

## 補間定理と重み関数

東京理科大学ポスドクトラル研究員 丹羽 美由紀 (Miyuki Niwa)  
 Faculty of Science and Technology,  
 Tokyo University of Science

### 1 はじめに

1926年, M. Riesz[7] は  $L_p$  空間での補間定理を示した. そして後の1938年 G. O. Thorin[9] がこの定理を拡張したため, Riesz-Thorin の補間定理としてよく知られている. Riesz の証明は後の実補間法に, Thorin の証明は後の複素補間法の基となる. 定義等は次節を参照.

**定理 1 (Riesz-Thorin の補間定理).**  $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $T$  は線型作用素とする.  $T$  が  $L_{p_0}$  空間から  $L_{q_0}$  空間へ作用素ノルム  $M_0$  で有界かつ,  $T$  が  $L_{p_1}$  空間から  $L_{q_1}$  空間へ作用素ノルム  $M_1$  で有界ならば,  $T$  は  $L_p$  空間から  $L_q$  空間へ作用素ノルム  $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$  で有界となる. ここで,  $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ ,  $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$ .

この定理に対して, 様々な拡張がなされたのであるが, その中の重要な結果として1958年の Stein-Weiss[8] による“重みつき  $L_p$  空間での補間定理”と1966年の Calderón[2]-Hunt[5] による“Lorentz 空間での補間定理”があげられる.

**定理 2 (Stein-Weiss の補間定理).**  $1 \leq p_0, p_1 < \infty$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $T$  は準線型作用素,  $v_0, v_1, w_0, w_1$  は非負可測関数とする.  $T$  が  $L_{p_0, v_0}$  空間から  $L_{q_0, w_0}$  空間へ有界かつ,  $T$  が  $L_{p_1, v_1}$  空間から  $L_{q_1, w_1}$  空間へ有界ならば,  $T$  は  $L_{p, v}$  空間から  $L_{q, w}$  空間へ有界となる. ここで,  $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ ,  $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$ ,  $v^{1/p} = v_0^{(1-\theta)/p_0} v_1^{\theta/p_1}$ ,  $w^{1/q} = w_0^{(1-\theta)/q_0} w_1^{\theta/q_1}$ .

**定理 3 (Calderón-Hunt の補間定理).**  $1 \leq p_0, p_1 < \infty$ ,  $1 \leq q_0 \neq q_1 \leq \infty$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $T$  は擬線型作用素とする.  $T$  が  $L_{p_0 q_0}$  空間から  $L_{r_0 s_0}$  空間へ有界かつ,  $T$  が  $L_{p_1 q_1}$  空間から  $L_{r_1 s_1}$  空間へ有界ならば,  $q \leq s$  に対して,  $L_{p q}$  空間から  $L_{r s}$  空間へ有界となる. ここで,  $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ ,  $1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$ .

そこで, Stein-Weiss(定理2) と Calderón-Hunt(定理3) を統合させた, 重みつき Lorentz 空間上での補間定理の成立が予想される.

**予想.**  $1 \leq p_0, p_1 < \infty$ ,  $1 \leq q_0 \neq q_1 \leq \infty$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $T$  は準線型作用素,  $v_0, v_1, w_0, w_1$  は非負可測関数とする.  $T$  が  $L_{p_0 q_0, v_0}$  空間から  $L_{r_0 s_0, w_0}$  空間へ有界かつ,  $T$  が  $L_{p_1 q_1, v_1}$  空間から  $L_{r_1 s_1, w_1}$  空間へ有界ならば,  $q \leq s$  に対して,  $L_{p q, v}$  空間から  $L_{r s, w}$  空間へ有界となる. ここで,  $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ ,  $1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$ ,  $v^{1/p} = v_0^{(1-\theta)/p_0} v_1^{\theta/p_1}$ ,  $w^{1/r} = w_0^{(1-\theta)/r_0} w_1^{\theta/r_1}$ .

しかしながら, 1997年に Ferreyra[3] によって反例が与えられた. 反例はべき型関数で重み関数  $v$  を構成することによって与えられている.

そこで何らかの条件を加えることや, 結果を弱めることによって肯定的な結果を得ることを目標としてきた. 得られた結果 [6, Theorem 3.1] は次である.

**定理 4.**  $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$ ,  $1 \leq r_0 \neq r_1 \leq \infty$ ,  $0 < q_0, q_1, s_0, s_1 \leq \infty$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $T$  は非負, 準線型作用素,  $v, w_0, w_1$  は非負可測関数とする.  $T$  が  $L_{p_0 q_0, v}$  空間から  $L_{r_0 s_0, w_0}$  空間へ有界, かつ,  $T$  が  $L_{p_1 q_1, v}$  空間から  $L_{r_1 s_1, w_1}$  空間へ有界ならば,  $T$  は  $L_{p_1, v}$  空間から  $L_{r_0 \infty, w}$  空間へ有界となる. ここで  $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ ,  $1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$ ,  $w^{1/q} = w_0^{(1-\theta)/q_0} w_1^{\theta/q_1}$ .

定理 4 は, 次の点で予想よりも弱い結果になっている.

1. 予想における  $q, s (q \leq s)$  が  $q = 1, s = \infty$  となっている.
2. 定義域側の重み関数  $v$  が固定されている ( $v_0 = v_1 = v$ ).

そこでまず 2. について考えてみることにした. 次節の証明の概略にあるように, 値域側の重み関数は Hölder の不等式を用いることによって評価することができた. そこで定義域側では “Hölder の不等式の逆に相当する reverse Hölder の不等式をうまく用いることができないか” と考えた. 今回はそのように考えたいきさつや, これから考えるべきことを記したいと思う.

## 2 準備

$(M, \mu), (N, \nu)$  は  $\sigma$ -有限な測度空間とし,  $f, g, \dots$  は実数値 (または複素数値) 可測関数とする.  $T$  は  $M$  上の可測関数のクラスから  $N$  上の可測関数への作用素とする.  $v, w, v_0, w_0, \dots$  は非負可測関数とし, “重み関数” とも言う.

**定義 5 (作用素).** 作用素  $T$  が準線型とは次を満たすことである:

$$\begin{aligned} |T(f+g)| &\leq |Tf| + |Tg|, \\ |T(af)| &= |a||Tf|, \quad a \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

作用素  $T$  が擬線型とは次を満たすことである:

$$\begin{aligned} |T(f+g)| &\leq K(|Tf| + |Tg|), \quad (K \text{ は } f \text{ に無関係な定数}), \\ |T(af)| &= |a||Tf|, \quad a \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

**定義 6 (重みつき  $L_p$  空間  $L_{p,v}$ ).**

$$L_{p,v} = \{f : \|f\|_{p,v} < \infty\},$$

ここで

$$\|f\|_{p,v} = \left( \int_M |f(x)|^p v(x) d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

定義 7 (分布関数  $\lambda_{f,v}$ , 再配列関数  $f_v^*$ , 平均関数  $f_v^{**}$ ).

$$\begin{aligned}\lambda_{f,v}(s) &= v\{x : |f(x)| > s\}, \quad s > 0, \\ f_v^*(t) &= \inf\{s : \lambda_{f,v}(s) \leq t\}, \quad t > 0, \\ f_v^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^\infty f_v^*(y) dy, \quad t > 0.\end{aligned}$$

ここで任意の集合  $A$  に対して  $v(A) = \int_A v d\mu$  とする.

定義 8 (重みつき Lorentz 空間  $L_{p,q,v}, L_{(p,q),v}$ ).

$$L_{p,q,v} = \{f : \|f\|_{p,q,v} < \infty\},$$

ここで,

$$\|f\|_{p,q,v} = \begin{cases} \left( \frac{q}{p} \int_0^\infty (t^{1/p} f_v^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 1 < p, q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f_v^*(t), & 1 < p < \infty, q = \infty. \end{cases}$$

しかしながら, 一般的に  $\|\cdot\|_{p,q,v}$  は Minkowski の不等式が成り立たないのでノルムではない. しかし定義の中の  $f_v^*$  を  $f_v^{**}$  に代えることによってノルム  $\|\cdot\|_{(p,q),v}$  を得る. 任意の  $q \geq 1$  に対して

$$\|f\|_{(p,q),v} = \begin{cases} \left( \frac{q}{p} \int_0^\infty (t^{1/p} f_v^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 1 < p, q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f_v^{**}(t), & 1 < p < \infty, q = \infty. \end{cases}$$

この空間を  $L_{(p,q),v}$  と記す.

さらに  $\|\cdot\|_{p,q,v}$  と  $\|\cdot\|_{(p,q),v}$  は同値である. 即ち,

補題 9.  $1 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$  ならば

$$\|f\|_{p,q,v} \leq \|f\|_{(p,q),v} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{p,q,v}.$$

定義 10 (非負作用素). 任意の  $f$  に対して次を満たすことである:

$$Tf \geq 0, \quad \nu\text{-a.e.}$$

次に Bennerr-Sharpely[1, p.231] にある結果を挙げておく.

補題 11.  $X, Y$  は resonant 測度空間  $(M, \mu), (N, \nu)$  上の rearrangement-invariant function 空間とする.  $T$  は非負, 準線形作用素で,  $X$  の dense linear subspace  $D$  上で定義され,  $Y$  で値をとる. このとき, すべての  $f \in D$  に対して

$$(*) \quad \|Tf\|_Y \leq C \|f\|_X,$$

が成り立つならば, すべての  $f \in X$  に対して  $(*)$  が成り立つ.

$L_{p_1, v}$  空間のノルムについて次の結果 [6, Lemma 2.7] を与えておく.

補題 12. 定数  $C_1, C_2$  が存在して次をみます.

$$C_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k/p} f_w^*(2^k) \leq \|f\|_{p_1, w} \leq C_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k/p} f_w^*(2^k).$$

### 3 定理 4 の証明の概略

まず集合  $E_n$  を次のように定義し,  $f_n$  を構成する:

$$E_n = \{x \in M : f_v^*(2^{n+1}) < |f(x)| \leq f_v^*(2^n)\},$$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E_n, \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

すると

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x), \quad \mu\text{-a.e. } x \in M.$$

(1),  $T$  の準線型性 (定義 5), 補題 9, 11 により,

$$(2) \quad \|Tf\|_{(r\infty), w} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|Tf_n\|_{(r\infty), w} \leq r/(r-1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|Tf_n\|_{r\infty, w}.$$

まず  $\|Tf_n\|_{r\infty, w}$  を評価していく. 仮定より  $T$  は  $L_{p_i q_i, v}$  から  $L_{r_i s_i, w_i}$  への有界な作用素なので

$$t^{1/r_i} (Tf_n)_{w_i}^*(t) \leq C \|f_n\|_{p_i q_i, v}, \quad i = 0, 1.$$

変数変換  $t = \lambda_{Tf_n, w_i}(s)$  によって

$$(3) \quad s(\lambda_{Tf_n, w_i}(s))^{1/r_i} \leq C \|f_n\|_{p_i q_i, v}, \quad i = 0, 1.$$

Hölder の不等式と  $1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$ ,  $w^{1/r} = w_0^{(1-\theta)/r_0} w_1^{\theta/r_1}$  により,

$$(4) \quad \begin{aligned} & s(\lambda_{Tf_n, w}(s))^{1/r} \\ &= s \left( \int_{\{x; |Tf_n(x)| > s\}} w(x) d\mu(x) \right)^{1/r} \\ &\leq s \left( \int_{\{x; |Tf_n(x)| > s\}} w_0(x) d\mu(x) \right)^{(1-\theta)/r_0} \left( \int_{\{x; |Tf_n(x)| > s\}} w_1(x) d\mu(x) \right)^{\theta/r_1} \\ &= \left[ s(\lambda_{Tf_n, w_0}(s))^{1/r_0} \right]^{1-\theta} \left[ s(\lambda_{Tf_n, w_1}(s))^{1/r_1} \right]^{\theta}. \end{aligned}$$

(3) と (4) から,

$$s(\lambda_{Tf_n, w}(s))^{1/r} \leq C \|f_n\|_{p_0 q_0, v}^{1-\theta} \|f_n\|_{p_1 q_1, v}^{\theta}$$

となるので次を得る:

$$(5) \quad \|Tf_n\|_{r\infty, w} \leq C \|f_n\|_{p_0q_0, v}^{1-\theta} \|f_n\|_{p_1q_1, v}^\theta.$$

また  $\|f_n\|_{p_0q_0, v}$  に対して次のような評価を得る:

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{p_0q_0, v} &= \left( \frac{q_0}{p_0} \int_0^\infty [t^{1/p_0} (f_n)_v^*(t)]^{q_0} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_0} \\ (*) \quad &\leq \left( \frac{q_0}{p_0} \int_0^{v(E_n)} [t^{1/p_0} f_v^*(2^n)]^{q_0} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_0} \\ &= f_v^*(2^n) (v(E_n))^{1/p_0}. \end{aligned}$$

$\|f_n\|_{p_1q_1, v}$  に対しても同様に

$$(**) \quad \|f_n\|_{p_1q_1, v} \leq f_v^*(2^n) (v(E_n))^{1/p_1}.$$

$1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$  と (5) から

$$(6) \quad \|Tf_n\|_{r\infty, w} \leq C f_v^*(2^n) (v(E_n))^{1/p} \leq C f_v^*(2^n) \cdot (2 \cdot 2^n)^{1/p}.$$

したがって, (2), (6), 補題 12 から

$$\|Tf\|_{r\infty, w} \leq C \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_v^*(2^n) \cdot 2^{n/p} \leq C \|f\|_{p1, v}.$$

## 4 reverse Hölder と展望

目標は  $v$  を動かす, 即ち,  $T$  は  $L_{p_iq_i, v_i}$  から  $L_{r_i s_i, w_i}$  への有界な作用素 ( $i = 0, 1$ ) と仮定し  $L_{p1, v}$  から  $L_{r\infty, w}$  への有界性を得ることである. ここで  $v^{1/p} = v_0^{(1-\theta)/p_0} v_1^{\theta/p_1}$ . その場合前節での評価 (\*), (\*\*) はそれぞれ

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{p_0q_0, v_0} &\leq f_v^*(2^n) (v_0(E_n))^{1/p_0}, \\ \|f_n\|_{p_1q_1, v_1} &\leq f_v^*(2^n) (v_1(E_n))^{1/p_1} \end{aligned}$$

となる. したがって

$$\|Tf_n\|_{r\infty, w} \leq C f_v^*(2^n) v_0(E_n)^{(1-\theta)/p_0} v_1(E_n)^{\theta/p_1}$$

となるので, もし, ある定数  $C$  が存在して

$$v_0(E_n)^{(1-\theta)/p_0} v_1(E_n)^{\theta/p_1} \leq C v(E_n)^{1/p}$$

という評価を得ることができれば, 望む結果が得られる. しかしながら前節の(4)は  $A = \{x; |Tf_n(x)| > s\}$  として  $w(A)^{1/r} \leq w_0(A)^{(1-\theta)/r_0} w_1(A)^{\theta/r_1}$  ということを示している. こ

のため“この不等式の逆”を要求することになる。そこで“reverse Hölder の不等式を使えないだろうか?”と考えた次第である。

ここで Muckenhoupt の  $A_p$  条件について復習する (例えば [10] 参照)。

$\mu$  は非負 Borel 測度で有界集合上では有限とする。非負可測関数  $w$  が  $A_p(\mathbb{R}^n) = A_p$  条件を満たす (このとき  $w \in A_p$  と記す) とは,  $y \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{|I|} \int_I w(y) dy \right) \left( \frac{1}{|I|} \int_I w(y)^{-1/(p-1)} dy \right)^{p-1} \leq c, & 1 < p < \infty, \\ \frac{1}{|I|} \int_I w(y) dy \leq c \operatorname{ess\,inf}_I w, & p = 1. \end{cases}$$

$I$  は  $x$  を含む open cube を表し,  $|I|$  は  $I$  のルベーグ測度を表す。

$w \in A_1$  の特徴づけとして次の定理が挙げられる。

**定理 13 (reverse Hölder).**  $w \in A_1$  とする。このとき  $r > 1$  が存在して, 任意の cube  $I$  に対して

$$\left( \frac{1}{|I|} \int_I w(y)^r dy \right)^{1/r} \leq \frac{c}{|I|} \int_I w(y) dy.$$

$c = c_r$  は  $I$  に無関係。

ここで注意すべきことは  $(\mathbb{R}^n, dx)$  での理論であることである。しかし定理 4 の設定においても成立すると仮定して議論を進めていく。

$\tilde{v} \in A_1$  とする。  $v_0 = \tilde{v}^{a_0}, v_1 = \tilde{v}^{a_1}$ ,  $a_0, a_1 > 1$  とおくと,  $v^{1/p} = v_0^{(1-\theta)/p_0} v_1^{\theta/p_1}$  より,

$$v = \tilde{v}^{\frac{a_0 p (1-\theta)}{p_0} + \frac{a_1 \theta}{p_1}}.$$

$v_0(E_n), v_1(E_n), v(E_n)$  を計算し, reverse Hölder を  $r = a_0, a_1$ , 定数を  $c_0, c_1$  で適用すると,

$$\begin{aligned} v_0(E_n) &= \int_{E_n} \tilde{v}^{a_0} d\mu \leq c_0 (1/\mu(E_n))^{a_0-1} \left( \int_{E_n} \tilde{v} d\mu \right)^{a_0}, \\ v_1(E_n) &= \int_{E_n} \tilde{v}^{a_1} d\mu \leq c_1 (1/\mu(E_n))^{a_1-1} \left( \int_{E_n} \tilde{v} d\mu \right)^{a_1}, \\ v(E_n) &= \int_{E_n} \tilde{v}^{p \left( \frac{a_0(1-\theta)}{p_0} + \frac{a_1\theta}{p_1} \right)} d\mu. \end{aligned}$$

したがって

$$(7) \quad v_0(E_n)^{\frac{1-\theta}{p_0}} v_1(E_n)^{\frac{\theta}{p_1}} \leq c_0^{\frac{1-\theta}{p_0}} c_1^{\frac{\theta}{p_1}} \mu(E_n)^{\frac{(1-a_0)(1-\theta)}{p_0} + \frac{(1-a_1)\theta}{p_1}} \left( \int_{E_n} \tilde{v} d\mu \right)^{\frac{a_0(1-\theta)}{p_0} + \frac{a_1\theta}{p_1}}$$

となる.

ここで,  $p\left(\frac{a_0(1-\theta)}{p_0} + \frac{a_1\theta}{p_1}\right) =: a$  とおくと  $a > 1$  となり,  $a$  と共役指数  $a'$  に対して Hölder の不等式を用いると

$$(8) \quad \int_{E_n} \tilde{v} d\mu \leq \left( \int_{E_n} \tilde{v}^a d\mu \right)^{1/a} \left( \int_{E_n} 1^{a'} d\mu \right)^{1/a'} = \left( \int_{E_n} \tilde{v}^a d\mu \right)^{1/a} \mu(E_n)^{1/a'}.$$

(7),(8) より

$$v_0(E_n)^{\frac{1-\theta}{p_0}} v_1(E_n)^{\frac{\theta}{p_1}} \leq c_0^{\frac{1-\theta}{p_0}} c_1^{\frac{\theta}{p_1}} \mu(E_n)^{\frac{(1-a_0)(1-\theta)}{p_0} + \frac{(1-a_1)\theta}{p_1}} \left( \int_{E_n} \tilde{v}^a d\mu \right)^{\frac{1}{a} \frac{a}{p}} \mu(E_n)^{\frac{1}{a'} \frac{a}{p}}.$$

ここで  $\mu(E_n)$  の指数を計算する.  $(1-\theta)/p_0 + \theta/p_1 = 1/p$ ,  $1/a + 1/a' = 1$ ,  $p\left(\frac{a_0(1-\theta)}{p_0} + \frac{a_1\theta}{p_1}\right) = a$  より

$$\begin{aligned} \frac{(1-a_0)(1-\theta)}{p_0} + \frac{(1-a_1)\theta}{p_1} + \frac{1}{a'} \frac{a}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} + \frac{-a_0(1-\theta)}{p_0} + \frac{-a_1\theta}{p_1} + \frac{a}{a'p} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{a}{p} + \frac{a}{a'p} \\ &= 0. \end{aligned}$$

このことより

$$v_0(E_n)^{\frac{1-\theta}{p_0}} v_1(E_n)^{\frac{\theta}{p_1}} \leq c_0^{\frac{1-\theta}{p_0}} c_1^{\frac{\theta}{p_1}} \left( \int_{E_n} \tilde{v}^a d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = c_0^{\frac{1-\theta}{p_0}} c_1^{\frac{\theta}{p_1}} v(E_n)^{\frac{1}{p}}.$$

このように reverse Hölder が適用できると仮定するならば, 求めている評価を得ることができることがわかった.

そこで今後必要なことは,  $\mathbb{R}^n$  を一般化すること, ルベーグ測度  $dx$  を  $d\mu$  にするにはどのような測度  $\mu$  ならばよいか, さらに cube  $I$  を, 我々が構成した  $E_n$  のような集合に対しても理論が成り立つかなどが挙げられる.

## 参考文献

- [1] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*. Academic Press. (1988).
- [2] A. P. Calderón, *Spaces between  $L_1$  and  $L_\infty$  and the theorem of Marcinkiewicz*, Studia Math. **26** (1966), 273-299.
- [3] E. V. Ferreyra, *On a negative result concerning interpolation with change of measures for Lorentz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1413-1417.
- [4] A. Gogatishvili, S. Moritoh, M. Niwa, T. Sobukawa, *Interpolation theorem for block-Lorentz spaces*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces. (2003), to appear.

- [5] R. A. Hunt, *On  $L(p, q)$  spaces*, Enseign. Math. **12** (1966), 249–276.
- [6] S. Moritoh, M. Niwa, T. Sobukawa, *Interpolation theorem on Lorentz spaces over weighted measure spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. to appear.
- [7] M. Riesz, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires*, Acta. Math. **49** (1926), 465–497.
- [8] E. M. Stein, G. Weiss, *Interpolation of operators with change of measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 159–172.
- [9] G. O. Thorin, *An extension of a convexity theorem due to M. Riesz*, Kungl. Fysiogr. Sällsk. i Lund Forh. **8** (1938), 166–170.
- [10] A. Torchinsky, *Real-variable Methods in Harmonic Analysis*, Pure and Applied Math. #123, Academic Press (1986).