

# レイリー・ベナール対流における 線形固有値の分裂と非線形解の分岐特性\*

鳥取大学応用数理工学科 加藤由紀・藤村薫

Yuki KATO and Kaoru FUJIMURA

Department of Applied Mathematics and Physics, Tottori University

## 1 はじめに

下面が加熱され上面が冷却された矩形断面流路内の流れを考える。浮力の強さを特徴付けるレイリー数  $Ra$  がある臨界値よりも大きく、流路方向にある程度以上速い吹き抜け流が存在するとき、2次元のかつ定常な熱対流が発生する [1]。この定常対流は流路と平行な軸を持つロール状の流れであり、これを縦ロールと呼ぶ。

縦ロールのパターンは流路断面の縦横比  $A$  (=幅/高さ) によって変わる。熱伝導状態の線形安定性解析 [2] の結果、 $A$  が増えるにつれて、臨界レイリー数を与えるロールの数が増えることがわかっている (図 1)。また、高次の固有値<sup>1</sup> が与える中立曲線にも目をむけたとき、奇数個のロールに対する中立曲線と偶数個のロールに対する中立曲線は交わるが、同じ偶奇性を持つロールに対する 2 つの中立曲線は交わらないことが知られている [3, 4, 5]。

図 1 に示したものと同一ような、1 パラメタに依存する固有値がパラメタ-固有値平面において交わらない現象は、量子力学の分野でよく調べられている。固有値の物理的意味が多原子分子のエネルギー準位等である場合、このような非交差状態は、擬交差 (pseudo crossing) または交差回避 (avoided crossing) と呼ばれている。本稿ではこの用語を借りて、中立曲線が (交わりそうで) 交わらない状態のことを擬交差と呼ぶことにする。

本稿では、線形中立曲線の擬交差が非線形縦ロールに及ぼす影響を知ることが主な目的として、流路断面縦横比  $A$  を分岐パラメタとして縦ロール解の分岐特性を調べる。縦ロールの分岐に関しては、 $A = 1$  に固定して  $Ra$  を分岐パラメタとした解析が Mizushima and Adachi [6] によってなされている。

\* 標題では「線形」と「非線形」が同じ重みで並列されているが、本稿で扱う話題は主に非線形解の分岐特性であることをはじめにお断りしておく。講演申し込み時には縮退した線形固有値が分裂して擬交差を引き起こす過程についての詳しいレビューもやってみるつもりだったので、このような標題にしたが、結局講演時に線形問題についてのレビューはしなかった。

<sup>1</sup> 縦ロールに対する熱伝導状態の線形安定性を考えるとき、中立条件を求める問題はレイリー数を固有値として持つ固有値問題に帰着できる。

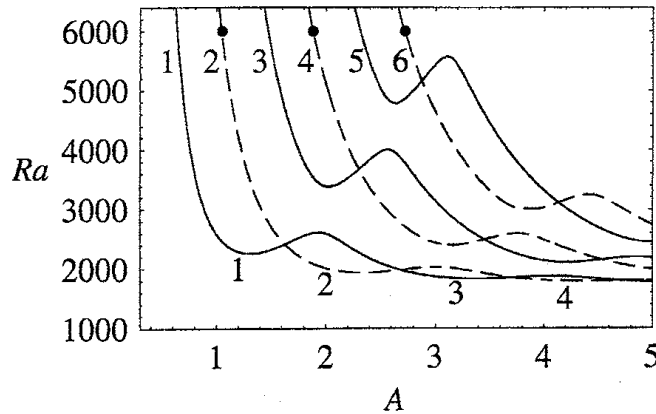


図 1: 縦ロールに対する中立曲線. 実線は奇数個のロールに対する中立曲線, 破線は偶数個のロールに対する中立曲線である. 曲線の傍の数字は水平方向に並ぶロールの数を表す.

## 2 支配方程式と解の対称性

十分発達した縦ロールは定常かつ流路方向に一様であり, その温度と流路断面内の流線関数は, 流路断面の2次元空間で閉じた方程式系に従う. そこで, 無限に長い流路における縦ロールの問題は, 2次元の箱の中の対流の問題に帰着する.

箱の中のブシネスク流体の運動を考える. 箱の上下壁を  $z^* = \pm h/2$ , 側壁を  $x^* = \pm d/2$  とし, 縦横比を  $A = d/h$  で定義する. 上下壁は  $z^* = \pm h/2$  において  $T^* = T_0 \mp \Delta T/2$  なる一定温度に保たれている. ここで,  $T_0$  は  $z^* = 0$  における参照温度,  $\Delta T (> 0)$  は上下壁の温度差である. 熱伝導状態の温度は  $T^* = \Theta^*(z^*) \equiv T_0 - \Delta T z^*/h$  となる.

長さ, 時間, 温度の代表量として箱の高さ  $h$ , 熱拡散の時間スケール  $h^2/\kappa$ , 温度差  $\Delta T$  を用いて, 変数を無次元化する. ここで,  $\kappa$  は熱拡散係数である. 無次元変数はアスタリスクをつけない記号で表す.

水平速度  $u$  と鉛直速度  $w$  を用いて, 流線関数  $\psi$  を定義する:  $\psi_z = u, \psi_x = -w$ . ここで, 下付きの添え字  $x$  と  $z$  は偏微分を表す. また, 温度  $T$  の熱伝導状態からのずれを  $\theta$  とする:  $\theta = T - \Theta$ . このとき, 縦ロールの流線関数  $\psi$  と温度  $\theta$  は次式に従う.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = Pr \nabla^4 \psi - Pr Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} + J(\psi, \nabla^2 \psi), \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 \theta - \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\psi, \theta). \quad (1b)$$

ただし,  $\nabla^2$  は2次元ラプラシアン  $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{zz}$ ,  $J$  はヤコビアン  $J(f, g) = f_x g_z - f_z g_x$  である.  $Pr$  はプラントル数である. 本稿では  $Pr$  を空気に対する値 0.71 に固定する.

境界条件として、全ての壁で粘着条件を課す。

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{on sidewalls}(x = \pm A/2), \quad (2a)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \theta = 0 \quad \text{on top and bottom walls}(z = \pm 1/2). \quad (2b)$$

側壁の温度について、講演では完全断熱条件と完全熱伝導条件の両方について触れたが、本稿では紙面の都合上完全断熱条件 (2a) のみを扱うことにする。

縦ロールは (1) の定常解である。定常解として、自明解 (これは熱伝導状態に相当する) から最初に分岐する非自明解には、偶数個のロールからなる解と奇数個のロールからなる解の 2 種類がある。自明解からの分岐点の集合は、図 1 に示した中立曲線に等しい。偶数ロール解は、

$$\psi(-x, z) = -\psi(x, z) \quad \text{and} \quad \theta(-x, z) = \theta(x, z) \quad (3)$$

なる対称性を持つ。奇数ロール解は、

$$\psi(-x, -z) = \psi(x, z) \quad \text{and} \quad \theta(-x, -z) = -\theta(x, z) \quad (4)$$

なる対称性を持つ。また、このような対称性をもつ解は、 $Pr$ ,  $Ra$ ,  $A$  の固定された値に対して必ず 2 つ同時に存在する。この 2 つの解は、互いに変換

$$z \rightarrow -z, \quad \psi \rightarrow -\psi, \quad \theta \rightarrow -\theta \quad (5)$$

で入れ替わる関係にある。

自明解から分岐した偶数ロール解や奇数ロール解が不安定化すると、これらとは別の種類の定常解がさらに発生する。この 3 つめの定常解は、 $x, z$  方向の反転に関して何の対称性も持たない偶奇混合モード解である。

定常解を特徴づける量として、鉛直方向の熱伝達を表すヌッセルト数を使う。上下壁におけるヌッセルト数  $Nu_{\pm}$  を次のように定義する：

$$Nu_{\pm}(x) = -\frac{\partial T}{\partial z}(x, \pm 1/2) = 1 - \frac{\partial \theta}{\partial z}(x, \pm 1/2). \quad (6)$$

(1) の自明解 (つまり熱伝導状態) においては、 $Nu_{\pm}(x) = 1$  である。解の大きさを特徴づける量として、上下壁の平均ヌッセルト数  $\overline{Nu}$  を使うことにする：

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2} (\overline{Nu}_+ + \overline{Nu}_-), \quad \text{where} \quad \overline{Nu}_{\pm} = \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} Nu_{\pm}(x) dx. \quad (7)$$

最後に、定常解の線形安定性を調べる方法を述べる。まず定常解を求め、そこに無限小擾乱  $(\hat{\psi}, \hat{\theta}) \exp(\sigma t)$  を加える。ここで、 $\sigma$  は擾乱の成長率で、一般に複素数である。 $(\hat{\psi}, \hat{\theta})$  は  $x$  と  $z$  の関数であり、定常解と同じ境界条件を満たす。定常解と擾乱の和を (1) に代入して得られる方程式を擾乱について線形化すると、 $\sigma$  を固有

値とし  $(\hat{\psi}, \hat{\theta})$  を固有関数とする線形固有値問題が得られる。この固有値問題を解いた結果、全ての固有値の実数部分が負なら定常解は線形安定、1つでも実数部分が正になる固有値があれば定常解は不安定である。

定常解が (3) なる対称性を持つとき、擾乱は定常解と同じ (3)、または

$$\psi(-x, z) = \psi(x, z) \quad \text{and} \quad \theta(-x, z) = -\theta(x, z) \quad (8)$$

なる対称性のいずれかを持つ。また、定常解が (4) なる対称性を持つときは、擾乱は定常解と同じ (4)、または

$$\psi(-x, -z) = -\psi(x, z) \quad \text{and} \quad \theta(-x, -z) = \theta(x, z) \quad (9)$$

なる対称性のいずれかを持つ。やや厳密さに欠ける表現だが、(3) または (9) を満たす擾乱は偶数ロール的であり、(4) または (8) を満たす擾乱は奇数ロール的であると言える。

### 3 数値解の分岐特性

この節では、(1) の定常解を数値的に求めた結果を説明する。数値計算法としてスペクトル法を用いた。計算法の詳細については文献 [7] を参照されたい。

定常解は偶数ロール解、奇数ロール解、偶奇混合モード解の3つに分けることができるが、まずは、偶奇性を一つに制限したときの解から説明する。例として偶数ロール解を扱うが、奇数ロール解の分岐構造もほぼ偶数ロール解と同じである。

偶数ロール解のみを考えたときの典型的な分岐図を図 2 に示す。図に示した3つの解は偶数ロールに対する1, 2, 3番目の中立曲線から分岐したものである。これらを第1, 2, 3番目の解と呼ぶことにする。  $Ra = 6000$  における分岐点は  $A = 1.04, 1.88, 2.72$  である (図 1 の黒丸)。

解の枝は2つのサドルノード分岐点を含む輪をなしている。枝が自分自身と交差する点があるが、この点は分岐点ではない。解の大きさとして  $\overline{Nu}$  を使ったためにたまたま交差しているが、別の指標を使えば交差はしない。また、同様に第  $n$  番目の解と第  $n+1$  番目の解の枝が交差している点も分岐点ではない。

第1番目の解は、自明解からの分岐点の近くでは2ロールであるが、 $A$  が大きくなると4ロール、6ロールに変化する。解の枝が輪をなしている部分では、図 3 に示したように、対流パターンは  $n$  ロールから  $n+2$  ロールへ連続的に変わる。また、第2番目と3番目の解は、分岐点近くでは、各々ロールの大きさがやや不揃いな4ロールと6ロールである。 $A$  が大きくなると、ロールの個数が増え、また個々のロールの大きさがますます不揃いになる。

定常解の線形安定性を調べた結果、2番目と3番目の解はいつも不安定であった。1番目の解について、定常解と同じ対称性を持つ [つまり (3) を満たす] 擾乱の成長率を  $\sigma_1$ 、(8) を満たす擾乱の成長率を  $\sigma_2$  とすると、いつも  $\sigma_2 > \sigma_1$  であった。つ

まり、定常解の安定性は  $\sigma_2$  の符号によって変わる。  $\sigma_2 = 0$  となる点を図 2(b) に黒丸で示した。解の枝が輪をなす部分では、  $\sigma_2 = 0$  となる点は  $\sigma_1 = 0$  の点 (サドルノード分岐点) の極く近くに存在する。したがって、輪の部分のほとんどの  $A$  の値に対しては、  $n$  ロールと  $n+2$  ロールの 2 種類の解が安定である。

定常解が不安定になる点は偶奇混合モード解への分岐点である。図 4 に、偶数ロール解と奇数ロール解を重ねて偶奇混合モード解の枝を示す。全ての解の枝を重ねると見にくいので、偶奇混合モード解のみ図 4(a) と (b) の二つに分けた。偶奇混合モード解は、偶数ロール解が奇数ロール的擾乱に対して不安定になる点と奇数ロール解が偶数ロール的擾乱に対して不安定になる点とを結んでいる。例えば、(a) にしめした左側の枝は、2 ロールが 3 ロール的擾乱に対して不安定になる点と 3 ロールが 2 ロール的擾乱に対して不安定になる点とを結んでいる。この解の表す対流パターンを図 5 に示す。解の枝にそって、  $A$  の大きいときの横ののびた 2 ロールから、  $A$  の小さい領域に窮屈に押し込まれた 3 ロールへと対流パターンは変化する。今回調べた限りにおいて、偶奇混合モード解は全て不安定であった。

さて、ここまでで、解の枝が輪をなす部分に安定な解が複数個存在することがわかった。ところで、図 1 に示したように、ある偶奇性の縦ロールに対する中立レイリー数は  $A$  に対してなめらかに変化している。したがって、縦ロールの偶奇性を固定したならば、  $Ra$  が臨界値に十分近いときには、非自明な定常解は [変換 (5) で入れ替わる解を同一視すれば] ただ 1 つであることが予想される。そこで、1 つの解から 3 つの解へ解が分岐する様子を調べるために、  $Ra$  の幾つかの値について  $A$  の関数として解を求めてみた。

図 6 は、偶数ロール奇数ロールそれぞれの 1 番目の解の分岐図である。2 ロールと 4 ロールをつなぐ部分に着目してみると、  $Ra$  が十分小さいとき ( $Ra = 2500$ ) には、たしかに  $\overline{Nu}(A)$  は 1 価である。  $Ra = 3000$  では解の枝に極く小さい輪があり、この輪の部分で  $\overline{Nu}(A)$  は 3 価である。  $Ra = 2500$  から 3000 までの間のどこかの  $Ra$  の値 (これを  $\tilde{Ra}$  としよう) において、  $\overline{Nu}(A)$  は 1 価から 3 価に変わる。  $Ra = \tilde{Ra}$  において、  $\overline{Nu}(A)$  は傾き  $d\overline{Nu}/dA$  が無限大になる点を 1 つだけ持つ。この点をカスプと呼ぶことにする。  $Ra > \tilde{Ra}$  における、2 つのサドルノード分岐点 (輪の端) は、このカスプにつながっている。

2 つのサドルノード分岐点がカスプにつながる様子を図 7(a),(b) に示す。サドルノード分岐点の集合は  $A - Ra$  平面で楔型をなす。楔形の内部が解の枝が輪をなしている領域である。この領域で  $n$  ロールと  $n+2$  ロールは (同じ偶奇性を持つ擾乱に対して) 安定である。図中の濃い灰色の領域では、同じ偶奇性を持つ 3 つ以上の解が同時に安定になる。

図 7(c) は、偶奇性を分けずに安定な解の存在領域を全て重ねて描いたもので、色の濃い領域ほど安定な解の個数が多い。今回の計算では 9 個以上のロールからなる解は求めていないが、1 から 8 個のロール解の安定領域から判断すると、  $A$  と  $Ra$  の値が大きくなるほど安定な解の個数が増えると言える。

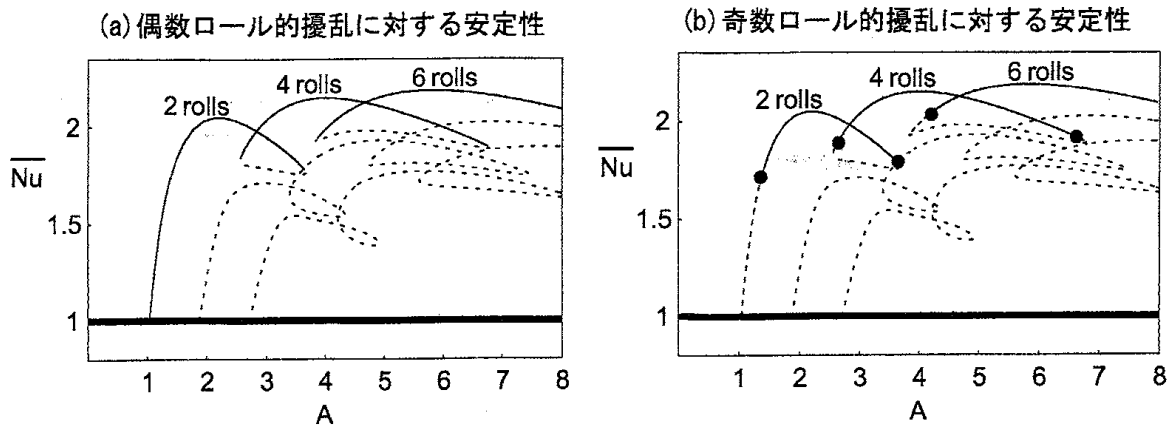


図 2:  $Ra = 6000$  のときの偶数ロール解. (a),(b) は同じ解を表しており, 線の種類の意味だけが異なる. (a) の実線 (点線) は偶数ロール的擾乱に対して安定 (不安定) な解を表す. (b) の線の種類は同じ解の奇数ロール的擾乱に対する安定性を示す. (b) の黒丸は偶奇混合モードへの分岐点である. 太い実線  $\overline{Nu} = 1$  は自明解を表す.

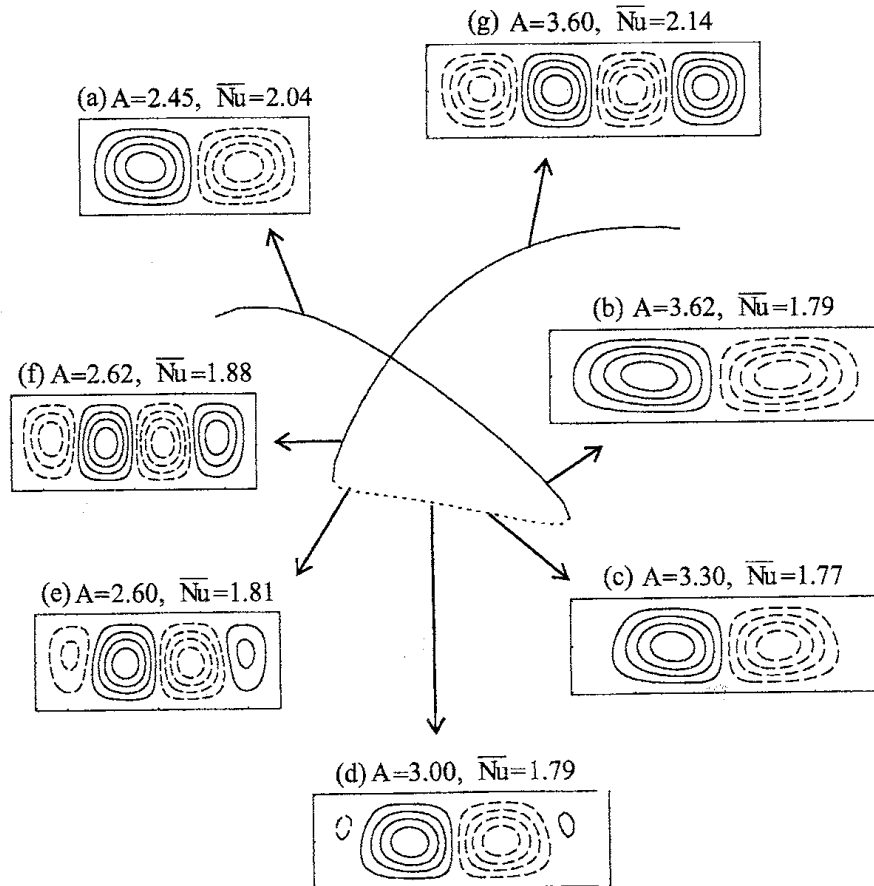


図 3:  $Ra = 6000$  における 1 番目の解の対流パターン (流線).

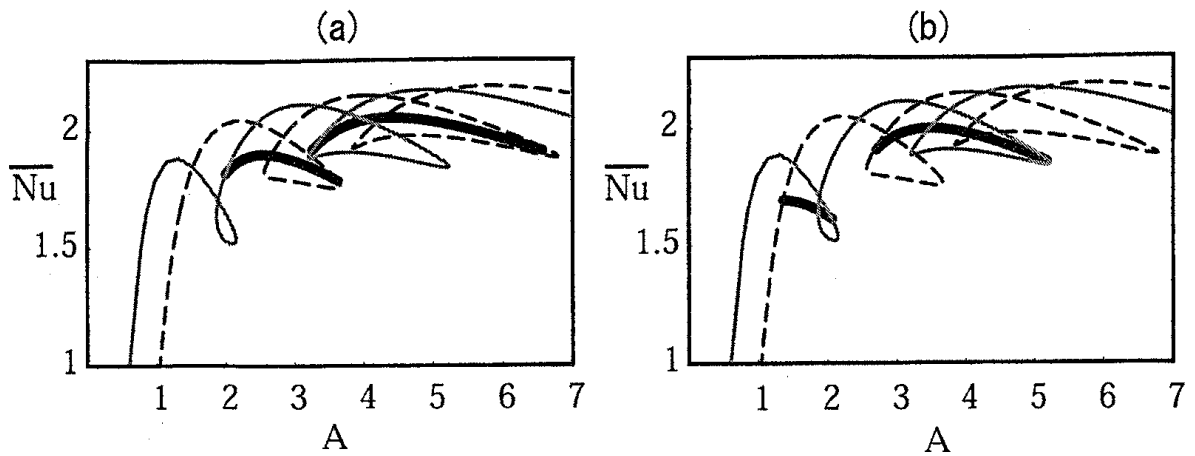


図 4:  $Ra = 6000$  における第 1 番目の解の分岐図. 細い実線が奇数ロール解, 破線が偶数ロール解, 太い実線が偶奇混合モード解を表す. (a) に示した偶奇混合モード解は, 左側の枝が 2 ロールと 3 ロールをつないでおり, 右側の枝が 4 ロールと 5 ロールをつないでいる. (b) に示した偶奇混合モード解は, 左側の枝が 1 ロールと 2 ロールをつないでおり, 右側の枝が 3 ロールと 4 ロールをつないでいる.

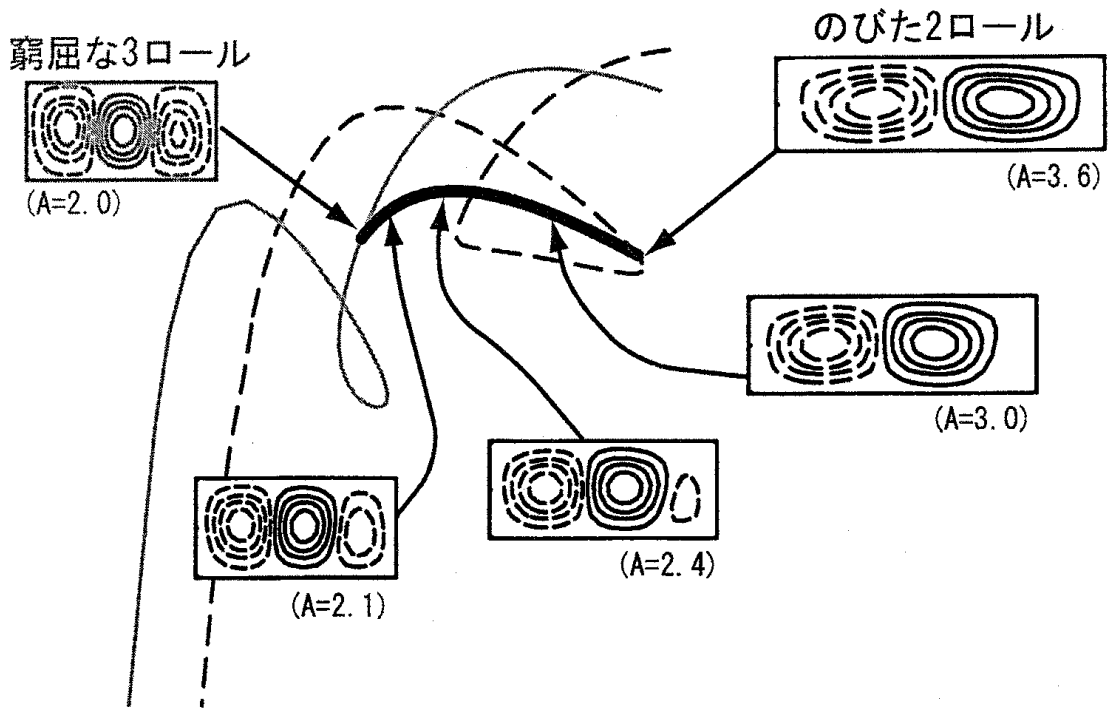


図 5: 偶奇混合モード解のパターン (流線).  $Ra = 6000$ .

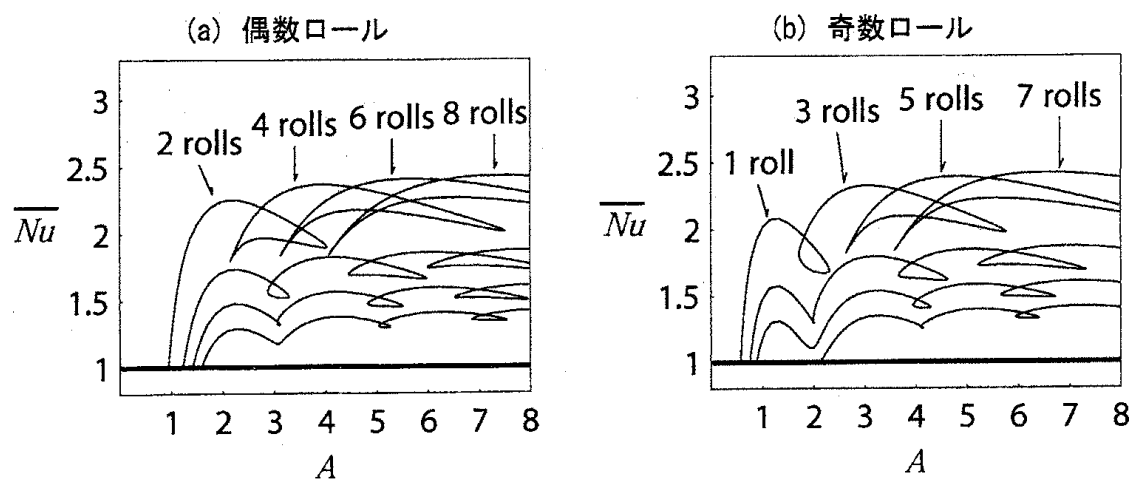


図 6: 第 1 番目の解の分岐図. 下から  $Ra = 2500, 3000, 4000, 8000$ . 太い実線  $\overline{Nu} = 1$  は自明解を表す.

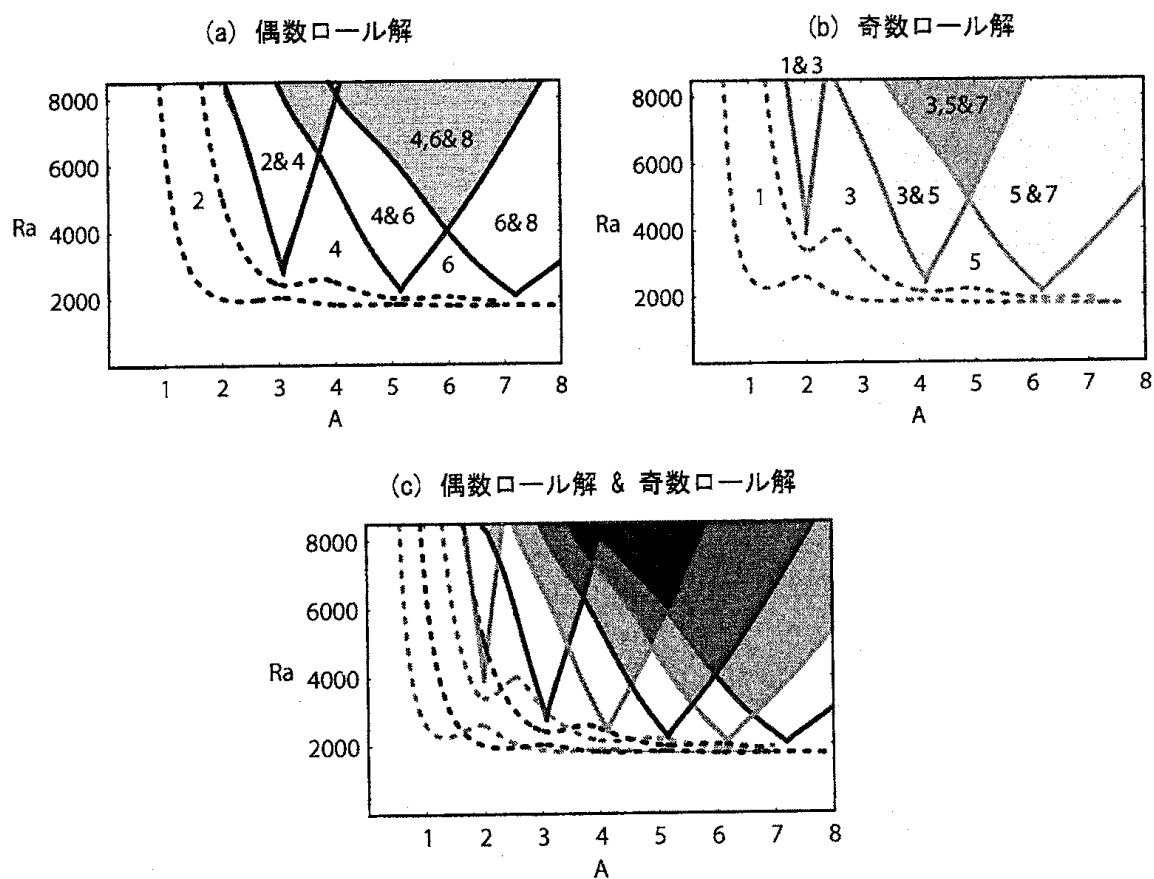


図 7: 安定な解の存在領域. 実線はサドルノード分岐点の集合, 点線は中立曲線を表す. 図 (a),(b) 中の数字はロールの個数を示す. 例えば 4,6 & 8 は 4,6,8 ロールの 3 つの解が安定であることを示す.



多くの線形安定な解のうち、実験ではどのような対流パターンが実現されるだろうか。文献 [8] では、縦横比  $A = 3.6$  の流路を使った実験で大概 4 ロール、たまに 3 ロールが観察されたと報告されている。また、 $A = 12$  の流路において ( $Ra$  の値はやや異なるが) 10 ロールと 12 ロールが実現したとの報告もある [9]。複数のロール解が安定なパラメタ領域においては、初期条件の違いによって異なるロールパターンが実現し得るのだろう。

実験では流路の縦横比  $A$  を連続的に動かすことが困難なので、図 7 に示したロール解の多重安定性を直接実験的に検証するのは難しいかもしれない。しかし、検証が全く不可能だとは思わない。 $Ra$  がある程度高いところで (例えば人為的に温度の不均一性を作ることによって<sup>2)</sup> 望むロールパターンを作っておき、その後  $Ra$  を徐々に下げてそのロールパターンの安定限界を決めるようなことをすれば、部分的ではあっても検証はできるのではなかろうか。

## 4 線形中立曲線の擬交差と非線形解の輪

前節では、定常解の偶奇性を 1 つ決めたとときに解の枝に組になった 2 つのサドルノード分岐点を伴う輪が生じることを示した。この節では、この輪と中立曲線の擬交差との関係を簡単な連立振幅方程式を用いて考えてみる。偶奇性の異なる 2 種のロールに対する振幅方程式は文献 [11, 12] で得られている。ここでは、偶奇性の等しい 2 種のロールに対する振幅方程式を考える。

### 4.1 振幅方程式系の形式的導出

流体の基礎方程式から  $n$  ロールと  $n + 2$  ロールの振幅に対する振幅方程式系を導きたい。そのためには 2 つの定常ロールが同時に発生する固有値の縮退した分岐点が必要である。ところが、図 1 からわかるように、ロールの偶奇性を 1 つ選んだときそのような分岐点は存在しない。そこで、分岐点を作るために、Mizushima and Nakamura [5] の真似をして、次の境界条件を導入する。

$$\psi = \delta \frac{\partial \psi}{\partial x} \pm (1 - \delta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{on} \quad x = \pm A/2. \quad (10)$$

(2a) の代わりに (10) を使うと、 $\delta = 0$  のときには考えるべき問題を水平方向に周期的なものに拡張できる<sup>3)</sup>。そのとき、ロールの偶奇性に依らず全ての中立曲線は交差するので、同じ偶奇性を持つ異なる 2 つのロール解が同時に分岐することが可能となる。この分岐点において異なるロール解を表す 2 つの線形固有関数は

<sup>2)</sup> 水平方向に無限に広がる系で熱対流ロールの発展を調べた実験 [10] では、thermal imprinting と呼ばれる手法によって、様々な望む波長のロールパターンを実験的に作り出している。

<sup>3)</sup> 拡張された系における周期解のうちある対称性を持つものがもとの系の解となる。この拡張によって、 $\delta = 0$  の系には ( $\delta \neq 0$  の系には無い) 隠れた対称性が存在することがわかる [13]。

直交する。  $\delta > 0$  のときには偶奇性の等しいロールに対する中立曲線は擬交差となり、  $\delta$  の増大とともに2つの中立曲線は離れていく [5]。  $\delta = 1$  では (2a) の粘着条件が復活する。

以下では、 (1), (2b), (10) に基づいて偶奇性の同じ2種類のロールに対する振幅方程式を形式的に導き、振幅方程式の平衡解として前節で得られた数値解と定性的に同じものが得られることを示す。

$\delta = 0$  において、  $n$  ロールと  $n + 2$  ロールに対する2つの中立曲線が  $(A, Ra) = (A^*, Ra^*)$  で交差するとする。

$$A = A^* + \epsilon^2. \quad (11)$$

によって微小パラメタ  $\epsilon$  を定義し、交差点の近傍  $O(\epsilon^2)$  を考える：

$$Ra = Ra^* + \epsilon^2 \tilde{R}, \quad \delta = \epsilon^2 \tilde{\delta}. \quad (12)$$

ここで、  $\tilde{R}$  と  $\tilde{\delta}$  は  $O(1)$  である。変数  $\mathbf{u} \equiv (\psi, \theta)^T$  を

$$\mathbf{u} = \epsilon \mathbf{u}_1 + \epsilon^2 \mathbf{u}_2 + \epsilon^3 \mathbf{u}_3 + \dots \quad (13)$$

のように展開する。ただし、  $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j(t_1, t_2, \dots)$  ( $t_n = \epsilon^{2n} t$ ) はゆっくり変化する関数である。

(11)-(13) を (1), (2b), (10) へ代入して、  $\epsilon$  の各オーダーで得られる式を逐次解いていくと、  $O(\epsilon^3)$  で得られる式の可解条件から次の振幅方程式が得られる。

$$\frac{da}{dt} = (\lambda_{aR} dR + \lambda_{aA} dA) a + \lambda_1 a + \lambda_2 b - \mu_1 a^3 - \mu_2 b^2 a, \quad (14a)$$

$$\frac{db}{dt} = (\lambda_{bR} dR + \lambda_{bA} dA) b + \lambda_3 a + \lambda_4 b - \mu_3 a^2 b - \mu_4 b^3. \quad (14b)$$

ここで、  $a, b$  はおのおの  $n$  ロール、  $n + 2$  ロールの振幅を表す。また、  $(dA, dR) = (A - A^*, Ra - Ra^*) = (\epsilon^2, \epsilon^2 \tilde{R})$  である。添え字の付いた  $\lambda$  と  $\mu$  は全て実定数である。

振幅方程式 (14) の係数の値を求めるには少し面倒臭い計算が必要である。そこで、ここでは既知の状況と矛盾のないように適当に係数を決めて、前節で得られた数値解を説明するために最低限必要な項のみを残した単純なモデルを考えることにする。

4つの係数  $\lambda_j$  ( $j = 1-4$ ) は  $\tilde{\delta}$  に比例しており中立曲線の“非交差度”を表しているが、これら4つのうち擬交差を実現するために不可欠なのは  $\lambda_2$  と  $\lambda_3$  だけである。そこで、簡単のため  $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  とおく。他の線形項については、(14) が数値的に得られる中立曲線の傾きや縦ロールの線形増幅率と定性的に等しいものを与えるように、  $\lambda_{aR} = \lambda_{bR} = \lambda_{bA} = 1$ ,  $\lambda_{aA} = -1$  とおく。さらに、縦ロールが超臨界分岐であること [14, 15, 16] から  $a^3$ ,  $b^3$  の係数は正でなければならない。そこで、  $\mu_1 = \mu_4 = 1$  とおく。

以上のように係数を適当におくと、次式が得られる。

$$\frac{da}{dt} = (dR - dA)a + \lambda b - a^3 - \mu_2 b^2 a, \quad (15a)$$

$$\frac{db}{dt} = (dR + dA)b + \lambda a - \mu_3 a^2 b - b^3. \quad (15b)$$

非線形項  $b^2 a$  と  $a^2 b$  の係数の符号は、既存の研究結果からは決めることができない。ここでは2種のロールが同時に安定になれるように、 $\mu_2, \mu_3$  がともに正で、 $D \equiv 1 - \mu_2 \mu_3 < 0$  を満たすようにとることとする。

ここで、(15) と関連する研究で扱われた方程式との関係について触れておく。(15) において、 $da/dt = db/dt = 0$  として  $\mu_2 b^2 a$  と  $\mu_3 a^2 b$  を無視すると、Cliffe and Winters [4] が中立曲線の擬交差を示した式と同じものが得られる。さらに、 $a^3$  と  $b^3$  を落とすと Mizushima and Nakamura [5] の導いた線形問題と本質的に同じものが得られる。また、(15) と似た形の  $n$  ロールと  $n+2$  ロールについての振幅方程式系は、有限長さの2円筒間のテイラーケット流について導かれている [17]。円筒の長さが有限の場合、円筒の長さ方向に一樣な円筒ケット流は実現されず、円筒の回転によって誘起される流速は円筒の終端に近づくほど遅くなる。この速度差に起因する不完全性のために、定常ロールの分岐は不完全になり、円筒の(有限の)長さが与えられたときの臨界レイノルズ数は0になる。このことを反映して、テイラーケット流における振幅方程式系は、(15) 中の  $\lambda$  を含む項を取り去り  $a, b$  を含まない定数項を付け加えた式になっている。

## 4.2 振幅方程式系の平衡解

以下では式(15)の平衡解について説明する。まず  $\lambda = 0$  の解を考えよう。 $\lambda = 0$  は(10)において  $\delta = 0$  のときに実現する。つまり中立曲線が交差するときに相当する。このとき、平衡解として次の4種類がある：

- (i) 自明解 (熱伝導状態)  $a = b = 0$ ,
- (ii) 純粋な  $a$  モード ( $n$  ロール)  $a = \pm \sqrt{dR - dA}$ ,  $b = 0$ ,
- (iii) 純粋な  $b$  モード ( $n+2$  ロール)  $a = 0$ ,  $b = \pm \sqrt{dR + dA}$ ,
- (iv) 混合モード  $a = \pm \sqrt{D_a/D}$ ,  $b = \pm \sqrt{D_b/D}$ ,  $D_a = (dR - dA) - \mu_2(dR + dA)$ ,  $D_b = (dR + dA) - \mu_3(dR - dA)$ . ここで、複合は同順でない。

図 8(a) にこれら4種の解の安定性相図を示す。混合モード解は、 $D_a < 0$  かつ  $D_b < 0$  を満たす灰色の楔形の領域だけに存在する。この領域では、 $a$  モードと  $b$  モードが共に安定で、混合モードは不安定である。楔型領域を横切るような  $dR$  の値において、 $dA$  を分岐パラメタとして描いた分岐図の典型例を図 9(a) に示す。

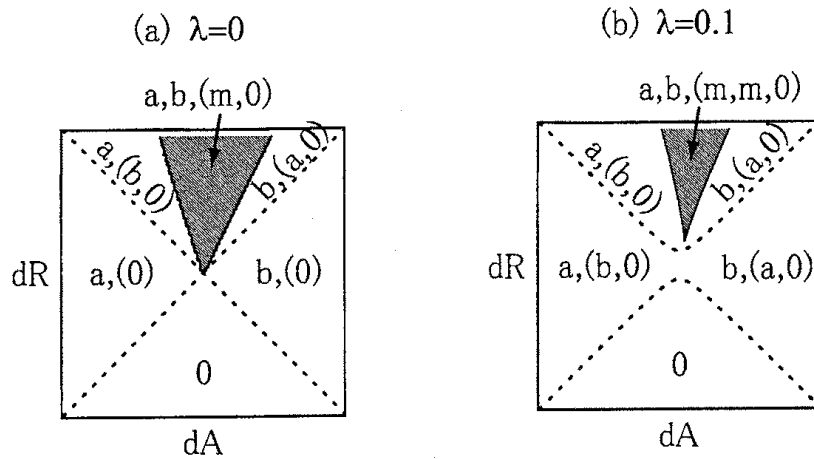


図 8: 平衡解の存在領域. 点線は中立曲線を表す. 0, a, b, m はそれぞれ自明解, a モード, b モード, 混合モードを表す. かつこのないものは安定な解, かつこの内ものは不安定な解である.  $\mu_2 = 2, \mu_3 = 3$ .

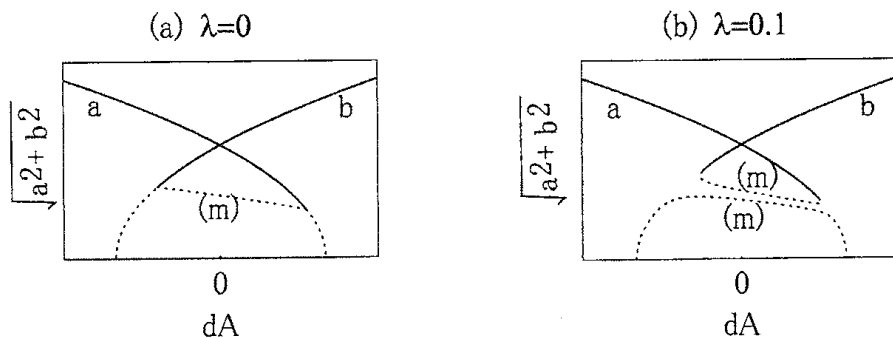


図 9:  $dA$  を分岐パラメタとした分岐図. 実線は安定な解, 点線は不安定な解である.  $\mu_2 = 4, \mu_3 = 10, dR = 0.1$ .

純粋な  $a$  モード解は  $a > 0$  と  $a < 0$  の 2 つが存在するが, これらは同じ  $n$  ロールパターンで回転の向きが逆のものに相当する. 純粋な  $b$  モード解も同様である.

混合モード解は, 2 つの純粋な解からの 2 次分岐によって生じる. この 2 次分岐はピッチフォーク分岐である. 図 10(a) に,  $b$  モード解の上のピッチフォーク分岐点から混合モードが分岐する様子を示した. この図は図 9 の左半分 ( $dA < 0$ ) を拡大したスケッチで, 見やすくするため自明解と  $a$  モードは描かれていない. 4 つの混合モード解は, ノルム  $\sqrt{a^2 + b^2}$  で見ると重なって 1 つに見えるが, これらのうち変換  $a \rightarrow -a$  &  $b \rightarrow -b$  で入れ替わる 2 つの解の組が同じ対流パターンを与える.

さて, 次に  $\lambda \neq 0$ , つまり中立曲線が擬交差のときの解を考えよう. この場合, 純粋なモードは存在できず, 自明解を除く全ての平衡解は零でない  $a, b$  の成分を持つ. 以下では,  $\lambda = 0$  のとき  $a$  モードであった解を  $\lambda \neq 0$  のときも  $a$  モードと呼ぶことにする.  $b$  モード, 混合モードという言葉も同じ意味で使う.

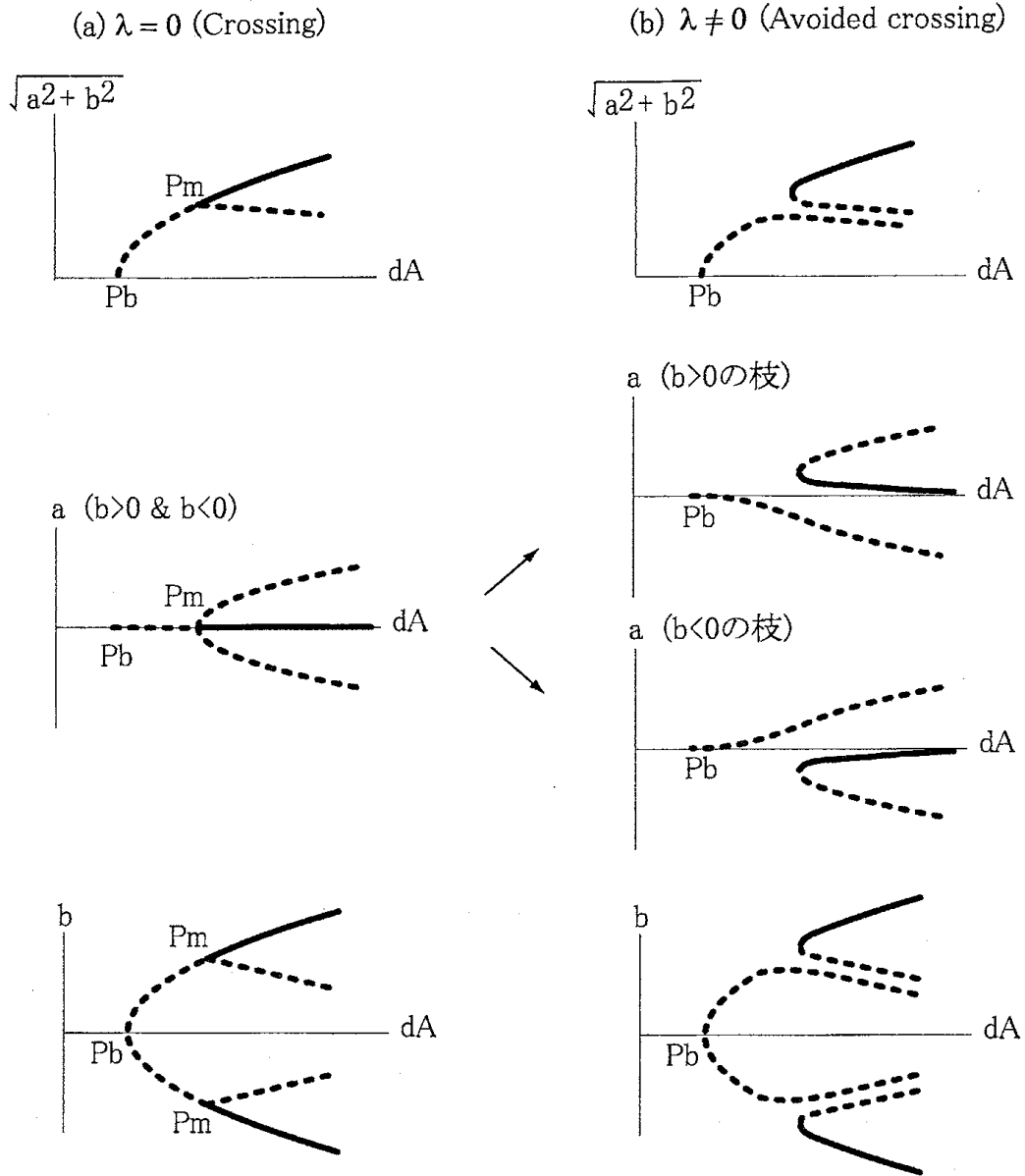


図 10:  $\mu_2 = 4, \mu_3 = 10, dR = 0.1$  のときの  $b$  モードと混合モードの分岐の概略図. 実線は安定, 点線は不安定な解.  $P_b$  は自明解から  $b$  モードが分岐する分岐点,  $P_m$  は  $b$  モードから混合モードが分岐する分岐点を示す. 摂動  $\lambda \neq 0$  によって,  $P_b$  の分岐構造は保たれるが  $P_m$  は壊れる.

図 8(b), 9(b) に  $\lambda \neq 0$  の解の存在領域と分岐図を示す。また, 図 10(b) に  $b$  モードと混合モードの枝のスケッチを示す。このスケッチは,  $\mu_2 = 4, \mu_3 = 10, dR = 0.1, \lambda = 0.1$  のときの解に基づいてかきおこしたものである。

図 10(b) から, 混合モード解のピッチフォーク分岐が構造不安定であり, 摂動  $\lambda \neq 0$  によって壊れることがわかる。  $a$  モード,  $b$  モードの分岐もピッチフォーク分岐だが, これらは摂動  $\lambda \neq 0$  によっては壊れない。 2つの分岐点  $P_m$  が壊れた結果, 4つの混合モード解はノルムの値が異なる2つの組に分裂する。 そのうち1組は安定な  $a$  モードと  $b$  モードにつながり, 残りの1組が不安定な  $a$  モードと  $b$  モードにつながる。 その結果, 図 9(b) のように解の枝には輪ができる。

図 9(b) の輪を含む上の枝は, 図 2 の1番目の枝と定性的に一致している。 また, 図 8(b) において  $a, b$  両モードがともに安定になる領域は, 中立曲線から離れた点にカuspをもつ楔形になっていて, これは数値的に得られた多重解の存在領域(図 7)と定性的に一致している。 これらのことから, 数値的に得られた輪をなす枝は, 中立曲線の擬交差のために現れたと結論できる。

数値解では2番目3番目の枝にも輪がある(図 2)が, 振幅方程式の解では下の枝には輪がない(図 9(b))。 数値解の2番目3番目の枝の輪は, より高次の固有値の与える中立曲線同士の擬交差を考慮することによって説明できると考えられる。

### 4.3 おまけ

最後に, おまけとして, 振幅方程式の解を数値解と定量的に比べた結果を図 11 に示す。 振幅方程式(14)の係数を, 数値的に得られた線形中立曲線の傾き等と矛盾しないように適当に決めようとして, 2ロールと4ロールの共存領域を比較した。 振幅方程式から得られる安定な解の存在領域は数値解から得られるものと定量的にも一致した。

振幅方程式は中立曲線の交差点  $(\delta, A, Ra) = (0, A^*, Ra^*)$  の  $O(\epsilon^2)$  近傍で得られたものであるから, その解は本来数値解(これは  $\delta = 1$  に対して得られた解)と定量的に一致する必要はない。 図 11 は, 振幅方程式の解がその適用範囲外でも数値解とたまたまうまく一致することがあるということを示しているにすぎない。 あまりにもきれいに一致したものだから, おまけとして提示してみた次第である。

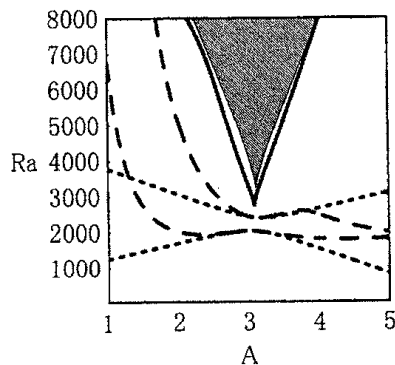


図 11: 2ロールと4ロールが安定に共存する領域。破線は数値的に得られた( $\delta = 1$ に対する)中立曲線, 点線は式(14)から得られる中立曲線, 実線は数値解における共存領域の縁, 灰色の領域は式(14)から得られる共存領域。式(14)に含まれる係数の値は次のようにとった:  $A^* = 3.1, Ra^* = 2220, \lambda_{aR} = 0.0042, \lambda_{aA} = -1.9, \lambda_{bR} = 0.0045, \lambda_{bA} = 3.3, \mu_1 = 25, \mu_2 = 38, \mu_3 = 38, \mu_4 = 29, \lambda_1 = \lambda_4 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.8$ 。

研究集会の際に、図9(b)に示したような混合モード解の分裂は、ピッチフォーク分岐の構造不安定性によって説明できることを指摘して下さった大阪大の小川知之博士に感謝致します。

## 参考文献

- [1] Platten, J. K. and Legros, J. C.: Convection in Liquids, Springer-Verlag, Berlin, Chap. VIII, Sec. 4, 556, 1983.
- [2] 例えば, Luijkx, J. M. and Platten, J. K.: J. Non-Equilib. Thermodyn., Vol. 6, 141, 1981.
- [3] Jackson, C. P. and Winters, K. H.: International J. Numer. Methods Fluids, Vol. 4, 127, 1984.
- [4] Cliffe, K. A. and Winters, K. H.: J. Comput. Phys., Vol. 67, 310, 1986.
- [5] Mizushima, J. and Nakamura, T.: J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 71, 677, 2002.
- [6] Mizushima, J. and Adachi, T.: J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 66, 79, 1997.
- [7] 加藤由紀, 藤村薫: 鳥取大学工学部研究報告, Vol. 35, 47, 2004.
- [8] Ouazzani, M. T., Platten, J. K. and Mojtabi, A.: Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 33, 1417, 1990.
- [9] Chang, M. Y., Yu, C. H. and Lin, T. F.: Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 40, 347, 1997.
- [10] Chen, M. M. and Whitehead, J. A.: J. Fluid Mech., Vol. 31, 1, 1968.
- [11] Kidachi, H.: Prog. Theor. Phys., Vol. 64, 1861, 1980; Vol. 68, 49, 1982.
- [12] Knobloch, E. and Guckenheimer, J.: Phys. Rev., Vol. A 27, 408, 1983.
- [13] Golubitsky, M. and Stewart, I.: The symmetry perspective — from equilibrium to chaos in phase space and physical space. Birkhäuser Verlag, Chap. 7, 2002.
- [14] Gor'kov, L. P.: Zh. Eksp. Theor. Fiz., Vol. 33, 402, 1957 [Sov. Phys. JETP, Vol. 6, 311, 1958].
- [15] Malkus, W. V. R. and Veronis, G.: J. Fluid Mech., Vol. 4, 225, 1958.
- [16] Schlüter, A., Lortz, D. and Busse, F.: J. Fluid Mech., Vol. 23, 129, 1965.
- [17] Hall, P.: Proc. Roy. Soc. Lond., Vol. A384, 359, 1982.