数理解析研究所講究録 1455 巻 2005 年 78-94

一般的なバナッハ空間における漸近的非拡大写像の共通不動点への近似
(Approximating to a common fixed point of an asymptotically nonexpansive semigroup in a general Banach space)

東京工業大学・情報理工学研究科 江下 和章 (Kazutaka Eshita)
東京工業大学・情報理工学研究科 三宅 啓道 (Hiromichi Miyake)
東京工業大学・情報理工学研究科 高橋 渉 (Wataru Takahashi)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology

1 概要

本論文は、論文 [7] の主な内容を邦訳したものである。

1975 年、Baillon [3] はヒルベルト空間上の非拡大写像に対する以下の非線形エルゴード定理を得た：C をヒルベルト空間の閉凸部分集合とし、T を C から C への非拡大写像とする。ここで写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとはすべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ がなりたつことをいう。もし T の不動点集合 $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ が空でないなら、すべての $x \in C$ に対して、その Cesàro 平均列

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

がある $y \in F(T)$ に弱収束する。このとき、$y = Px$ で表すとすると、P は C から $F(T)$ の上への nonexpansive retraction で、$PT = TP = P$ および $Px \in \overline{\mathrm{co}}\{T^n x : n = 1, 2, \ldots\}$ をみたす。ここで $\overline{\mathrm{co}}\, A$ は集合 A の凸包の閉包である。Day[6] による半群の平均の理論を用いることにより、高橋 [26, 27] は非拡大写像の半群に対する ergodic retraction の概念を提唱し、ヒルベルト空間上で定義された非拡大写像の amenable 半群に対する ergodic retraction の存在性を証明した。この後、Lau・塩路・高橋 [13] は、この結果を一様凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつバナッハ空間に対して完全に拡張した。

他方、清水・高橋 [19, 20] は非拡大写像族の共通不動点を求める最初の逐次近似法を提唱し、ヒルベルト空間上での有限個の非拡大写像および実数値パラメータをもつ非拡大写像の半群に対する強収束定理を得た。この後、多くの数学者が非拡大写像族の共通不動点を求める逐次近似法を研究した。(参考：[2, 21, 28]) たとえば、厚芝・高橋 [1] はバナッハ空間上の可換な 2 個の写像 S, T に対する以下で定義された Mann 型の逐次近似法を研究した：

$$x_0 \in C,$$
$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} S^i T^j x_n + (1 - \alpha_n)x_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ここで $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ 上で定義された数列である。(注：Mann 型逐次法は Krasnoselski-Mann 逐次法をもとにしているが、写像の平均を用いる点で異なっている。Krasnoselski-Mann 逐次法（あるいは単に Mann 逐次法）に関しては [10, 12, 15, 18] を参照のこと。)

2001 年、鈴木・高橋 [24] はあるバナッハ空間のコンパクトな定義域 C をもつ非拡大写像 T で、Cesáro 平均列

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

が収束しないものを構成した。この反例を動機として、鈴木 [22] は一般的なバナッハ空間上で定義され、コンパクトな定義域をもつ可換な 2 個の非拡大写像に対する Mann 型逐次近似列の強収束定理を証明した。また、鈴木・高橋 [25] は実数値パラメータをもつ非拡大半群に対して同様の定理を得た。これらの結果は高橋・善林 [29] により漸近的非拡大写像族に対して拡張された。(漸近的非拡大写像については Goebel-Kirk[8] を見よ。) 最近、三宅・高橋 [16] は一般的なバナッハ空間のコンパクト集合上で定義された非拡大写像の半群に対して、ergodic retraction の理論に基づき、その共通不動点を求める逐次法を提唱した。

本論文では、抽象的概念で定義された可換な漸近的非拡大写像族の共通不動点を求める強収束定理を証明する。

2 準備

本論文を通じて、E を実バナッハ空間とし、その元 $x \in E$ のノルムを $\|x\|$ で表す。以後、ことわりなくバナッハ空間はすべて実とする。バナッハ空間 E の解析的共役空間を E^* で表す。S を空でない集合とするとき、$l^\infty(S)$ を S 上で定義された実数値関数の全体で、$f \in l^\infty(S)$ のノルムを $\|f\| = \sup_{s\in S}|f(s)|$ で定義したバナッハ空間とする。S を位相空間とするとき、$C(S)$ を $f \in l^\infty(S)$ の連続関数からなる $l^\infty(S)$ の部分空間とする。特に S に離散位相が入る場合は、$C(S) = l^\infty(S)$ となる。μ が $C(S)$ 上の **mean** であるとは、$\mu \in C(S)^*$ でかつ

$$\inf_{s\in S} f(s) \le f(s) \le \sup_{s\in S} f(s)$$

がすべての $f \in C(S)$ で成り立つことである。詳しくは [28, Theorem 1.4.1] を見よ。

$S = (S,+)$ を可換な **semitological** 半群とする。すなわち S は Hausdorff 空間で、$(S,+)$ は可換な半群になり、かつすべての $s \in S$ に対して S から S への写像 $t \mapsto s+t$ が連続になるものである。$s \in S$ とする。このとき $f \in C(S)$ に対して、$l(s)f \in C(S)$ を

$$(l(s)f)(t) = f(s+t) \quad (t \in S)$$

で定義する。また、$\mu \in C(S)^*$ に対して、$l(s)^*\mu \in C(S)^*$ を

$$(l(s)^*\mu)(f) = \mu(l(s)f) \quad (f \in C(S))$$

で定義する。μ が $C(S)$ 上の mean なら、$l(s)^*\mu$ もまた mean になる。$C(S)$ 上の mean μ が不変であるとは、すべての $s \in S$ に対して $l(s)^*\mu = \mu$ が成り立つことである。いま半群 S が可換なので、Markov・角谷の定理により $C(S)$ 上の不変な mean が必ず存在する。証明は [28] を見よ。$\{\mu_\alpha\}$ を $C(S)$ 上の mean のネットとする。このとき $\{\mu_\alpha\}$ が **strongly regular** であるとは、すべての $s \in S$ に対して $\lim_\alpha \|\mu_\alpha - l(s)^*\mu_\alpha\| = 0$ が成り立つことである。詳しくは [9] を見よ。

C をバナッハ空間 E の弱コンパクト凸部分集合とし、S を可換な semitopological 半群とし、$\mathcal{T} = \{T(s) : s \in S\}$ を C から C への写像の族とし、$\{k(s) : s \in S\}$ を非負な実数の族とする。このとき以下をみたすとする：

1. $T(t+s) = T(t)T(s)$
2. すべての $x \in C$ に対して、写像 $T(\cdot)x : S \to C$ が連続である。
3. すべての $s \in S$ と $x, y \in C$ に対して、$\|T(s)x - T(s)y\| \le k(s)\,\|x - y\|$
4. S から実数への関数 $s \mapsto k(s)$ が有界でかつ連続である。
5. $\limsup_{s \in S} k(s) = \inf_{t \in S} \sup_{s \in S} k(t+s) \le 1$

このとき、$\mathcal{T} = \{T(s) : s \in S\}$ を Lipschitz 定数族 $\{k(s) : s \in S\}$ をもつ C の漸近的非拡大半群とよぶ。特に、恒等的に $k(s) = 1$ のとき、$\mathcal{T}$ を単に C の非拡大半群とよぶ。ここで μ を $C(S)$ 上の mean とすると、任意の $x \in C$ に対して、ただひとつの元 $y \in C$ が存在して、すべての $x^* \in E^*$ に対して $\langle y, x^* \rangle = \mu \langle T(\cdot)x, x^* \rangle$ が成り立つ。この y を $T(\mu)x$ で表す。すなわち $T(\mu)$ は C から C への写像で、等式

$$\langle T(\mu)x, x^* \rangle = \mu \langle T(\cdot)x, x^* \rangle$$

が成り立つ。さらに、$T(\mu)x \in \overline{\mathrm{co}}\{T(s)x : s \in S\}$ も成り立つ。この $T(\mu)$ の構成法は [26] でヒルベルト空間に対して導入された。バナッハ空間に対しては [9, 11, 17, 28] を見よ。ところで、関数 $f \in C(S)$ の形が明示的に示されているとき、$\mu(f)$ の代わりに $\mu_s f(s)$ で表すことがある。たとえば、$f(s) = \langle T(s)x, x^* \rangle$ のとき、$\mu(f)$ の代わりに $\mu_s \langle T(s), x^* \rangle$ で表すのである。つまり、変数 s を局所変数（外からは見えない変数）として用いてるのである。この表記法に従えば、

$$\langle T(\mu)x, x^* \rangle = \mu_s \langle T(s)x, x^* \rangle$$

である。

以後の計算で役に立つ簡単な補題を示しておこう。

補題 2.1. μ を $C(S)$ 上の *mean* とする。このとき以下の 2 不等式

$$\|x - T(\mu)y\| \le \mu_s \|x - T(s)y\|$$
$$\|T(\mu)x - T(\mu)y\| \le \mu_s \|T(s)x - T(s)y\|$$

がすべての $x, y \in C$ に対して成り立つ。

証明. $x, y \in C$ とする。このとき

$$\langle x - T(\mu)y, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle - \mu_s \langle T(s)y, x^* \rangle = \mu_s \langle x - T(s)y, x^* \rangle \leq \mu_s \|x - T(s)y\| \, \|x^*\|$$

がすべての $x^* \in E^*$ に対して成り立つので、$\|x - T(\mu)y\| \leq \mu_s \|x - T(s)y\|$ となる。同様にして、

$$\langle T(\mu)x - T(\mu)y, x^* \rangle = \mu_s \langle T(s)x - T(s)y, x^* \rangle \leq \mu_s \|T(s)x - T(s)z\| \, \|x^*\|$$

であることから、$\|T(\mu)x - T(\mu)y\| \leq \mu_s \|T(s)x - T(s)y\|$ を得る。 □

3 漸近的非拡大半群の共通不動点について

この章を通じて、C をバナッハ空間 E のコンパクト凸部分集合、S を可換な semitopological 半群、$\mathcal{T} = \{T(s) : s \in S\}$ を Lipschitz 定数族 $\{k(s) : s \in S\}$ をもつ C 上の漸近的非拡大半群、μ を $C(S)$ 上の不変な mean、$z \in F(T(\mu))$ とする。ただし、$F(T(\mu))$ は写像 $T(\mu)$ の不動点集合、すなわち $F(T(\mu)) = \{z \in C : T(\mu)z = z\}$ である。このとき、

$$\begin{aligned} r &= \mu_s \|T(s)z - z\|, \\ D(t) &= \mathrm{cl}\{T(t+s)z : s \in S\} \quad (t \in S) \\ D &= \bigcap_{t \in S} D(t), \end{aligned}$$

と定義する。ただし、$\mathrm{cl}\{T(t+s)z : s \in S\}$ は集合 $\{T(t+s)z : s \in S\}$ の閉包である。

補題 3.1. すべての $t \in S$ と $u \in \{z\} \cup D$ に対して $\|T(t)z - u\| \leq k(t)r$ である。

証明. $t \in S$ とする。まず $\|T(t)z - z\| \leq k(t)r$ を示す。z が $T(\mu)$ の不動点であることに注意して補題 2.1 を用いると、

$$\begin{aligned} \|T(t)z - z\| &= \|T(t)z - T(\mu)z\| \leq \mu_s \|T(t)z - T(s)z\| \\ &= \mu_s \|T(t)z - T(t+s)z\| = \mu_s \|T(t)z - T(t)T(s)z\| \\ &\leq k(t)\mu_s \|z - T(s)z\| = k(t)r \end{aligned}$$

となる。次に、$u \in D$ に対して $\|T(t)z - u\| \leq k(t)r$ を示す。$\varepsilon > 0$ を任意にとる。このとき仮定から ある $p \in S$ が存在して、すべての $s \in S$ に対して $k(p+s) \leq 1 + \varepsilon$ となる。また、$u \in D(t+p)$ である ことから、ある $q \in S$ をとって $\|T(t+p+q)z - u\| \leq \varepsilon$ とできる。よって、

$$\begin{aligned} \|T(t)z - u\| &\leq \|T(t)z - T(t+p+q)z\| + \|T(t+p+q)z - u\| \\ &\leq k(t)\, \|z - T(p+q)z\| + \|T(t+p+q)z - u\| \\ &\leq k(t)k(p+q)r + \varepsilon \leq k(t)(1+\varepsilon)r + \varepsilon \end{aligned}$$

となるが、いま $\varepsilon > 0$ が任意であったので $\|T(t)z - u\| \leq k(t)r$ となる。証明終 □

補題 3.2. U を集合 $\{z\}\cup D$ の有限部分集合で、すべての $u\in U$ に対して $r\leq \mu_s\|u-T(s)z\|$ をみたすものとする。このとき、ある元 $w\in D$ を、すべての $u\in U$ に対し $r\leq \|u-w\|$ をみたすようにとれる。

証明. $r=0$ のときは成り立つのはあたりまえなので、$r>0$ としよう。$n=\sharp U$ (U の濃度) としよう。いま、$\varepsilon\in(0,r)$ と $t\in S$ をかってにとる。$\limsup_s k(s)\leq 1$ なので、ある $q\in S$ が存在して

$$\sup_s k(q+s)\leq 1+\frac{\varepsilon}{nr}$$

となる。このことから

$$\sup_s k(q+t+s)\leq 1+\frac{\varepsilon}{nr}$$

もいえる。ところで、仮定からすべての $u\in U$ に対して $r\leq \mu_s\|u-T(s)z\|$ であるから、μ が不変であることを用いると、

$$\begin{aligned}nr &\leq \sum_{u\in U}\mu_s\|u-T(s)z\| = \sum_{u\in U}\mu_s\|u-T(q+t+s)z\|\\ &= \mu_s\left(\sum_{u\in U}\|u-T(q+t+s)z\|\right)\leq \sup_{s\in S}\left(\sum_{u\in U}\|u-T(q+t+s)z\|\right)\end{aligned}$$

となる。よって、ある $s_0\in S$ をとって

$$nr\leq \sum_{u\in U}\|u-T(q+t+s_0)z\|+\frac{\varepsilon}{n}$$

とできる。$p=q+s_0$ としよう。このとき、

$$k(t+p)\leq 1+\frac{\varepsilon}{nr}$$

および

$$nr\leq \sum_{u\in U}\|u-T(t+p)z\|+\frac{\varepsilon}{n}$$

が成り立つことがわかる。ところで補題3.1より、すべての $u\in U$ に対して $\|u-T(t+p)z\|\leq k(t+p)r$ である。いま、$v\in U$ をひとつ固定すると、

$$\begin{aligned}nr-\frac{\varepsilon}{n} &\leq \sum_{u\in U}\|u-T(t+p)z\|\\ &\leq \|v-T(t+p)z\|+(n-1)k(t+p)r\\ &\leq \|v-T(t+p)z\|+(n-1)\left(1+\frac{\varepsilon}{nr}\right)r\end{aligned}$$

となるので、これを変形して $\|v-T(t+p)z\| \geq r-\varepsilon$ を得る。ここまでの議論をまとめると、任意の $t \in S$ と $\varepsilon > 0$ に対して、ある $p \in S$ が存在して、すべての $v \in U$ に対して

$$\|v-T(t+p)z\| \geq r-\varepsilon$$

が成り立つ。いま、

$$A(\varepsilon) = \{x \in C : \|v-x\| \geq r-\varepsilon, v \in U\}$$

とおく。このとき、C の閉部分集合の族

$$\{D(t) : t \in S\} \cup \{A(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

は有限交叉性をもつ。実際、$t_1, \ldots, t_m \in S$ と $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l > 0$ をかってにとる。ここで

$$t_0 = t_1 + \cdots + t_m$$
$$\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l\}$$

とおくと、さきの議論から、ある $p \in S$ が存在してすべての $v \in U$ に対して $T(t_0+p)z \in A(\varepsilon_0)$ とできる。よって、$T(t_0+p) \in D(t_0) \cap A(\varepsilon_0) \subset \bigcap_{i=1}^m D(t_i) \cap \bigcap_{j=1}^l A(\varepsilon_j)$ が成り立つので、C は有限交叉性をもつ。いま C がコンパクトなので、$D \cap \bigcap_{\varepsilon>0} A(\varepsilon) \neq \emptyset$ である。すなわち、ある $w \in D$ が存在して、すべての $v \in U$ に対して $\|v-w\| \geq r$ が成り立つ。証明終 □

バナッハ空間のコンパクト凸集合で定義された漸近的非拡大半群 $\mathcal{T} = \{T(s) : s \in S\}$ の共通不動点の集合が、それから生成されるひとつの noexpansive 写像 $T(\mu)$ の不動点の集合であらわすことができることを示したものである。

定理 3.3. C をバナッハ空間 E のコンパクト凸部分集合とする。S を可換な *semitopological* 半群とし、$\mathcal{T} = \{T(s) : s \in S\}$ を *Lipschitz* 定数族 $\{k(s) : s \in S\}$ をもつ C 上の漸近的非拡大半群とする。μ を $C(S)$ 上の不変な *mean* とする。このとき $F(T(\mu)) = F(\mathcal{T})$ である。ただし $F(\mathcal{T})$ は $\mathcal{T}$ の共通不動点の集合、すなわち $F(\mathcal{T}) = \bigcap_{t \in S} F(T(t))$ である。

証明. まず $F(\mathcal{T}) \subset F(T(\mu))$ を示す。$z \in F(\mathcal{T})$ とすると、すべての $x^* \in E^*$ に対して等式

$$\langle T(\mu)z, x^* \rangle = \mu_t \langle T(t)z, x^* \rangle = \mu_t \langle z, x^* \rangle = \langle z, x^* \rangle$$

が成り立つので、$T(\mu)z = z$ すなわち $z \in F(T(\mu))$ となる。あとはこの逆、すなわち $z \in F(T(\mu))$ ならば $z \in F(\mathcal{T})$ となることを示せばよい。$z \in F(T(\mu))$ とする。このとき $r = \mu_s \|T(s)z - z\| = 0$ となることを示せば十分である。なぜなら、もし $r = 0$ ならば、補題 3.1 からすべての $t \in S$ に対して $\|T(t)z - z\| \leq k(t)r = 0$ が成り立つ、すなわち $z \in F(T(\mu))$ である。$r > 0$ と仮定して、以下で C 上の点列 $\{u_i\}_{i=0}^\infty$ を構成する：$u_0 = z$ とする。いま $r = \mu_s \|z - T(s)z\| = \mu_s \|u_0 - T(s)z\|$ なので、補

題 3.2 により、ある点 $u_1 \in D$ が存在して $r \leq \|u_0 - u_1\| = \|z - u_1\|$ となる。ここで補題 2.1 を用いると、

$$r \leq \|u_1 - z\| = \|u_1 - T(\mu)z\| \leq \mu_s \|u_1 - T(s)z\|$$

を得る。いま、点 $u_0, u_1, \ldots, u_n$ が与えられて

$$\begin{aligned} r &\leq \mu_s \|u_n - T(s)z\| && (i = 0, 1, \ldots, n) \\ r &\leq \|u_i - u_j\| && (i, j \in \{0, 1, \ldots, n\},\ i \neq j) \end{aligned}$$

であったとする。このとき補題 3.2 により、ある $u_{n+1} \in D$ が存在してすべての $i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $r \leq \|u_i - u_{n+1}\|$ となる。また、ここで補題 2.1 を用いると、

$$r \leq \|u_{n+1} - u_0\| = \|u_{n+1} - z\| = \|u_{n+1} - T(\mu)z\| \leq \mu_s \|u_{n+1} - T(s)z\|$$

を得る。よって、数学的帰納法より C 上の点列 $\{u_i\}$ が存在して

$$\begin{aligned} r &\leq \mu_s \|u_n - T(s)z\| && (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ r &\leq \|u_i - u_j\| && (i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, \},\ i \neq j) \end{aligned}$$

となる。これは C のコンパクト性に反する。よって $r = 0$ である。証明終 □

前定理から以下の結果がわかる。これは次章の証明で用いられる。

定理 3.4. C をバナッハ空間 E のコンパクト凸部分集合とする。S を可換な *semitopological* 半群とし、$\mathcal{T} = \{T(s) : s \in S\}$ を *Lipschitz* 定数族 $\{k(s) : s \in S\}$ をもつ C 上の漸近的非拡大半群とする。$\{\mu_\alpha\}$ を *strongly regular* な $C(S)$ 上の *mean* のネットとする。もし $z \in C$ でかつ $\lim_\alpha T(\mu_\alpha)z = z$ ならば、$z \in F(\mathcal{T})$ である。

証明. $z \in C$ として $\lim_\alpha T(\mu_\alpha)z = z$ となるものをとる。Alaoglu の定理から、$C(S)$ 上の mean の集合

$$M = \{\mu \in C(S)^* : \mu(1) = \|\mu\| = 1\}$$

は $C(S)^*$ の汎弱コンパクト (weak* compact) 集合である。よって、ある汎弱収束する $\{\mu_\alpha\}$ の部分ネット $\{\mu_{\alpha_\beta}\}$ が存在する。その収束先を μ とすると、簡単な議論から、μ は不変な $C(S)$ 上の mean になることがわかる。いま、任意の $x^* \in E^*$ に対し、

$$\langle T(\mu)z, x^* \rangle = \mu_s \langle T(s)z, x^* \rangle = \lim_\beta (\mu_{\alpha_\beta})_s \langle T(s)z, x^* \rangle = \lim_\beta \left\langle T(\mu_{\alpha_\beta})z, x^* \right\rangle = \langle z, x^* \rangle$$

となるので、$T(\mu)z = z$ を得る。定理 3.3 から、$z \in F(\mathcal{T})$ である。証明終 □

4 漸近的非拡大半群に対する逐次近似定理

補題 4.1. Cをバナッハ空間Eのコンパクト凸部分集合とする。Sを可換な *semitopological* 半群とし、$\mathcal{T}=\{T(s):s\in S\}$を *Lipschitz* 定数族$\{k(s):s\in S\}$をもつ$C$上の漸近的 *noexpansive* 半群とする。$\{x_n\},\{y_n\}$をC上の点列とする。$\{\mu_n\}$を$C(S)$上の *strongly regular* な *mean* の列とする。このとき

$$\limsup_{n\to\infty}(\|T(\mu_n)x_n-T(\mu_n)y_n\|-\|x_n-y_n\|)\le 0$$

となる。

証明. $k(s)\ge 1$ $(t\in S)$を仮定しても一般性を失わない。$t\in S$とする。このとき、補題2.1により、すべてのnに対して

$$\begin{aligned}
&\|T(\mu_n)x_n-T(\mu_n)y_n\|\\
&\qquad\le(\mu_n)_s\|T(s)x_n-T(s)y_n\|\\
&\qquad=(l(t)^*\mu_n)_s\|T(s)x_n-T(s)y_n\|+(\mu_n-l(t)^*\mu_n)_s\|T(s)x_n-T(s)y_n\|\\
&\qquad\le(\mu_n)_s\|T(t+s)x_n-T(t+s)y_n\|+\|\mu_n-l(t)^*\mu_n\|\sup_{s\in S}\|T(s)x_n-T(s)y_n\|\\
&\qquad\le\sup_{s\in S}\|T(t+s)x_n-T(t+s)y_n\|+\|\mu_n-l(t)^*\mu_n\|\,d(C)\\
&\qquad\le\sup_{s\in S}k(t+s)\,\|x_n-y_n\|+\|\mu_n-l(t)^*\mu_n\|\,d(C)
\end{aligned}$$

となる。ただし$d(C)=\sup\{\|x-y\|:x,y\in C\}$である。よって、

$$\|T(\mu_n)x_n-T(\mu_n)y_n\|-\|x_n-y_n\|\le\left(\sup_{s\in S}k(t+s)-1\right)\|x_n-y_n\|+\|\mu_n-l(t)^*\mu_n\|\,d(C)$$

である。ここで両辺$\limsup_{n\to\infty}$をとると

$$\limsup_{n\to\infty}(\|T(\mu_n)x_n-T(\mu_n)y_n\|-\|x_n-y_n\|)\le\left(\sup_{s\in S}k(t+s)-1\right)\limsup_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|$$

となる。いま$t\in S$は任意であったので、

$$\limsup_{n\to\infty}(\|T(\mu_n)x_n-T(\mu_n)y_n\|-\|x_n-y_n\|)\le 0$$

となる。証明終 □

次の補題は鈴木 [23] によって証明されたものであり、このあとの定理4.3を証明するのに必要である。

補題 4.2 (鈴木). $\{x_n\},\{y_n\}$をバナッハ空間E上の点列とし、$\{\alpha_n\}$を$[0,1]$上の数列で

$$0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n\le\limsup_{n\to\infty}\alpha_n<1.$$

をみたすものとする。また、$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n y_n$ および

$$\limsup_{n\to\infty} (\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \le 0$$

を仮定する。このとき、$\liminf_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$ となる。

定理 4.3. C をバナッハ空間 E のコンパクト凸部分集合とする。S を可換な *semitopological* 半群とし、$\mathcal{T} = \{T(t) : t \in S\}$ を *Lipschitz* 定数族 $\{k(s) : s \in S\}$ をもつ C 上の漸近的非拡大半群とする。$\{\mu_n\}$ を *strongly regular* な $C(S)$ 上の *mean* の列で $\|\mu_{n+1} - \mu_n\| \to 0$ および $\sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n)_s (\max\{k(s)-1, 0\}) < \infty$ をみたすものとする。$\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ 上の数列で

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \le \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$$

をみたすものとする。C 上の点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_0 = u \in C, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T(\mu_n)x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

で構成する。このとき $\{x_n\}$ はある $z \in F(\mathcal{T})$ に強収束する。

<u>証明</u>. $k(s) \ge 1$ $(s \in S)$ としても一般性を失わない。$n \ge 0$ と $t \in S$ をかってにとる。いま、任意の $x^* \in E^*$ に対して

$$\begin{aligned} \langle T(\mu_{n+1})x_{n+1} - T(\mu_n)x_{n+1}, x^* \rangle &= (\mu_{n+1} - \mu_n)_s \langle T(s)x_{n+1}, x^* \rangle \\ &\le \|\mu_{n+1} - \mu_n\| \sup_{s\in S} \langle T(s)x_{n+1}, x^* \rangle \\ &\le \|\mu_{n+1} - \mu_n\| \, d(C) \, \|x^*\| \end{aligned}$$

なので、

$$\|T(\mu_{n+1})x_{n+1} - T(\mu_n)x_{n+1}\| \le \|\mu_{n+1} - \mu_n\| \, d(C) \tag{$*1$}$$

を得る。$y_n = T(\mu_n)x_n$ とおく。$(*1)$ より、

$$\begin{aligned} &\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\ &= \|T(\mu_{n+1})x_{n+1} - T(\mu_n)x_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\le \|T(\mu_{n+1})x_{n+1} - T(\mu_n)x_{n+1}\| + \|T(\mu_n)x_{n+1} - T(\mu_n)x_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\le \|\mu_{n+1} - \mu_n\| \, d(C) + \|T(\mu_n)x_{n+1} - T(\mu_n)x_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \end{aligned}$$

となるが、補題 4.1 より、

$$\limsup_{n\to\infty} (\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \le 0$$

となる。ここで補題 4.2 より

$$\liminf_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$$

となる。いま、C がコンパクトなので、ある $\{x_n\}$ の部分点列 $\{x_{n_i}\}$ とある点 $z \in C$ が存在して $\|y_{n_i} - x_{n_i}\| \to 0$ および $x_{n_i} \to z$ とできる。これより

$$\begin{aligned}\|T(\mu_{n_i})z - z\| &\leq \|T(\mu_{n_i})z - T(\mu_{n_i})x_{n_i}\| + \|T(\mu_{n_i})x_{n_i} - x_{n_i}\| + \|x_{n_i} - z\| \\ &= \|T(\mu_{n_i})z - T(\mu_{n_i})x_{n_i}\| - \|z - x_{n_i}\| + \|y_{n_i} - x_{n_i}\| + 2\|x_{n_i} - z\|\end{aligned}$$

となる。補題 4.1 より、

$$\limsup_{i\to\infty} \|T(\mu_{n_i})z - z\| \leq 0$$

を得る。ここで定理 3.4 を用いて、$z \in F(T)$ となる。そこで、補題 2.1 から、不等式

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z\| &= \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T(\mu_n)x_n - z\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|x_n - z\| + \alpha_n \|T(\mu_n)x_n - z\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|x_n - z\| + \alpha_n(\mu_n)_s\|T(s)x_n - z\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|x_n - z\| + \alpha_n(\mu_n)_s k(s)\|x_n - z\| \\ &= (1 + \alpha_n(\mu_n(k) - 1))\|x_n - z\| \\ &\leq (1 + (\mu_n(k) - 1))\|x_n - z\|\end{aligned}$$

を得る。このことから、任意の $m \geq 1$ に対して、

$$\begin{aligned}\|x_{n+m} - z\| &\leq \prod_{i=n}^{n+m-1}(1 + (\mu_i(k) - 1))\|x_n - z\| \\ &\leq \exp\left(\sum_{i=n}^{n+m-1}(\mu_i(k) - 1)\right)\|x_n - z\|\end{aligned}$$

となる。ここで $m \to \infty$ とすると、

$$\limsup_{m\to\infty}\|x_m - z\| \leq \exp\left(\sum_{i=n}^{\infty}(\mu_i(k) - 1)\right)\|x_n - z\|.$$

となる。次に $n \to \infty$ とすると、

$$\limsup_{m\to\infty}\|x_m - z\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|x_n - z\|.$$

を得る。すなわち、数列 $\{\|x_n - z\|\}$ は収束する。いま $x_{n_i} \to z$ であったので、

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - z\| = \lim_{i\to\infty}\|x_{n_i} - z\| = 0$$

すなわち $\{x_n\}$ は z に強収束する。証明終 □

前定理の直接的な結果として、以下を得る。

定理 4.4 ([16]). *C をバナッハ空間 E のコンパクト凸部分集合とする。S を可換な semitopological 半群とし、$\mathcal{T}=\{T(t):t\in S\}$ を C 上の非拡大半群とする。$\{\mu_n\}$ を strongly regular な $C(S)$ 上の mean の列で $\|\mu_{n+1}-\mu_n\|\to 0$ をみたすものとする。$\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ 上の数列で*

$$0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n\leq\limsup_{n\to\infty}\alpha_n<1$$

をみたすものとする。C 上の点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_0=u\in C,\\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n T(\mu_n)x_n \quad (n=0,1,2,\ldots.) \end{cases}$$

で構成する。このとき $\{x_n\}$ はある $z\in F(\mathcal{T})$ に強収束する。

5 近似定理の例

可換な semitopological 半群 S、漸近的非拡大半群 $\mathcal{T}=\{T(s):s\in S\}$ および strongly regular な $C(S)$ 上の mean の列 $\{\mu_n\}$ によって、前章の定理を変形することができる。

$\{q(n,j)\}_{n,j=0}^{\infty}$ を実数からなる 2 重数列とする。$\{q(n,j)\}$ が以下の (S1)–(S4) をみたすとき、これを **strongly regular summation method**[4, 5] であるという。

(S1) $q(n,j)\geq 0$
(S2) $\sum_{j=0}^{\infty}q(n,j)=1 \quad (n=0,1,2,\ldots)$
(S3) $\lim_{n\to\infty}q(n,j)=0 \quad (j=0,1,2,\ldots)$
(S4) $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|q(n,j+1)-q(n,j)|=0$

C をバナッハ空間 E の部分集合とする。T を C から C への写像とし、$\{k(j)\}$ を $k(j)\geq 1$ となる数列とする。いま、

$$\left\|T^j x-T^j y\right\|\leq k(j)\|x-y\| \quad (x,y\in C,\ j\geq 0)$$

でかつ $\lim_{j\to\infty}k(j)=1$ となるとき、T を Lipschitz 定数列 $\{k(j)\}$ をもつ漸近的非拡大写像という [8]。

定理 5.1. *C をバナッハ空間 E のコンパクト凸部分集合とする。T を Lipschitz 定数列 $\{k(j)\}$ をもつ漸近的非拡大写像とする。$\{q(n,j)\}_{n,j=0}^{\infty}$ が strongly regular summation method でかつ*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|q(n+1,j)-q(n,j)|=0$$

および

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}q(n,j)(k(j)-1)<\infty$$

をみたすものとする。C 上の点列 $\{x_n\}$ を以下で構成する：

$$x_0 \in C$$
$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n \sum_{j=0}^{\infty} q(n,j)T^j x_n \quad (n = 0,1,2,\dots)$$

ただし $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ 上の数列で

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \le \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$$

をみたすものである。このとき数列 $\{x_n\}$ はある T の不動点 p に強収束する。

証明. $\mathbb{Z}_+ = (\mathbb{Z}_+, +)$ を非負な整数からなる半群とする。離散位相をいれることにより $\mathbb{Z}_+$ は可換な semitopological 半群となる。$\mathcal{T} = \{T^j : j \in \mathbb{Z}_+\}$ が漸近的非拡大半群となることは明らかである。いま、$n \ge 0$ と $f \in l^\infty(\mathbb{Z}_+)$ に対して, $\mu_n(f) = \sum_{j=0}^{\infty} q(n,j)f(j)$ と定義する。$f \in l^\infty(\mathbb{Z}_+)$ に対して、

$$\begin{aligned}
|(\mu_n - l(1)^*\mu_n)(f)| &\le |\mu_n(f) - \mu_n(l(1)f)| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{\infty} q(n,j)f(j) - \sum_{j=0}^{\infty} q(n,j)f(j+1)\right| \\
&= \left|q(n,0)f(0) + \sum_{j=0}^{\infty} q(n,j+1)f(j+1) - \sum_{j=0}^{\infty} q(n,j)f(j+1)\right| \\
&\le |q(n,0)f(0)| + \sum_{j=0}^{\infty} |q(n,j+1) - q(n,j)|\,|f(j+1)| \\
&\le |q(n,0)|\,\|f\| + \sum_{j=0}^{\infty} |q(n,j+1) - q(n,j)|\,\|f\|
\end{aligned}$$

となる。よって、(S3) および (S4) から

$$\|\mu_n - l(1)^*\mu_n\| \le |q(n,0)| + \sum_{j=0}^{\infty} |q(n,j+1) - q(n,j)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を得る。$k \geq 1$ とする。このときすべての $f \in l^\infty(\mathbb{Z}_+)$ に対して

$$
\begin{aligned}
|(\mu_n - l(k)^*\mu_n)(f)| &= |\mu_n(f) - \mu_n(l(k)f)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} |\mu_n(l(j)f) - \mu_n(l(j+1)f)| \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} |\mu_n(l(j)f) - \mu_n(l(1)(l(j)f))| \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} |(\mu_n - l(1)^*)l(j)f| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} \|\mu_n - l(1)^*\mu_n\| \, \|f\|
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\|\mu_n - l(k)^*\mu_n\| \leq \sum_{j=0}^{k-1} \|\mu_n - l(1)^*\mu_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)
$$

を得る。よって $\{\mu_n\}$ は strongly regular な $l^\infty(\mathbb{Z}_+)$ の mean の列となる。さらに、

$$
\begin{aligned}
|(\mu_{n+1} - \mu_n)(f)| &= \left|\sum_{j=0}^{\infty}(q(n+1,j) - q(n,j))f(j)\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} |q(n+1,j) - q(n,j)| \, \|f\|
\end{aligned}
$$

であることから

$$
\|\mu_{n+1} - \mu_n\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |q(n+1,j) - q(n,j)| \to 0 \quad (n \to \infty)
$$

となる。また、

$$
\sum_{n=0}^{\infty}(\mu_n(k) - 1) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} q(n,j)k(j) - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} q(n,j)(k(j) - 1) < \infty
$$

もわかる。他方、$y \in C$ に対して $T(\mu_n)y = \sum_{j=0}^{\infty} q(n,j)T^j y$ である。実際、すべての $x^* \in E^*$ に対して

$$
\langle T(\mu_n)y, x^*\rangle = (\mu_n)_j\langle T(j)y, x^*\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} q(n,j)\,\langle T(j)y, x^*\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{\infty} q(n,j)T(j)y, x^* \right\rangle
$$

となるからである。よって、定理 4.3 から $\{x_n\}$ がある $z \in F(T) = F(T)$ に強収束する。証明終 □

定理 5.2. C をバナッハ空間 E のコンパクト凸部分集合とする。S, T を *Lipschitz* 定数列 $\{k(j)\}$ をもつ C 上の漸近的非拡大写像で $ST = TS$ および $\sum_{i,j=0}^{\infty}(k(i)k(j) - 1) < \infty$ をみたすものとする。C 上の点列 $\{x_n\}$ を以下で構成する。

$$x_0 = x \in C$$
$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i,j=0}^{n} S^i T^j x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ただし $\{\alpha_n\}$ は $[0, 1]$ 上の数列で

$$0 < \liminf_{n \to \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \to \infty} \alpha_n < 1$$

をみたすものとする。このとき $\{x_n\}$ はある $z \in F(S) \cap F(T)$ に強収束する。

<u>証明</u>. $n \geq 0$ と $f \in l^{\infty}(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)$ に対し、

$$\mu_n(f) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i,j=0}^{n} f(i, j)$$

と定義する。このとき、μ_n は $l^{\infty}(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)$ 上の strongly regular な $l^{\infty}(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)$ 上の mean となる。実際 $f \in l^{\infty}(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)$ に対して

$$\begin{aligned} |\mu_n(f) - \mu_n(l(a, b)f)| &= \frac{1}{(n+1)^2} \left| \sum_{i,j=0}^{n} f(i, j) - \sum_{i,j=0}^{n} f(a + i, b + j) \right| \\ &= \frac{2}{(n+1)^2} ((n+1)(a+b) - ab) \|f\| \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} |\mu_{n+1}(f) - \mu_n(f)| &\leq (2n+3) \cdot \frac{\|f\|}{(n+2)^2} + \left| \sum_{i,j=0}^{n} \left(\frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) f(i, j) \right| \\ &\leq \frac{2(2n+3)}{(n+2)^2} \|f\| \end{aligned}$$

より

$$\|\mu_{n+1} - \mu_n\| \leq \frac{2(2n+3)}{(n+2)^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

もいえる。いま、$(i, j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ に対して、$U(i, j) = S^i T^j$, $l(i, j) = k(i)k(j)$ と定義する。このとき $\mathcal{T} = \{U(i, j) : (i, j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+\}$ は Lipschitz 定数列 $\{l(i, j)\}$ をもつ漸近的非拡大半群になる。あとは定理 5.1 の証明と同様の手法で $\sum_{n=0}^{\infty}(\mu_n(l) - 1) < \infty$ と

$$U(\mu_n)y = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i,j=0}^{n} S^i T^j y$$

が示される。よって、定理 4.3 から、$\{x_n\}$ がある $z \in F(T) = F(S) \cap F(T)$ に強収束することがわかる。 □

定理 5.3 (高橋・善林 [29]). C をバナッハ空間 E のコンパクトな凸集合とする。k を $[0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への有界な連続関数とし、$T = \{T(t) : t \geq 0\}$ を $k(s)$ を *Lipschitz* 定数族とする C 上の漸近的非拡大半群とする。$\{\lambda_n\} \subset (0,\infty)$ を $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$ および $\lambda_n/\lambda_{n+1} \to 0$ をみたす数列とする。また、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} \max\{k(t)-1,0\}dt\right) < \infty$$

を仮定する。C 上の点列 $\{x_n\}$ を以下で定める。

$$\begin{aligned} x_0 &= x \in C \\ x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \frac{\alpha_n}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(t)x\,dt \quad (n = 0,1,2,\ldots) \end{aligned}$$

ただし $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ は

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$$

をみたす。このとき $\{x_n\}$ はある $z \in F(T)$ に強収束する。

<u>証明</u>. $\mathbb{R}_+$ を非負の実数からなる半群とする。$f \in C(\mathbb{R}_+)$ に対して、

$$\mu_n(f) = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} f(t)\,dt$$

と定義する。このとき $\{\mu_n\}$ は $C(\mathbb{R}_+)$ 上の strongly regular な $C(\mathbb{R}_+)$ 上の mean の列である。実際、μ_n は $C(\mathbb{R}_+)$ 上の mean であり、任意の $s \in S$ に対して

$$\begin{aligned} |\mu_n(f) - \mu_n(l(s)f)| &= \frac{1}{\lambda_n}\left|\int_0^{\lambda_n} f(t)\,dt - \int_s^{s+\lambda_n} f(t)\,dt\right| \\ &= \frac{1}{\lambda_n}\left|\int_0^{s} f(t)\,dt - \int_{\lambda_n}^{s+\lambda_n} f(t)\,dt\right| \\ &= \frac{2s}{\lambda_n}\|f\| \end{aligned}$$

となるのでよい。また、

$$\begin{aligned} |\mu_{n+1}(f) - \mu_n(f)| &= \left|\frac{1}{\lambda_{n+1}}\int_0^{\lambda_{n+1}} f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} f(t)\,dt\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{\lambda_{n+1}} - \frac{1}{\lambda_n}\right|\int_0^{\lambda_n} |f(t)|\,dt + \frac{1}{\lambda_{n+1}}\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} |f(t)|\,dt \\ &= 2\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\|f\| \end{aligned}$$

となるので $\|\mu_{n+1}-\mu_n\| \to 0$ もいえる。

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mu_n)_s(\max\{k(s)-1,0\}) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n}\max\{k(t)-1,0\}dt\right) < \infty$$

および

$$T(\mu_n)y = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\lambda_n} T(t)y\,dt \quad (y \in C)$$

は簡単にわかる。定理4.3 より $\{x_n\}$ はある $z \in F(T)$ に強収束する。 □

参考文献

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), 117–127.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for one-parameter nonexpansive semigroups with compact domains*, Fixed Point Theory and Applications, Volume 3 (Y.J. Cho, J.K. Kim and S.M. Kang Eds.), pp. 15–31, Nova Science Publishers, New York, 2002.

[3] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), 1511–1514.

[4] H. Brézis and F. E. Browder, *Nonlinear ergodic theorems*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 959–961.

[5] H. Brézis and F. E. Browder, *Remarks on nonlinear ergodic theory*, Advances in Math. **25** (1977), 165–177.

[6] M. M. Day, *Amenable semigroups*, Illinois J. Math. **1** (1957), 509–544.

[7] K. Eshita, H. Miyake and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in general Banach spaces*, to appear

[8] K. Goebel and W. A. Kirk, *A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 171–174.

[9] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1269–1281.

[10] S. Ishikawa, *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976), 65–71.

[11] K. Kido and W. Takahashi, *Mean ergodic theorems for semigroups of linear operators*, J. Math. Anal. Appl. **103** (1984), 387–394.

[12] M. Krasnosel'skiĭ, *Two remarks on the method of successive approximations*, Uspehi Mat. Nauk. **10** (1955), 123–127.

[13] A. T. Lau, N. Shioji and W. Takahashi, *Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **161** (1999), 62–75.

[14] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series*, Acta Math. **80** (1948), 167–190.

[15] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 506–510.

[16] H. Miyake and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for commutative nonexpansive semigroups in general Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **9** (2005), 1–15.

[17] H. Oka, *Nonlinear ergodic theorems for commutative semigroups of asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **18** (1992), 619–635.

[18] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[19] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence theorem for asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **26** (1996), 265–272.

[20] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71–83.

[21] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 73–87.

[22] T. Suzuki, *Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 381–391.

[23] T. Suzuki, *Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, to appear in Fixed Point Theory Appl.

[24] T. Suzuki and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **47** (2001), 2805–2815.

[25] T. Suzuki and W. Takahashi, *Strong convergence of Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **5** (2004), 209–216.

[26] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253–256.

[27] W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity*, Canad. J. Math. **44** (1992), 880–887.

[28] W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[29] W. Takahashi and K. Zembayashi, *Fixed point theorems for one-parameter asymptotically nonexpansive semigroups in general Banach spaces*, to appear.