

オイラー方程式が持つ複素空間特異性の数値的構成とその性質

松本 剛 (Takeshi Matsumoto)^{a,b}, Walter Pauls^{b,c}, Jérémie Bec^b, Uriel Frisch^b.

^a京大院 理 物理学第一教室 (Department of Physics, Kyoto University),

^bObservatoire de la Côte d'Azur,

^cFakultät für Physik, Universität Bielefeld.

概要

周期境界条件下で有限のエネルギーをもつ滑らかな初期値から出発したときの非圧縮 2 次元オイラー方程式の解は、一般に有限の時間で実空間から有限の距離の複素空間内に特異性を持つことが知られている。数値計算で得られたフーリエ係数をもとに複素特異性の性質を調査する。

1 はじめに

周期境界条件下での非圧縮オイラー方程式あるいはナビエ-ストークス方程式はフーリエスペクトル法を用いて数値的に非常に精度良く解かれてきた。数値的に得られた速度場のフーリエ係数から、物理空間の速度場

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (1)$$

は高速フーリエ変換を用いて容易に得ることができる。このデータに適当な統計平均を施すことで、速度差のモーメントや確率分布関数などを計算することができる。また、適当な可視化を行うと流れ場のダイナミクスを自在に切り取って観察することもできる。他方で、物理空間にもどすことなく、フーリエ係数 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ 自体の性質も研究の対象となってきた。コルモゴロフスペクトルやフーリエ空間における乱流の統計理論 (時にクロージャーと総称される) がその代表例であろう。

本研究では、2 次元非圧縮オイラー方程式の解のフーリエ係数 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ の性質を、複素空間にある特異性と結び付ける研究を行う。フーリエ係数の性質とは、高波数での振舞い

$$|\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)| \simeq c(\theta, t) k^{-a(\theta, t)} \exp[-d(\theta, t)k], \quad \mathbf{k} = k(\cos \theta, \sin \theta) \quad (2)$$

をさす。ここに現れる指数 $a(\theta, t)$, $d(\theta, t)$ を、単なる数値としてではなく、なんらかの実体、複素空間における特異性、の性質として追いかけてやうということである。

流体現象を複素特異性と結びつけることで、現象の理解に役立った成功例として渦層の巻き上がりがある [1]。オイラー方程式やナビエ-ストークス方程式の一般の場合に、(研究例として [2, 3] をあげることができる) こうした結びつけによって従来よりも優れた記述方法や理解を得ることがきるか否かは将来の課題である。

2 初期時間での解の振舞い

2.1 2 次元オイラー方程式の直接シミュレーション

2 次元非圧縮オイラー方程式

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

をスペクトル法で解き、時刻 $t < 1$ でのフーリエ係数の振舞いを調べることにする。ここでの初期条件は、流れ関数で書くと

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \cos x_1 + \cos 2x_2 \quad (5)$$

である。この初期値は entire であるので、時刻 $t = 0$ での複素特異性は複素空間無限遠にある。こうした初期条件から出発しても、有限時間で複素特異性は、実空間から有限の距離に到達することが知られている [4]。

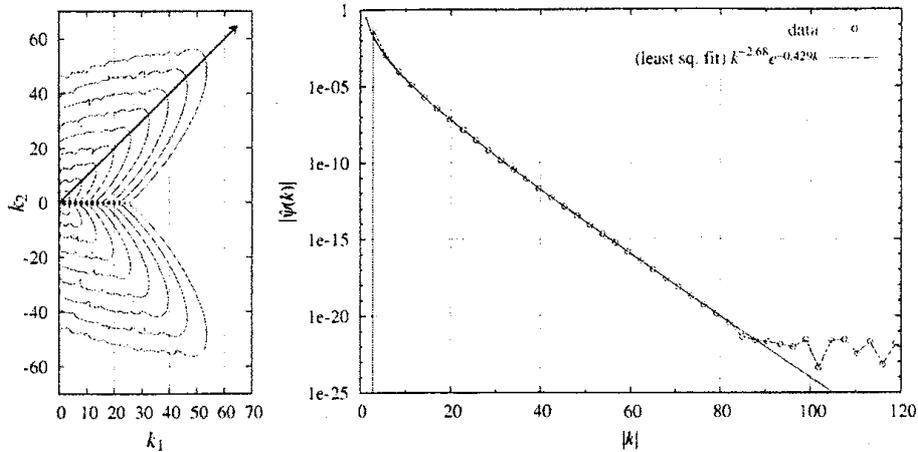


図 1: (左図) 時刻 $t = 0.8$ における、流れ関数のフーリエ係数の絶対値 $|\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)|$ の等高線。矢印は減衰が最も遅い方向を表し、その傾きは 1.0 に近い。(右図) 減衰が最も遅い方向 (直線 $k_2 = k_1$) にそって、 $|\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)|$ を波数ベクトルの大きさ $k \equiv |\mathbf{k}|$ の関数として示したものの。領域 $k > 80$ で示されているのは数値丸め誤差である。

時刻 $t = 0.8$ での流れ関数のフーリエ係数 $\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$ の様子を図 1 に示した。実空間では流れ関数の様子は初期条件 (5) 式とあまり差がないが、フーリエ空間でみると違いは著しい。フーリエ空間 (k_1, k_2) 平面では、フーリエ係数の減衰が最も遅い方向があり、時刻とともにこの方向は変化する (傾きが大きい方から小さい方へ変化する)。この時刻 $t = 0.8$ では、偶然、その傾きが 1.0 に近い。この減衰が最も遅い方向 $k_2 = k_1$ にそって、フーリエ係数の高波数での振舞いは図 1 の右図のように

$$|\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)| \propto k^{-\alpha} e^{-\delta k} \quad (6)$$

である。最小二乗法によると指数の値は $\alpha = 2.68$, $\delta = 0.429$ である。

高波数での漸近的振舞い (6) は任意に選ばれたものではなく、複素特異性に着目したフーリエ積分の漸近評価 (波数が十分に大きいとする) から得られるもので一般的な表式である [4, 5]。空間 2 次元の場合、図 1 の左図から想像されるように、 k が大きいところでは

$$|\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)| \approx C(\theta, t) k^{-\alpha(\theta, t)} \exp[-\delta(\theta, t)k], \quad \mathbf{k} = k(\cos \theta, \sin \theta) \quad (7)$$

であろう。角度依存性のある指数 $\alpha(\theta, t)$, $\delta(\theta, t)$ が複素空間 $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$ に存在する特異性の情報を反映していることになる (なお、本研究では $C(\theta, t)$ の影響は考慮しない)。特に $\delta(\theta, t)$ は特異性の位置についての情報を持ち、 $\alpha(\theta, t)$ はその特異性のまわりで渦度などがどのように振舞うか (爆発するか?) の情報をになっている。例えば、ある時刻での指数 $\delta(\theta, t)$ の最小値 $\min_{\theta} \delta(\theta, t)$ は、その時刻での実空間最近接の複素特異性と実空間の距離になっている。この最小値はエネルギースペクトルの指数減衰から計られる指数に対応しており、width of the analyticity strip と呼ばれることがある [4] (解が解析的である領域の「幅」に相当する)。

数値解から $\alpha(\theta, t)$, $\delta(\theta, t)$ の値を精度良く求めることが可能であれば問題がないが、標準的な倍精度計算では難しい。指数 δ が非常に大きい方向については、指数 α , δ の精度良い決定のために倍精度以上の精度が必要である (図 1 右図でいうと、縦軸の解像度が必要である)。スペクトル法を多倍長計算ライブラリ [6] などを用いて、多倍長精度化することは困難ではないが、計算時間があまりに長くなるために実用的でない。そこで、以下では時刻 $t \ll 1$ での漸近的なモデルを 2 次元オイラー方程式から導出して解析する [7, 8]。このモデルはフーリエ係数を漸化式から求めることができるので、必要ならば多倍長精度の計算を比較的低コストで行うことができる。

2.2 初期時間での漸近的なモデル

モデルの立脚点は以下の 2 点である。(イ) フーリエ係数は (k_1, k_2) 平面の第一象限 ($k_1, k_2 \geq 0$) のものだけを考慮する。(ロ) 複素特異性と共に動く座標系にのる。

2 点ともに、 $t \ll 1$ を考慮する理由になっている。初期条件 (5) 式は解析的であるので $t = 0$ では複素特異性は複素空間無限遠にある。つまり、複素空間座標を $z = x + iy$ と書くとき、 $t \rightarrow 0$ では $|y| \rightarrow \infty$ に複素特異性がある。初期時間帯 $t \ll 1$ で、 $y_1, y_2 \rightarrow +\infty$ の複素領域に注目するとすれば、流れ関数のフーリエ級数表現

$$\psi(x + iy, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} + i\mathbf{y})} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) e^{k_y y} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (8)$$

から、 $k_1, k_2 \geq 0$ のフーリエ係数が支配的になる。これが (イ) を課す理由である。次に (ロ) であるが、 $t \ll 1$ では複素特異性と実空間の距離は $-\ln t$ に比例することが知られている [8, 9]¹。よって次のような変数変換をとれば複素特異性と共に動く座標系にのったことになるであろう。

$$(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = (z_1 + i \ln t, z_2 + (i/2) \ln t) \quad (9)$$

(第 2 成分に現れる $\ln t$ の前の因子 $1/2$ は初期条件 (5) からきまるが、単に技術的なものである [7])。

さらに、幾つかの考察を経ると流れ関数を

$$\psi(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{t} F(\tilde{\mathbf{z}}) \quad (10)$$

¹時間帯 $t \ll 1$ で複素特異性と実空間の距離が $-\ln t$ に比例することは、粗いが以下のような説明が可能である。時刻 $t = 0$ 付近で複素無限遠での速度は初期条件のフーリエ係数のうち最も高波数のものが支配的になる。これを $u = -u_0 e^{k_0 y} e^{-ik_0 x}$ とおく。複素特異点 $z_*(t) = x_*(t) + iy_*(t)$ がこの速度場によって流体粒子のように流されると仮定すると、実空間に近づく特異点の複素座標虚部 $y_*(t)$ は方程式 $dy_*/dt \simeq -u_0 e^{k_0 y_*}$ に従う。変数分離して $y_*(t=0) = \infty$ として解くと $|y_*(t)| \simeq (-\ln t)/k_0$ となる。

とおけば首尾一貫することがわかる。これを2次元オイラー方程式 $\partial_t \nabla^2 \psi = J(\psi, \nabla^2 \psi)$ に代入すると関数 F についての方程式が次のように得られる

$$\left(-1 + i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right) \bar{\nabla}^2 F = \bar{J}(F, \bar{\nabla}^2 F). \quad (11)$$

ここで $\bar{\nabla}$ は \bar{z} についての微分を表す。フーリエ級数による表現は形式的に

$$F(\bar{z}) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \hat{F}(\mathbf{k}) e^{-ik_1 \bar{z}_1} e^{-ik_2 \bar{z}_2} \quad (12)$$

となり、フーリエ係数の従う式は

$$\hat{F}(k_1, k_2) = \frac{-2}{(2k_1 + k_2 - 2)|\mathbf{k}|^2} \sum_{q_1=0}^{k_1} \sum_{q_2=0}^{k_2} |\mathbf{k} - \mathbf{q}|^2 (q_1 k_2 - q_2 k_1) \hat{F}(\mathbf{q}) \hat{F}(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad (13)$$

である。この漸化式の初期値は、初期条件 (5) に対応して $\hat{F}(1, 0) = -1/2$, $\hat{F}(0, 2) = 1/2$ である。波数空間の第一象限に制限した結果、全てのフーリエ係数 $\hat{F}(\mathbf{k})$ は初期値 $\hat{F}(1, 0)$, $\hat{F}(0, 2)$ から順に決定することができる。ここからは関数 F を流れ関数と呼ぶことにして、引数のチルダを省略する。

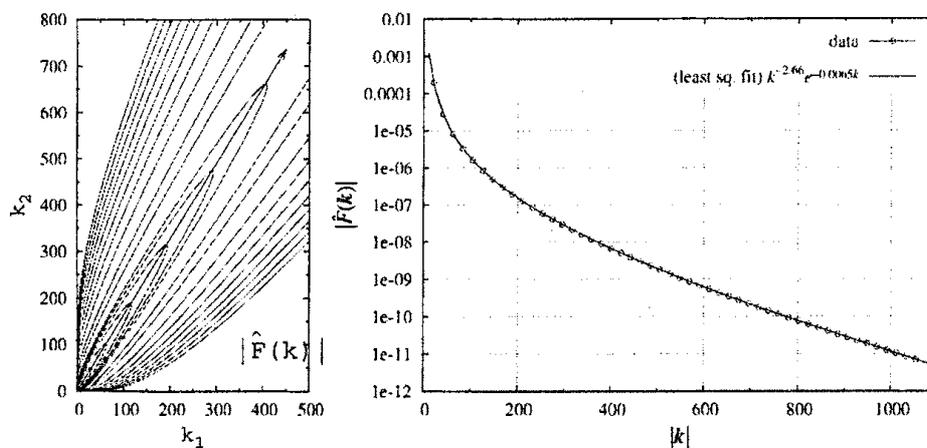


図 2: (左図) 漸近モデル (式 (13)) の解 (流れ関数のフーリエ係数に相当する) の絶対値の等値面。矢印は最も減衰の遅い方向を表し、その傾きは $18/11$ に近い。(右図) 最も減衰の遅い方向 (直線 $k_2 = (18/11)k_1$) にそって、 $F(k_1, k_2)$ を波数ベクトルの大きさ $k \equiv |\mathbf{k}|$ の関数として示したものの。

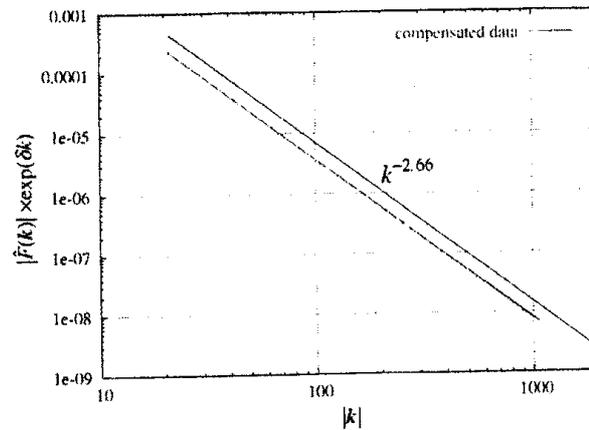


図 3: 図 2 右図のデータにおいて、指数関数部を相殺したものの。

漸化式 (13) を 4 倍精度 (35 桁精度) で解いた結果を図 2 に示す。流れ関数 F の振舞いはやはり式 (6) と同じで $F \propto k^{-\alpha} e^{-\delta k}$ であり、最小二乗法によると値は $\alpha = 2.66$, $\delta = 0.0065$ である。モデルの導出時に複素特異点と共に動く座標を取ったために、実空間最近接特異点への距離は $\delta = 0.0065$ と非常に小さくなっている。また、代数部分の指数が 2.66 となつて、2 次元オイラー方程式の直接シミュレーション結果と良い一致を示している (図 1 にある $t = 0.8$ では、指数は 2.68 であった)。指数関数部分を相殺して、流れ関数 \hat{F} の冪的振舞いをうかび上らせたものを図 3 に示す。

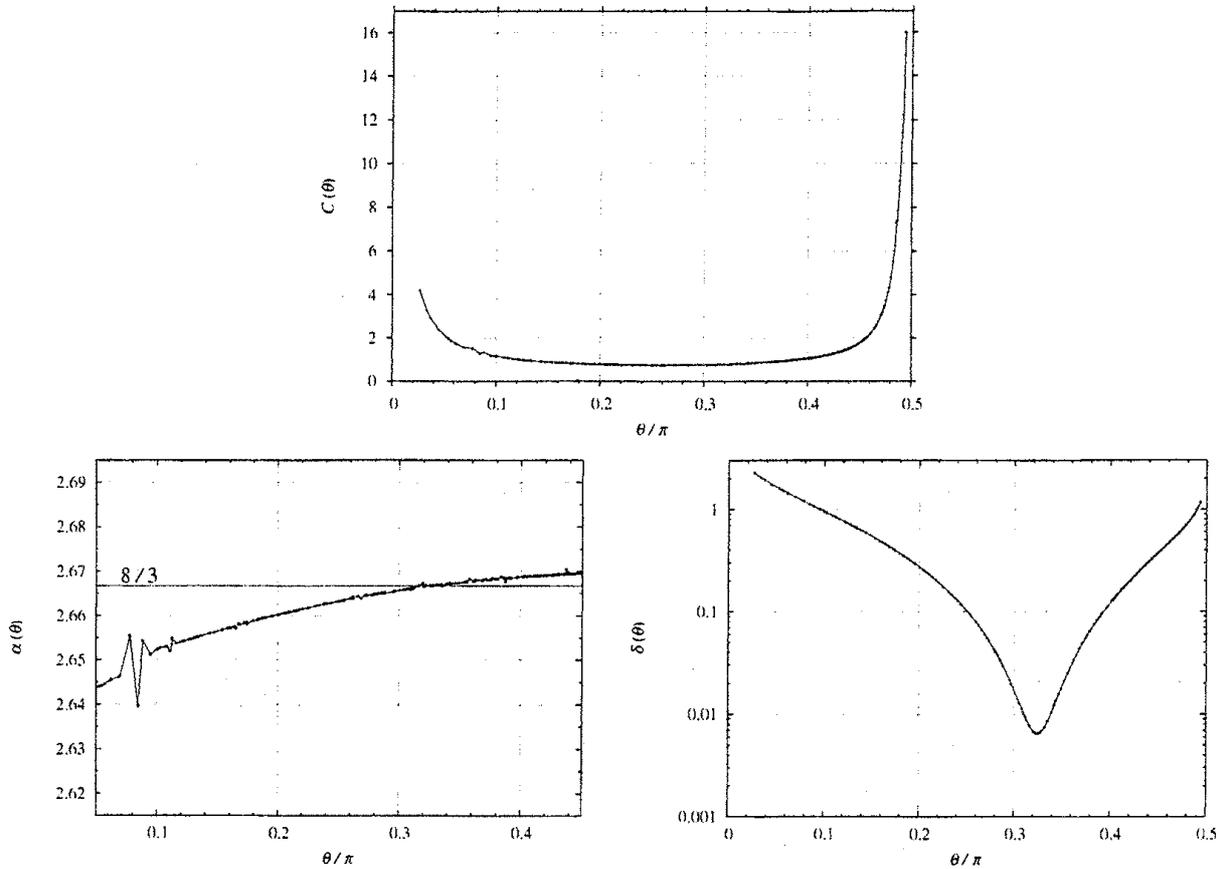


図 4: 式 (14) に現れる各パラメータの角度依存性。角度 θ は (k_1, k_2) 平面での極座標の偏角である。冪指数 $\alpha(\theta)$ のグラフで、 $\theta = 0.08\pi$ 付近の振動は数値的なアーチファクトである。

この冪指数の値 2.66 は $8/3$ であることを予想させる。フーリエ係数 \hat{F} の高波数での漸近的な振舞いは

$$\hat{F}(\mathbf{k}) \approx C(\theta) k^{-\alpha(\theta)} \exp[-\delta(\theta)k], \quad \mathbf{k} = k(\cos \theta, \sin \theta) \quad (14)$$

であり、4 倍精度計算を用いたことで、角度依存性 $C(\theta)$, $\alpha(\theta)$, $\delta(\theta)$ を精密に計ることができる。その結果を図 4 にしめす。指数 $\delta(\theta)$ は「減衰が最も遅い方向」で最小になり、角度依存性が強い。他方で、冪指数 $\alpha(\theta)$ は角度依存性が弱く、その値は $8/3$ に近い。定数 $C(\theta)$ も端以外では角度依存性が弱い、端では発散しているように見える。

ここで判明した $\delta(\theta)$ の情報を元に、複素特異性の作る集合を複素座標虚部の平面 ((y_1, y_2) -平面) に射影したものを構成することができる。特に漸近モデルでは、 $\hat{F}(\mathbf{k})$ が全て実数であり、 $\hat{F}(1, 0)$ を除いて全て正である (数値的事実で証明はない) ことから、全ての複素特異点の座標実部は $(x_1, x_2) = (0, 0)$ になり、 (y_1, y_2) -平面上への射影が、実は複素特異性の作る集合に一致する。指数 $\delta(\theta)$ が角度の関数として滑らかならば、複素特異性の作る集合 (の射影) は次のようにあらわされる [8]

$$y_1(\varphi) = -\delta(\varphi) \cos \varphi + \delta'(\varphi) \sin \varphi, \quad (15)$$

$$y_2(\varphi) = -\delta(\varphi) \sin \varphi - \delta'(\varphi) \cos \varphi. \quad (16)$$

(φ は (y_1, y_2) -平面での極座標偏角である。) この式 (15)、(16) の導出は非常に簡単である。流れ関数 F のフーリエ級数表現に式 (14) を代入すると

$$\begin{aligned} F(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \hat{F}(k_1, k_2) e^{-(k_1 y_1 + k_2 y_2)} e^{ik \cdot x} \\ &= \sum_{k, \theta} C(\theta) k^{-\alpha(\theta)} e^{-\delta(\theta)k} e^{-ky \cos(\theta - \varphi)} e^{ik \cdot x} \\ &= \sum_{k, \theta} C(\theta) k^{-\alpha(\theta)} \exp\{-k[\delta(\theta) + y \cos(\theta - \varphi)]\} e^{ik \cdot x} \quad (17) \end{aligned}$$

となる。ここでベクトルを $k = k(\cos \theta, \sin \theta)$, $y = y(\cos \varphi, \sin \varphi)$ と表した。式 (17) が解析的である限界の y は、指数関数の内部が全体として負であることから、

$$\delta(\theta) + y \cos(\theta - \varphi) > 0 \quad (18)$$

から決定される。すなわち、限界の y は

$$y = \inf_{\theta} \frac{\delta(\theta)}{-\cos(\theta - \varphi)} \quad (19)$$

で与えられる。この式で \inf が極値で実現されるものとして、さらに $\delta(\theta)$ が微分できるとして適当に変形したものが式 (15)、(16) である。以上の方法を用いて構成した流れ関数 F の複素特異性の集合を図 5 に示す。複素特異性の集合は右端と左端で切れているが、これは $\theta = 0, \pi/2$ 付近では \hat{F} のデータ数が少ないため指数 $\delta(\theta)$ が計測不可能であることが理由である。本来の集合は無限遠までのびていると思われる。

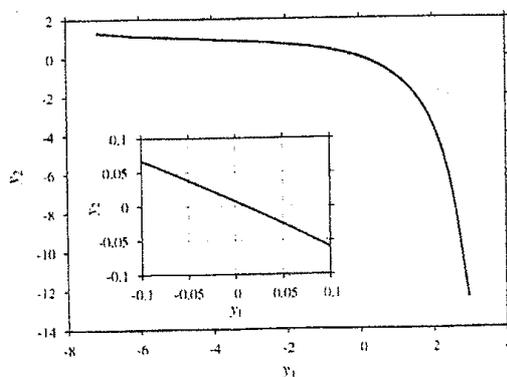


図 5: 指数 $\delta(\theta)$ からつくられた複素特異性をつくる集合。内挿図は原点 $(y_1, y_2) = (0, 0)$ 付近の拡大である。

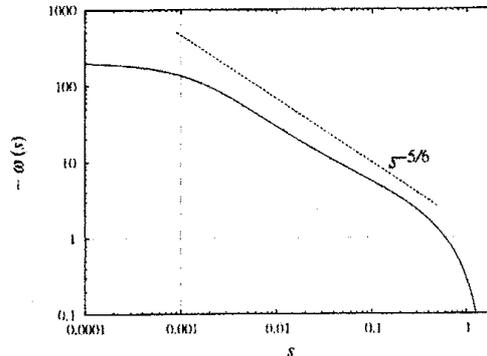


図 6: 平面 (y_1, y_2) 上での渦度 (符号を変えてある)。冪 $s^{-5/6}$ はフーリエ係数の冪指数 $\alpha = 8/3$ に対応する値である。

複素特異性の位置が判明したら、その特異性のまわりで流体力学的量がどのように振舞うか (あるいは爆発するか) をしらべることができる。平面 (y_1, y_2) 上での渦度を次のように定義する

$$\omega(y_1, y_2) \equiv -\nabla_{\mathbf{y}}^2 F(0 + iy_1, 0 + iy_2) = \sum_{\mathbf{k}} (-k^2) \hat{F}(\mathbf{k}) e^{k \cdot \mathbf{y}}. \quad (20)$$

この渦度の変化を図 6 に示す。これは、平面 (y_1, y_2) 上の原点 $(y_1, y_2) = (0, 0)$ を通り、傾き 1.6 (図 2 左図の矢印の傾きに相当する) の直線にそって、特異性からの距離 s の関数として示したものである。点 $s = 0$ が特異性に相当する。領域 $s < 0.002$ では、 \hat{F} を有限波数で打ち切っているために、渦度の増大がなまっていると考えられるが、それより右の領域では、冪的な振舞いがみられる。つまり渦度は複素特異性で冪的に爆発していることが示唆される。

この爆発の指数は、フーリエ係数 \hat{F} の冪指数 $\alpha = 8/3$ と関連がつくはずである。それを次のように議論してみる。流れ関数のフーリエ係数が $\hat{F}(\mathbf{k}) \sim k^{-\alpha} e^{-\delta(\theta)k} = k^{-\alpha} e^{-k(\delta_* + \sigma^2(\theta - \theta_*)^2 + \dots)}$ とかけるものとする (重要な点は、 α が偏角 θ に依存しないと仮定すること、それと、 $\delta(\theta)$ を極小値のまわりで θ の 2 次まで展開することである) このとき渦度の振舞いは以下のように書けるだろう。

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{y}) &= -\nabla_{\mathbf{y}}^2 F(\mathbf{y}) \sim \int k^2 k^{-\alpha} e^{-\delta(\theta)k} e^{k \cdot \mathbf{y}} dk, \\ &\sim \int k^{-\alpha+3} e^{-\sigma^2 k(\theta - \theta_*)^2} e^{-k(\delta_* - y)} dk d\theta, \\ &\sim \int k^{-\alpha+3-\frac{1}{2}} e^{-sk} dk \quad (s \equiv \delta_* - y), \\ &\sim s^{\alpha-3+\frac{1}{2}-1}; \quad \text{If } \alpha = 8/3, \quad \omega \propto s^{-5/6}. \end{aligned} \quad (21)$$

(2 行目から 3 行目にかけては、 θ についてガウス積分を行った。) 流れ関数のフーリエ係数 \hat{F} の冪指数が $\alpha = 8/3$ とすると、この議論から渦度の物理空間 (今は (y_1, y_2) 平面) での爆発の冪が $5/6$ となる。図 6 でみると $s^{-5/6}$ との一致はそれほど良くない。式 (21) では、 $\delta(\theta)$ を極小値のまわりで 2 次まで展開したが、3 次の項からの寄与などを含めると subdominant 項からの寄与が大きいことがわかり [10]、この不一致の原因を説明することが可能である。

3 まとめにかえて

初期条件 (5) から出発する時刻 $t \ll 1$ での 2 次元オイラー方程式の複素特異性について調べてきた。特に漸近モデルを導入して精度の高い数値計算を行い、フーリエ係数の性質を詳細に計測した。そしてその性質を複素特異性と関連づけた。

明らかな問題は、なぜ漸近モデルのフーリエ係数が角度依存性の弱い冪指数 $2.66 \approx -8/3$ をもつのか? である。この数値自体を、漸化式 (13) を用いて解析的に説明することが、実は我々の目標であったが成功に至っていない。この漸化式は 2 次元のオイラー方程式とは較べものにならないくらい単純化されている。しかし、非線型項が非局所的であること、ヤコビアンからくる因子 $q_1 k_2 - q_2 k_1 = (q \wedge k)$ が波数ベクトルのつくる三角相互作用の幾何学的形状に依存するなどの点が単純なドミナントバランスなどの漸近的手法の適用をこぼむ理由になっている。

この途中で我々がもった問いは、漸近モデルのフーリエ係数の冪指数は初期条件に依存するだろうか? であった。もし依存しなければ、冪指数を説明する理論は初期条件の詳細に依存しない分、簡単になるであろうと予想がつく。しかし、異なる初期条件 $\psi_0 = \cos(x_1 + x_2) + \cos 2x_2$ に対して同じ手続きで漸近モデルを導出し、数値解を求めるとフーリエ係数の冪指数は 2.54 となってあきらかに 2.66 と違う値であった。確かに、時刻 $t \ll 1$ での解析を行っているのであるから、初期条件の記憶が残っているのは当然かもしれない。

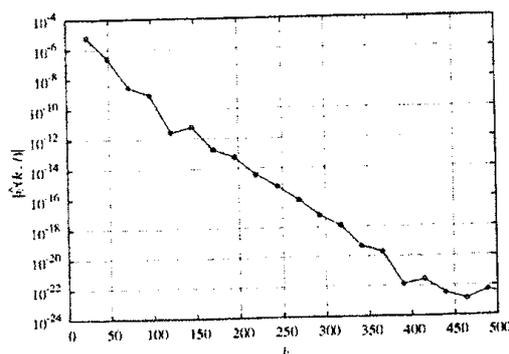


図 7: 初期時刻をこえた ($t = 1.9$) 時刻における、波数空間 (k_1, k_2) 上で $k_2 = (7/10)k_1$ にそったフーリエ係数の絶対値。初期条件は式 (5) で、漸近モデルではなく、2 次元オイラー方程式のスペクトル法の結果である。この時刻では直線 $k_2 = (7/10)k_1$ が、フーリエ係数の減衰が最も遅い方向になる。

それでは、逆に、初期条件の記憶がなくなるであろう時間帯、すなわち時刻が非常に大きいところで解析したらどうだろう? ということになる。実は時刻が大きくなると、異なる問題が生じる。複素特異性は時間とともに実空間に近付くが、実空間に非常に近い部分が複数出て来てその距離がどれも同じ程度であると、フーリエ係数が振動を示すようになる (図 7)。3 次元非粘性 Kida-Pelz 流での例も報告されている [11]。このため、 α や δ といった指数が直接計測不可能になってしまう。この振動自体が重要な情報を持っていると予想されるが、その性質はまだよく理解されていない。これも将来の課題であり、特に 3 次元の場合に (実空間) 有限時間爆発と複素特異性との関連を探る際には致命的に重要になると思われる。

本研究は文科省科学研究費補助金(若手研究(B), 課題番号 1574023)の補助をうけた。また、数値計算の一部は京大基礎物理学研究所の計算機システムを利用した。

参考文献

- [1] 坂上貴之 “渦層の時間発展と特異点 ~それでも渦層は巻き上がる?~”, 物性研究 82-1, (2004).
- [2] 木田重雄 “2次元流の特異性について”, 京都大学数理解析研究所講究録 652, 64-87 (1988).
- [3] Y. Kimura and R.B. Pelz “Search for complex time singularities in Navier–Stokes turbulence” in *Unstable and Turbulence Motion of Fluid*, pp.91-101, eds. S. Kida, World Scientific, Singapore (1994).
- [4] C. Sulem, P.-L. Sulem, and H. Frisch, “Tracing complex singularities with spectral methods”, *J. Comput. Phys.* **50**, 138-161 (1983).
- [5] G.F. Carrier, M. Krook and C.E. Pearson, *Functions of a Complex Variable: Theory and Technique*, McGraw-Hill, New York (1966).
- [6] 多倍長計算をソフトウェア的に可能にするライブラリがある。例えば、<http://crd.lbl.gov/dhbailey/impdist/> に幾つかの紹介がある。本研究では、D.H. Baileyの開発したMPFUN90を用いている。
- [7] U. Frisch, T. Matsumoto and J. Bec, “Singularities of Euler flow? Not out of the blue!”, *J. Stat. Phys.* **113**, 761-781 (2003).
- [8] T. Matsumoto, J. Bec and U. Frisch, “The analytic structure of 2D Euler flow at short times”, *Fluid Dyn. Res.* **36**, 221-237 (2005).
- [9] U. Frisch, “The analytic structure of turbulent flows”, in *Proceed. Chaos and statistical methods*, Sept. 1983, Kyoto, Y. Kuramoto, ed. pp. 211-220, Springer (1984).
- [10] W. Pauls, T. Matsumoto, J. Bec and U. Frisch, “Nature of complex singularities for the 2D Euler equation” in preparation.
- [11] C. Cichowlas and M.-E. Brachet, “Evolution of complex singularities in Kida–Pelz and Taylor–Green inviscid flows”, *Fluid Dyn. Res.* **36**, 239-248 (2005).