチャネル

本研究で用いた,現在の量子通信で広く使われているチャネルについて述べる.

3.1　ビームスプリッター

ビームスプリッターとは,２つの入射状態を所定の比率(透過率)で,２方向に分割するチャネルである.１番目の入力系と,それに対応する出力系のヒルベルト空間$\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$とする.また,２番目の入力系と,それに対応する出力系のヒルベルト空間$\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$とする.１番目の入力状態が$\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$,２番目の入力状態が$\varsigma\in\mathfrak{S}(\mathcal{K}_1)$で与えられたとする.このとき,ビームスプリッター$\Lambda_{BS}^*:\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1)\to\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{K}_2)$は,

$$\Lambda_{BS}^*(\rho\otimes\varsigma)\equiv V(\rho\otimes\varsigma)V^*$$

と定義される.ただし,線形写像$V:\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1\to\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{K}_2$は,透過率$\eta\in[0,1]$が与えられたとき,$\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1$上の光子数確定状態ベクトル$|n\rangle\otimes|m\rangle$に対して,

$$V(|n\rangle\otimes|m\rangle)=\sum_{j=0}^{n+m}\sum_{r=L}^{K}(-1)^{n-r}\frac{\sqrt{n!m!j!(n+m-j)!}}{r!(n-r)!(j-r)!(m-j+r)!}$$
$$\times\eta^{m-j+2r}(1-\eta)^{n+j-2r}|j\rangle\otimes|n+m-j\rangle,$$
$$K=\min\{j,n\},\ L=\max\{j-m,0\}$$

と定義される.ここで,入力として２つのスクィズド状態

$$\rho=|\theta_1;\lambda_1,\mu_1\rangle\langle\theta_1;\lambda_1,\mu_1|\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1),\ \varsigma=|\theta_2;\lambda_2,\mu_2\rangle\langle\theta_2;\lambda_2,\mu_2|\in\mathfrak{S}(\mathcal{K}_1)$$

が与えられたとする.このとき,ρ,ςは定数$s_i^{(1)}(i=0,1,2,\cdots)$,$s_j^{(2)}(j=0,1,2,\cdots)$を用いて,

$$\rho=\sum_{i,j=0}^{\infty} s_i^{(1)}\overline{s_j^{(1)}}|i\rangle\langle j|,\ \varsigma=\sum_{i,j=0}^{\infty} s_i^{(2)}\overline{s_j^{(2)}}|i\rangle\langle j|$$

とフーリエ展開することができる.そして,スクィズド状態ρ,ςを透過率$\eta\in[0,1]$のビームスプリッター$\Lambda_{BS}^*:\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1)\to\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{K}_2)$に通したときに出力として得られる量子状態は,

$$C_{i,j,k,l}\equiv(-1)^j\frac{\sqrt{(i+j)!(k+l)!(i+k)!(j+l)!}}{i!j!k!l!}\eta^{i+l}(1-\eta)^{j+k}$$

を用いて,

$$\begin{aligned}&\Lambda_{BS}^*(\rho\otimes\varsigma)\\&=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{k,l=0}^{\infty}\sum_{i',j'=0}^{\infty}\sum_{k',l'=0}^{\infty} s_{i+j}^{(1)}s_{k+l}^{(2)}C_{i,j,k,l}\overline{s_{i'+j'}^{(1)}s_{k'+l'}^{(2)}C_{i',j',k',l'}}|i+k\rangle\langle j+l|\otimes|i'+k'\rangle\langle j'+l'|\end{aligned}$$

と表せる.

3.2 光雑音チャネル

光雑音チャネルとは,入力された量子状態の伝送中に外界からの量子状態が雑音として影響するようなチャネルをいう.入力系とそれに対応する出力系のヒルベルト空間$\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$とする.また,外部からの雑音を記述する雑音系のヒルベルト空間を$\mathcal{K}_1$それらの影響による損失を記述する損失系のヒルベルト空間を$\mathcal{K}_2$とする.入力状態が$\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ 雑音状態が $\varsigma\in\mathfrak{S}(\mathcal{K}_1)$ と与えられたとき,光雑音チャネル$\Lambda^*:\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)\to\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2)$は,

$$\Lambda^*(\rho)\equiv tr_{\mathcal{K}_2}\Lambda_{BS}^*(\rho\otimes\varsigma)$$

と定義される.ここで,入力としてスクィズド状態

$$\rho=|\theta_1;\lambda_1,\mu_1\rangle\langle\theta_1;\lambda_1,\mu_1|\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$$

雑音として,

$$\varsigma=|\theta_2;\lambda_2,\mu_2\rangle\langle\theta_2;\lambda_2,\mu_2|\in\mathfrak{S}(\mathcal{K}_1)$$

が与えられたとする.このとき,ρ,ςは定数$s_i^{(1)}(i=0,1,2,\cdots)$,$s_j^{(2)}(j=0,1,2,\cdots)$を用いて,

$$\rho=\sum_{i,j=0}^{\infty} s_i^{(1)}\overline{s_j^{(1)}}|i\rangle\langle j|,\ \varsigma=\sum_{i,j=0}^{\infty} s_i^{(2)}\overline{s_j^{(2)}}|i\rangle\langle j|$$

とフーリエ展開することができる.そして,スクィズド状態ρを透過率$\eta\in[0,1]$,雑音状態ςの光雑音チャネル$\Lambda^*:\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)\to\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2)$に通したときに出力として得られる量子状態は,

$$C_{i,j,k,l}\equiv(-1)^j\frac{\sqrt{(i+j)!(k+l)!(i+k)!(j+l)!}}{i!j!k!l!}\eta^{i+l}(1-\eta)^{j+k}$$

$$\gamma\equiv\sum_{i',j'=0}^{\infty}\sum_{w=\max[i',j']}^{\infty}\overline{s_{i'+j'}^{(1)}s_{2w-i'-j'}^{(2)}C_{i',j',w-i',w-j'}}$$

を用いて,

$$\Lambda^*(\rho)=\gamma\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{k,l=0}^{\infty}s_{i+j}^{(1)}s_{k+l}^{(2)}C_{i,j,k,l}|i+k\rangle\langle j+l|$$

と表せる.

4 量子テレポーテーション

4.1 一般的な量子テレポーテーション過程

より扱いやすいテレポーテーションモデルを得るために,ベネット達のテレポーテーションモデルより一般的な,文献[4,5]の大矢とフィットナーの仕事に基づくヒルベルト空間$\mathcal{H}_k\,(k=1,2,3)$上のテレポーテーションモデルを考える.その一般的な概要は次のステップで表現される.

テレポーテーションチャネルの記述には 3 つのヒルベルト空間が必要である.$\mathcal{H}_1$,$\mathcal{H}_2$をアリス(送信者)に属するヒルベルト空間,$\mathcal{H}_3$をボブ(受信者)に属するヒルベルト空間とする.

Step0 : アリス(送信者)は未知の量子状態$\rho^{(1)}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$を持ち,彼女はボブ(受信者)にそれをテレポートするように依頼される.

Step1 : アリスとボブの間に,ある相関を持つ状態$\sigma^{(23)}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3)$をあらかじめ準備する.これは,2 つの系$\mathcal{H}_2$と$\mathcal{H}_3$の間のエンタングルド状態である.

Step2 : 観測量$F\equiv\sum_{n,m}z_{nm}F_{nm}\in B(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2)$に対応しているヒルベルト空間$\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$上の互いに直交する射影の族$(F_{nm})$を固定する.そして,固定した一対の添字$n,m$に対して,アリスは,状態$\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)}$にある系の$\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$の部分だけを含む観測量$F$を測定する.アリスが結果$z_{nm}$を得るとき,その状態は,

$$\rho_{nm}^{(123)}\equiv\frac{(F_{nm}\otimes I_3)(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)})(F_{nm}\otimes I_3)}{tr_{123}(F_{nm}\otimes I_3)(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)})(F_{nm}\otimes I_3)}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3)$$

となる.ここで,tr_{123}は,ヒルベルト空間$\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3$上の全トレースである.

Step3 : ボブは,どの結果がアリスによって得られたかについて知る.このことは,固有値z_{nm}が検出されたという情報を送ることに等しい.この情報は,外乱なしに古典的な手段によってアリスからボブに送られる.

Step4 : ボブは,Step3 で知らされた結果に対応する鍵を受け取った$\Lambda_{nm}^*(\rho^{(1)})$に使用することによって,アリスの元々の量子状態の復元を試みる.状態$\rho_{nm}^{(123)}$にある系の 3 番目の箇所についての部分観測だけを行うことは,(アリスの観測の後で)ボブが,状態$\rho_{nm}^{(123)}$の$\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$上での部分トレースによって与えられる$\mathcal{H}_3$上の状態$\Lambda_{nm}^*(\rho^{(1)})$を制御することを意味する.ただし,テレポーテーションチャネル$\Lambda_{nm}^*:\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)\to\mathfrak{S}(\mathcal{H}_3)$は,

$$\begin{aligned}\Lambda_{nm}^*(\rho^{(1)})&\equiv tr_{12}\rho_{nm}^{(123)}\\&=\frac{tr_{12}(F_{nm}\otimes I_3)(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)})(F_{nm}\otimes I_3)}{tr_{123}(F_{nm}\otimes I_3)(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)})(F_{nm}\otimes I_3)}\end{aligned}$$

で定義される.このように,族(F_{nm})とエンタングル状態$\sigma^{(23)}$によって与えられる全テ

レポーテーション方式は,$\mathcal{H}_1$上の状態の集合から$\mathcal{H}_3$上の状態の集合へのチャネルの族$\left(\Lambda_{nm}^*\right)$と,観測量$F$に関するアリスの測定が,値$z_{nm}$となる確率

$$p_{nm}(\rho^{(1)}) \equiv tr_{123}\left(F_{nm}\otimes I_3\right)\left(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm}\otimes I_3\right)$$

の族p_{nm}によって特徴づけることができる.以下の条件が満たされれば,$\mathcal{H}_1$上の状態$\rho^{(1)}$のあるクラスSに関して,テレポーテーション方式は完全に働く.

(E1) 各n,mに対して,以下の条件を満たすユニタリー作用素$R_{nm}:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_3$が存在する.

$$\Lambda_{nm}^*\left(\rho^{(1)}\right)=R_{nm}\rho^{(1)}R_{nm}^*\left(\forall\rho^{(1)}\in S\right)$$

(E2)

$$\sum_{n,m}p_{nm}\left(\rho^{(1)}\right)=1\left(\forall\rho^{(1)}\in S\right)$$

(E1)は,ボブが与えられユニタリー鍵$\{R_{nm}\}$によって元の状態$\rho^{(1)}$を復元することができることを意味する.また,(E2)は,ボブが確実で適当な鍵を見つけることができることを意味する.射影作用素F_{nm},およびエンタングル状態$\sigma^{(12)},\sigma^{(23)}$をどのようにして用意するかによって,量子テレポーテーション過程が完全となるか,不完全となるかが決定される.

4.2 射影作用素F_{nm}の定義

文献[4,5]で大矢とフィットナーが定めた射影作用素$F_{nm}\in B\left(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\right)$について述べる.$\mathcal{H}_1$上のユニタリー作用素$B_n$,$\mathcal{H}_2$上のユニタリー作用素$U_m$,$\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$上のエンタングル状態$\sigma^{(12)}\in\mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\right)$を用いて,次のように射影$\{F_{nm}\}$を定める.

$(b_n)_{n=1}^N$を,$\mathbb{C}^N$の中の列とし,

$$b_n=\left[b_{n1},b_{n2},\dots,b_{nN}\right]$$

は,性質

$$\left|b_{nk}\right|=1\quad(n=1,2,\dots,N)$$
$$\left\langle b_n,b_j\right\rangle=0\quad(n\neq j;n,j=1,2,\dots,N)$$

を持つとする.すなわち,

$$\sum_{k=1}^N b_{nk}\overline{b_{lk}}=\delta_{nl}$$

を満たすとする.今,各$m,n(=1,2,\dots,N)$に対して,ユニタリー作用素B_n,U_mを

$$B_n\left|\theta\right\rangle=B_n\sum_{k=1}^N c_k\left|k\right\rangle\equiv\sum_{k=1}^N b_{nk}c_k\left|k\right\rangle$$
$$U_m\left|\theta\right\rangle=U_m\sum_{k=1}^N c_k\left|k\right\rangle\equiv\sum_{k=1}^N c_k\left|k\oplus m\right\rangle\quad\left(\text{ただし,}\ j\oplus m\equiv j+m\left(\mathrm{mod}\,N\right)\right)$$

と定義する.これを用いて,アリスの射影の集合$\{F_{nm};n,m=1,2,\dots,N\}$を,

$$F_{nm}\equiv\left(B_n\otimes U_m\right)\sigma^{(12)}\left(B_n\otimes U_m\right)^*$$

で定義する.

4.3 量子テレポーテーションのチャネル表現

テレポートするよう頼まれるアリスの任意の状態を$\rho^{(1)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$とする.また,エンタングル状態$\sigma^{(23)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$が純粋状態である,すなわち,

$$\sigma^{(23)} \equiv \left|\psi^{(23)}\right\rangle\left\langle\psi^{(23)}\right|$$

で与えられると仮定する.ここで,変換$W:\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$を,$\mathcal{H}_1$上の$CONS\{x_i\}$を用いて,

$$W \equiv \sum_i \left(\left|x_i\right\rangle \otimes \left|\psi^{(23)}\right\rangle\right)\left\langle x_i\right|$$

と定めると,

$$\rho^{(1)} \otimes \sigma^{(23)} = W\rho^{(1)}W^* \left(\forall \rho^{(1)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)\right)$$

$$W^*W = I_1$$

$$WW^* = I_1 \otimes \sigma^{(23)}$$

を満たす.さらに,変換$T_{ij}:\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3$を$\mathcal{H}_1$上の$CONS\{x_i\}$,$\mathcal{H}_2$上の$CONS\{y_j\}$,$\mathcal{H}_3$上の$CONS\{z_k\}$を用いて,

$$T_{ij} \equiv \sum_k \left|z_k\right\rangle\left(\left\langle x_i\right| \otimes \left\langle y_j\right| \otimes \left\langle z_k\right|\right)$$

と定めると,

$$tr_{12}\rho^{(123)} = \sum_{i,j} T_{ij}\rho^{(123)}T_{ij}^* \left(\forall \rho^{(123)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)\right)$$

を満たす. よって,これらを用いると,$(F_{nm} \otimes I_3)^* = F_{nm} \otimes I_3$より,

$$tr_{12}\left(F_{nm} \otimes I_3\right)\left(\rho^{(1)} \otimes \sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm} \otimes I_3\right) = \sum_{i,j} T_{ij}\left(F_{nm} \otimes I_3\right)W\rho^{(1)}W^*\left(F_{nm} \otimes I_3\right)^* T_{ij}^*$$

と表せる.さらに,$\varepsilon_{nm} \in \mathbb{R}$を

$$\varepsilon_{nm} \equiv tr_{123}\left(F_{nm} \otimes I_3\right)\left(\rho^{(1)} \otimes \sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm} \otimes I_3\right)$$

と定めると,

$$\Lambda_{nm}^*\left(\rho^{(1)}\right) = \frac{1}{\varepsilon_{nm}}\sum_{i,j} T_{ij}\left(F_{nm} \otimes I_3\right)W\rho^{(1)}W^*\left(F_{nm} \otimes I_3\right)^* T_{ij}^*$$

となる.以上より,変換$\Gamma_{nm}:\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_3$を

$$\Gamma_{ij}^{(nm)} \equiv T_{ij}\left(F_{nm} \otimes I_3\right)$$

と定めると,テレポーテーションチャネル$\Lambda_{nm}^*:\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_3)$は,

$$\Lambda_{nm}^*\left(\rho^{(1)}\right) = \frac{1}{\varepsilon_{nm}}\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^{(nm)}W\rho^{(1)}W^*\Gamma_{ij}^{(nm)*}$$

と表せる.

5 不完全量子テレポーテーション

大矢とフィットナーが文献[4,5]で定めた射影作用素F_{nm}を用いた量子テレポーテーション過程において,$\Lambda_{nm}^*\left(\rho^{(1)}\right)$から$\rho^{(1)}$を完全に復元する鍵を用意できない場合,すなわち,条件(E1),(E2)の両方が成り立たない場合を考える.次のモデルにおいては,テレ

ポーテーションは完全なものとはならないが,完全テレポーテーションモデルとは異なり,工学的に実現することが可能なモデルである.

5.1 フィデリティ

不完全テレポーテーションモデルがどの程度不完全かという議論をするためには,二つの量子状態が与えられたときに,それらがどの程度に通っているか,あるいは異なっているかを示す指標が必要となる.そのようなものとして,よく用いられるフィデリティ(fidelity)という尺度を以下に説明する.二つの量子状態ρとσについてのフィデリティとは,以下で定義される量である.

$$F(\rho,\sigma)\equiv tr\left[\sqrt{\sigma^{1/2}\rho\sigma^{1/2}}\right]$$

これは,次のような良い性質を持つ.

$$0\le F(\rho,\sigma)\le 1$$
$$F(\rho,\sigma)=1\Leftrightarrow \rho=\sigma$$
$$F(\rho,\sigma)=F(\sigma,\rho)$$

すなわち,フィデリティが 1 に近ければ近いほど,量子状態ρとσは似通っており,フィデリティが 0 に近ければ近いほど,量子状態ρとσは似通っていないということができる.

5.2 不完全量子テレポーテーション過程

不完全量子テレポーテーションにおいて,ボブはアリスから受けとった量子状態$\Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)$に対し,完全テレポーテーションを実現するユニタリー鍵の代わりに,ユニタリーな変換V_{nm}を行う.このとき,ボブが得る量子状態$\Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)$は,

$$\Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\equiv V_{nm}^{*}\Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)V_{nm}$$

と定義できる.これに対し,

$$\Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)=\frac{tr_{12}\left(F_{nm}\otimes V_{nm}^{*}\right)\left(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm}\otimes V_{nm}\right)}{tr_{123}\left(F_{nm}\otimes I_{3}\right)\left(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm}\otimes I_{3}\right)}$$

が成り立つ.不完全量子テレポーテーション過程では,エンタングル状態$\sigma^{(12)}$, $\sigma^{(23)}$とユニタリーな変換V_{nm}をどのようにして用意するかが問題となる.

5.3 スクィズド状態,ビームスプリッターを用いた不完全量子テレポーテーションモデル 1

Step0 : アリス(送信者)は未知の状態$\rho^{(1)}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$を持ち,彼女はボブ(受信者)にそれをテレポートするように依頼される.

Step1 : スクィズド状態$|\theta_{23};\lambda_{23},\mu_{23}\rangle\langle\theta_{23};\lambda_{23},\mu_{23}|$と真空状態$|0;1,0\rangle\langle 0;1,0|$とを,透過率$\eta_{23}$のビームスプリッターに通した状態を,系$\mathcal{H}_2$と$\mathcal{H}_3$の間のエンタングルド状態$\sigma^{(23)}\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3)$とする.このとき,エンタングル状態$\sigma^{(23)}$を,透過率$\eta_{23}$のビームスプリッターを表す変換$\Lambda_{BS}^{(23)*}:\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3)\to\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3)$を用いて,

$$\sigma^{(23)}\equiv\Lambda_{BS}^{(23)*}\left(|0;1,0\rangle\langle 0;1,0|\otimes|\theta_{23};\lambda_{23},\mu_{23}\rangle\langle\theta_{23};\lambda_{23},\mu_{23}|\right)$$

と定めると,$\sigma^{(23)}$は,

$$C_j^{n(23)} \equiv \sqrt{\frac{n!}{j!(n-j)!}}\eta_{23}{}^j(1-\eta_{23})^{n-j}$$

を用いて,

$$\sigma^{(23)} = \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{j',k'=0}^{\infty} s_{j+k}^{(23)} C_k^{j+k(23)} \overline{s_{j'+k'}^{(23)} C_{k'}^{j'+k'(23)}} |j\rangle\langle j'| \otimes |k\rangle\langle k'|$$

で与えられる.

Step2 ： スクィズド状態$|\theta_{12};\lambda_{12},\mu_{12}\rangle\langle\theta_{12};\lambda_{12},\mu_{12}|$と真空状態$|0;1,0\rangle\langle 0;1,0|$とを,透過率$\eta_{12}$のビームスプリッターに通した状態を,系$\mathcal{H}_1$と$\mathcal{H}_2$の間のエンタングルド状態$\sigma^{(12)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$とする.これを用いて,$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$上の射影作用素

$$F_{nm} \equiv (B_n \otimes U_m)\sigma^{(12)}(B_n \otimes U_m)^* \in B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$$

を用意する.そして,アリスは,状態$\rho^{(1)} \otimes \sigma^{(23)}$にある系の$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$の部分だけを含む観測量$F \equiv \sum_{n,m} z_{nm} F_{nm}$を測定する.アリスが結果$z_{nm}$を得るとき,その状態は,

$$\rho_{nm}^{(123)} \equiv \frac{(F_{nm} \otimes I_3)(\rho^{(1)} \otimes \sigma^{(23)})(F_{nm} \otimes I_3)}{tr_{123}(F_{nm} \otimes I_3)(\rho^{(1)} \otimes \sigma^{(23)})(F_{nm} \otimes I_3)} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$$

となる.このとき,エンタングル状態$\sigma^{(12)}$を,透過率η_{12}のビームスプリッターを表す変換$\Lambda_{BS}^{(12)^*} : \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$を用いて,

$$\sigma^{(12)} \equiv \Lambda_{BS}^{(12)^*}(|\theta_{12};\lambda_{12},\mu_{12}\rangle\langle\theta_{12};\lambda_{12},\mu_{12}| \otimes |0;1,0\rangle\langle 0;1,0|)$$

と定めると,$\sigma^{(12)}$は,

$$C_j^{n(12)} \equiv \sqrt{\frac{n!}{j!(n-j)!}}\eta_{12}{}^j(1-\eta_{12})^{n-j}$$

を用いて,

$$\sigma^{(12)} = \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{j',k'=0}^{\infty} s_{j+k}^{(12)} C_j^{j+k(12)} \overline{s_{j'+k'}^{(12)} C_{j'}^{j'+k'(12)}} |j\rangle\langle j'| \otimes |k\rangle\langle k'|$$

で与えられる.このとき,射影作用素F_{nm}は,

$$\begin{aligned} F_{nm} &\equiv (B_n \otimes U_m)\sigma^{(12)}(B_n \otimes U_m)^* \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{j',k'=0}^{\infty} b_{nj} s_{j+k}^{(12)} C_j^{j+k(12)} \overline{b_{nj'} s_{j'+k'}^{(12)} C_{j'}^{j'+k'(12)}} |j\rangle\langle j'| \otimes |k+m\rangle\langle k'+m| \end{aligned}$$

と表せる.

Step3 ： ボブは,どの結果がアリスによって得られたかについて知る.このことは,固有値z_{nm}が検出されたという情報を送ることに等しい.この情報は,外乱なしに,古典的な手段によってアリスからボブに送られる.

Step4 ： ボブは,アリスから受け取った量子状態$\Lambda_{nm}^*(\rho^{(1)})$を,制御のためのスクィズド状態$|\theta_c;\lambda_c,\mu_c\rangle\langle\theta_c;\lambda_c,\mu_c|$を雑音とした透過率$\eta_c$の光雑音チャネル$\Lambda^* : \mathfrak{S}(\mathcal{H}_3) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_3)$に通すことによって復元を試みる.ただし,テレポーテーションチャネル$\Lambda_{nm}^* : \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_3)$は,

$$\Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\equiv tr_{12}\rho_{nm}^{(123)}=\frac{tr_{12}\left(F_{nm}\otimes I_3\right)\left(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm}\otimes I_3\right)}{tr_{123}\left(F_{nm}\otimes I_3\right)\left(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm}\otimes I_3\right)}$$

で定義される.まず,$\Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)$について,

$$tr_{12}\left(F_{nm}\otimes I_3\right)\left(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm}\otimes I_3\right)=\sum_{q,q'=0}^{\infty}\alpha_q^{nm}\overline{\alpha_{q'}^{nm}}|q\rangle\langle q'|$$

である.ただし,

$$\alpha_q^{nm}\equiv\sum_{j,k=0}^{\infty}c_j\overline{b_{nj}s_{j+k}^{(12)}C_j^{j+k(12)}}s_{q+k+m}^{(23)}C_q^{q+k+m(23)}$$

である.このとき,

$$\varepsilon_{nm}\equiv tr_{123}\left(F_{nm}\otimes I_3\right)\left(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm}\otimes I_3\right)=\sum_{q=0}^{\infty}\left|\alpha_q^{nm}\right|^2$$

となる.ゆえに,ボブがアリスから受け取った量子状態$\Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)$は,

$$\Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)=\frac{1}{\varepsilon_{nm}}\sum_{q,q'=0}^{\infty}\alpha_q^{nm}\overline{\alpha_{q'}^{nm}}|q\rangle\langle q'|$$

となり,求められた.次に,量子状態$\Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)$を,制御のためのスクィズド状態$|\theta_c;\lambda_c,\mu_c\rangle\langle\theta_c;\lambda_c,\mu_c|$からなる透過率$\eta_c$の光雑音チャネル$\Lambda^{*}$に通す.これによって得られる量子状態$\Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)$は,

$$\Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\equiv\Lambda^{*}\left(\Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right)=\frac{1}{\varepsilon_{nm}}\sum_{j,k=0}^{\infty}\sum_{j',k'=0}^{\infty}\gamma_{j,k,j',k'}^{nm}|j+k\rangle\langle j'+k'|$$

となる.ただし,

$$\gamma_{j,k,j',k'}^{nm}\equiv\sum_{q,q'=0}^{\infty}\sum_{w=\max[q,q']}^{\infty}\alpha_{j+q}^{nm}S_{w-q+k}^{(c)}C_{q,j,w-q,k}^{(c)}\overline{\alpha_{j'+q'}^{nm}S_{w-q'+k'}^{(c)}C_{q',j',w-q',k'}^{(c)}}$$

$$C_{i,j,k,l}^{(c)}\equiv(-1)^j\frac{\sqrt{(i+j)!(k+l)!(i+k)!(j+l)!}}{i!j!k!l!}\eta_c^{i+l}\left(1-\eta_c\right)^{j+k}$$

である.ここで,未知の入力状態をコヒーレント状態$\rho^{(1)}=|\theta\rangle\langle\theta|\in\mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_1\right)$とすると$\rho^{(1)}$は,

$$c_n=\frac{\theta^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{|\theta|^2}{2}\right)$$

を用いて,

$$\rho^{(1)}=\sum_{j,k=0}^{\infty}c_j\overline{c_k}|j\rangle\langle k|$$

で与えられる.よって,$\rho^{(1)}$と量子状態$\Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)$についてのフィデリティは,

$$F\left(\rho^{(1)},\Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right)=tr\left[\sqrt{\rho^{(1)^{1/2}}\Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\rho^{(1)^{1/2}}}\right]$$

で与えられ,

$$v_{nm} \equiv \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{j',k'=0}^{\infty} c_{j+k} \overline{c_{j'+k'}} \gamma_{j,k,j',k'}^{nm}$$

を用いて,

$$F\left(\rho^{(1)}, \Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right) = \sqrt{\frac{v_{nm}}{\varepsilon_{nm}}}$$

と表せる.最後に,制御のための光雑音チャネルΛ^{*}による復元効果の有無(復元鍵としての効果の程度)を知るためには,入力状態$\rho^{(1)}$と復元鍵を適用する前の量子状態$\Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)$についてのフィデリティ$F\left(\rho^{(1)}, \Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right)$を求め,$F\left(\rho^{(1)}, \Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right)$と比較する必要がある.ここで,$\varphi_{nm} \in \mathbb{C}$を,

$$\varphi_{nm} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} c_j \overline{\alpha_j^{nm}}$$

と定めると,これを用いてフィデリティ$F\left(\rho^{(1)}, \Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right)$は,

$$F\left(\rho^{(1)}, \Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right) = \frac{\left|\varphi_{nm}\right|}{\sqrt{\varepsilon_{nm}}}$$

で与えられる.

計算結果

フィデリティ$F\left(\rho^{(1)}, \Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right)$の最大値を与えるパラメータを調べ,最大値を実際に計算した.この際,パラメータ$\theta_{12}, \theta_{23}, \lambda_{12}, \lambda_{23}, \mu_{12}, \mu_{23}, \eta_{12}, \eta_{23}$を

$$\theta_{12} = \theta_{23} = 10,\ \lambda_{12} = \lambda_{23} = 2,\ \mu_{12} = \mu_{23} = \sqrt{3},\ \eta_{12} = \eta_{23} = 0.5$$

と固定した上で,パラメータ$\theta, \theta_c, \lambda_c, \eta_c$を変化させた.

その結果,

$$\theta = 0.01,\ \theta_c = 1.13,\ \lambda_c = 1.01,\ \eta_c = 0.53$$

のとき,フィデリティ$F\left(\rho^{(1)}, \Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right)$は最大値

$$F\left(\rho^{(1)}, \Xi_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right) = 0.71642$$

となることがわかった.また,このとき,フィデリティ$F\left(\rho^{(1)}, \Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right)$は,

$$F\left(\rho^{(1)}, \Lambda_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right) = 0.18008$$

となる.

5.4 スクィズド状態,ビームスプリッターを用いた不完全量子テレポーテーションモデル2

テレポーテーションチャネルに変更を加え,モデル1とは,Step4以降の過程が異なっている.

Step4 : ボブは,アリスから受け取った量子状態$\widetilde{\Lambda}_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$を,透過率$\eta_c$のビームスプリッター$\Lambda_{BS}^{*} : \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$に通すことによって復元を試みる.ただし,ここではテレポーテーションチャネル$\widetilde{\Lambda}_{nm}^{*} : \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$を,

$$\widetilde{\Lambda}^*_{nm}\left(\rho^{(1)}\right) \equiv \frac{tr_1\left(F_{nm}\otimes I_3\right)\left(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm}\otimes I_3\right)}{tr_{123}\left(F_{nm}\otimes I_3\right)\left(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm}\otimes I_3\right)}$$

と定義した.まず,$\widetilde{\Lambda}^*_{nm}\left(\rho^{(1)}\right)$について,

$$tr_1\left(F_{nm}\otimes I_3\right)\left(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm}\otimes I_3\right)=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{p,q,p',q'=0}^{\infty}\alpha^{nm}_{t,p,q}\overline{\alpha^{nm}_{t,p',q'}}\left|p+m\right\rangle\left\langle p'+m\right|\otimes\left|q\right\rangle\left\langle q'\right|$$

である.ただし,

$$\alpha^{nm}_{t,p,q}\equiv S^{(12)}_{t+p}C^{t+p(12)}_{t}\sum_{j,k=0}^{\infty}C_j\overline{b_{nj}S^{(12)}_{j+k}C^{j+k(12)}_{j}}S^{(23)}_{q+k+m}C^{q+k+m(23)}_{q}$$

である.このとき,

$$\varepsilon_{nm}\equiv tr_{123}\left(F_{nm}\otimes I_3\right)\left(\rho^{(1)}\otimes\sigma^{(23)}\right)\left(F_{nm}\otimes I_3\right)=\sum_{t,p,q=0}^{\infty}\left|\alpha^{nm}_{t,p,q}\right|^2$$

となる.ゆえに,ボブがアリスから受け取った量子状態$\widetilde{\Lambda}^*_{nm}\left(\rho^{(1)}\right)$は,

$$\widetilde{\Lambda}^*_{nm}\left(\rho^{(1)}\right)=\frac{1}{\varepsilon_{nm}}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{p,q,p',q'=0}^{\infty}\alpha^{nm}_{t,p,q}\overline{\alpha^{nm}_{t,p',q'}}\left|p+m\right\rangle\left\langle p'+m\right|\otimes\left|q\right\rangle\left\langle q'\right|$$

となり,求められた.次に,量子状態$\widetilde{\Lambda}^*_{nm}\left(\rho^{(1)}\right)$を,透過率$\eta_c$のビームスプリッター$\Lambda^{(23)^*}_{BS}:\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3)\to\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3)$に通す.これによって得られる量子状態$\widetilde{\Xi}^*_{nm}\left(\rho^{(1)}\right)$は,

$$\widetilde{\Xi}^*_{nm}\left(\rho^{(1)}\right)\equiv tr_{\mathcal{H}_2}\Lambda^{(23)^*}_{BS}\left(\widetilde{\Lambda}^*_{nm}\left(\rho^{(1)}\right)\right)=\frac{1}{\varepsilon_{nm}}\sum_{k,l,k',l'=0}^{\infty}\gamma^{nm}_{k,l,k',l'=0}\left|k+l\right\rangle\left\langle k'+l'\right|$$

となる.ただし,

$$\gamma^{nm}_{k,l,k',l'}\equiv\sum_{r,r'=0}^{\infty}\sum_{w=\max[r,r']}^{\infty}\alpha^{nm}_{u,(r+k),(w-r+l)}C^{(c)}_{r,k,(w-r),l}\overline{\alpha^{nm}_{u,(r'+k'),(w-r'+l')}C^{(c)}_{r',k',(w-r'+l')}}$$

$$C^{(c)}_{i,j,k,l}\equiv(-1)^j\frac{\sqrt{(i+j)!(k+l)!(i+k)!(j+l)!}}{i!j!k!l!}\eta_c^{i+l}\left(1-\eta_c\right)^{j+k}$$

である. ここで, 未知の入力状態をコヒーレント状態$\rho^{(1)}=\left|\theta\right\rangle\left\langle\theta\right|\in\mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_1\right)$とすると$\rho^{(1)}$は,

$$c_n=\frac{\theta^n}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{\left|\theta\right|^2}{2}\right)$$

を用いて,

$$\rho^{(1)}=\sum_{j,k=0}^{\infty}c_j\overline{c_k}\left|j\right\rangle\left\langle k\right|$$

で与えられる.最後に,$\rho^{(1)}$と量子状態$\widetilde{\Xi}^*_{nm}\left(\rho^{(1)}\right)$についてのフィデリティは,

$$F\left(\rho^{(1)},\widetilde{\Xi}^*_{nm}\left(\rho^{(1)}\right)\right)=tr\left[\sqrt{\rho^{(1)^{1/2}}\widetilde{\Xi}^*_{nm}\left(\rho^{(1)}\right)\rho^{(1)^{1/2}}}\right]$$

で与えられ,

$$\nu_{nm} \equiv \sum_{k,l=0}^{\infty} \sum_{k',l'=0}^{\infty} c_{k+l} \overline{c_{k'+l'}} \gamma_{k,l,k',l'}^{nm}$$

を用いて,

$$F\left(\rho^{(1)}, \tilde{\Xi}_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right) = \sqrt{\frac{\nu_{nm}}{\varepsilon_{nm}}}$$

と表せる.

計算結果

フィデリティ $F\left(\rho^{(1)}, \tilde{\Xi}_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right)$ の最大値を与えるパラメータを調べ,最大値を実際に計算した.この際,パラメータ $\theta_{12}, \theta_{23}, \eta_{12}, \eta_{23}$ を,

$$\theta_{12} = \theta_{23} = 10, \eta_{12} = \eta_{23} = 0.5$$

と固定した.その上で, $\lambda_{12} = \lambda_{23} (\equiv \lambda)$ と置き,パラメータ θ, λ, η_c を変化させた.

その結果,

$$\theta = 0.53, \lambda = \sqrt{32}, \eta_c = 0.99$$

のとき,フィデリティ $F\left(\rho^{(1)}, \tilde{\Xi}_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right)$ は最大値

$$F\left(\rho^{(1)}, \tilde{\Xi}_{nm}^{*}\left(\rho^{(1)}\right)\right) = 0.93035$$

となることがわかった.

6　考察と今後の課題

スクィズド状態,ビームスプリッターを用いた不完全量子テレポーテーションモデル1において,計算結果よりビームスプリッターは復元鍵として,ある程度の効果があることがわかった.しかし,そのフィデリティの値は十分に高いとは言えず,量子テレポーテーションモデルとしては不十分である.この原因として,復元に用いる制御光およびビームスプリッターのどちらにも,アリス側に依存する要因が無いことが考えられる.

スクィズド状態,ビームスプリッターを用いた不完全量子テレポーテーションモデル2においては,高いフィデリティが得られた.モデル1とは異なり,復元の際の制御光として,テレポーテーション過程の中で発生する量子状態を用いたことが大きな理由であると考えられる.このモデルによって,制御光による復元の有効性を示すことができた.しかし,このモデルの問題点は,ボブが復元を行う際に,アリスに属する量子状態を必要とすることである.今後の課題モデルとして,一つ目に,モデル2において,アリスに属する制御のための量子状態をボブに伝送する際の,物理装置を通したことによる影響を考慮したモデルが考えられる.二つ目に,ボブがアリスの観測結果を基にして,モデル2で用いた制御光に近い量子状態をボブ側で用意するようなモデルが考えられる.

参考文献

[1] L.Accardi and M.Ohya, Teleportation of general quantum states Quantum Information, T.Hida, K.Saito (eds.) World Scientific,{59},(1999).

[2] C.H.Bennett, G.Brassard, C.Crepeau, R.Jozsa, A.Peres, andW.K.Wootters, Phys.Rev.Lett.{70}, 1895 (1993).

[3] C.H.Bennett, G.Brassard, S.Popescu, B.Schumacher, J.A.Smolin,W.K.Wootters, Phys. Rev. Lett. {76},722 (1996).
[4] K-H.Fichtner and M.Ohya, Quantum teleportation with entangled states given by beam splittings, Commun. Math. Phys., {222}, 229 (2001).
[5] K-H.Fichtner and M.Ohya, Quantum teleportation and beam splitting, Commun. Math. Phys., {225}, 67 (2002).
[6] K.Inoue, H.Suyari and M.Ohya, Physica D {120}, 117 (1998).
[7] M.Ohya and N.Watanabe, On mathematical treatment of Fredkin-Toffoli-Milburn gate, to appear in Physica D.
[8] 大矢雅則, 渡邉昇, “量子通信理論の基礎”, 牧野書店, 1998.
[9] 梅垣壽春, 大矢雅則, “確率論的エントロピー”, 共立出版, 1983.
[10] 梅垣壽春, 大矢雅則, “量子論的エントロピー”, 共立出版, 1984.
[11] 梅垣壽春, 大矢雅則, 日合文雄, “作用素代数入門”, 共立出版, 1985.
[12] 梅垣壽春, 大矢雅則, 塚田真, “測度・積分・確率”, 共立出版, 1987.