数理解析研究所講究録 1455 巻 2005 年 17-22

Genaralized supremum and weak order completeness in ordered linear spaces

(順序線形空間における一般化上限と弱い順序完備性について)

小室　直人 (Naoto Komuro)　　北海道教育大学旭川校

はじめに

順序線形空間において、部分集合の上限の定義を拡張する方法はいくつか知られているが、上界集合の極小元全体を一般化上限と定めると、多くのよい性質を備えていることが、これまでに分かってきた。上限の概念が拡張されることに伴い、対応する弱い順序完備性の条件が浮かび上がってくる。その条件は、一般化上限の性質を調べる上でも重要な役割を果たすが、順序線形空間がいつその条件を満たすかについて、まだ十分には分かっていない。本稿の目的は、このことについて得られた結果と、課題についてまとめることである。

1．一般化上限

E を実線形空間、P を E の凸錐で

(P1)　$E = P - P$,

(P2)　$P \cap (-P) = \{0\}$.

を満たすものとする。$x \leq y \iff y - x \in P$ $(x, y \in E)$ により順序関係を定めたとき、E を順序線形空間といい、(E, P) で表す。E の空でない部分集合 A に対し、その上界、下界全体の集合をそれぞれ $U(A)$, $L(A)$ で表す。すなわち、

$$U(A) = \{x \in E \mid y \leq x,\ \forall y \in A\}, \qquad L(A) = \{x \in E \mid y \geq x,\ \forall y \in A\}.$$

また、上に（下に）有界な空でない集合全体を $\mathfrak{B}$ $(\mathfrak{B}')$ で表す。すなわち、

$$\mathfrak{B} = \{A \subset E \mid A \neq \emptyset,\ U(A) \neq \emptyset\}, \qquad \mathfrak{B}' = \{B \subset E \mid B \neq \emptyset,\ L(B) \neq \emptyset\}.$$

$A \in \mathfrak{B}$, 及び $A' \in \mathfrak{B}'$ に対し、それらの一般化上限、一般化下限をそれぞれ

$$\begin{aligned} \operatorname{Sup} A &= \{a \in U(A) | \ b \leq a,\ \ b \in U(A) \Longrightarrow a = b\} \quad (A \in \mathfrak{B}), \\ \operatorname{Inf} A' &= \{a \in L(A') | \ b \geq a,\ b \in L(A') \Longrightarrow a = b\} \quad (A' \in \mathfrak{B}'). \end{aligned}$$

で定義する。本来の上限、下限は、区別のため本稿ではそれぞれ、$\operatorname{lub} A$, $\operatorname{glb} A$ で表す。$A \in \mathfrak{B}$ に対し、$\operatorname{lub} A$ が存在せず $\operatorname{Sup} A \neq \emptyset$ となる場合、また、$\operatorname{Sup} A = \emptyset$ となる場合のいずれも十分多くの具体例がある。$a = \operatorname{lub} A$ が存在するとき、$\operatorname{Sup} A = \{a\}$ であるが、逆に、$\operatorname{Sup} A = \{a\}$ であっても $a = \operatorname{lub} A$ は無条件には従わない。

本節では、この一般化上限の性質について、これまでに分かっている主なものをまとめる。その際、空間 (E, P) に対する条件として、しばしば関わるのが、

$$U(A) = (\operatorname{Sup} A) + P \qquad (\forall A \in \mathfrak{B}). \tag{1.1}$$

である。この条件は‘$\supset$’の方向は常に成り立つので、実質的に‘$\subset$’すなわち、A の任意の上界に対し、それよりも小さな極小上界 ($\operatorname{Sup} A$ の点) が常に存在するという意味で、2 節以降、本稿の主要な考察対象である。一般化上限の性質のうち、条件 (1.1) に無関係に成り立つものを Proposition 1 に、前提として必要なものを Proposition 2, Proposition 3 で述べる。

Proposition 1. ([2])

(*a*) $\mathrm{Sup}(coA) = \mathrm{Sup}\,A \quad (A, B \in \mathfrak{B})$,
（ここで、coA は、A の凸包を表す。）

(*b*) $L(U(A+B)) = L(U(A) + U(B)) \quad (A, B \in \mathfrak{B})$,
（ただし、$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$）

(*c*) $a \in a_+ + a_- \quad (a \in E)$.
（ただし、 $a_+ = \mathrm{Sup}\{a, 0\},\ a_- = \mathrm{Inf}\{a, 0\}$）

Proposition 2. ([2]) 空間 (E, P) が条件 (1.1) を満たすとき、次が成り立つ。

(*a*) $\mathrm{Sup}(\mathrm{Inf}(\mathrm{Sup}\,A))) = \mathrm{Sup}\,A \qquad (A \in \mathfrak{B})$,

(*b*) $\mathrm{Sup}\,A = \{a\}$ ならば $a = \mathrm{lub}\,A$

(*c*) $\mathrm{Sup}(A + B) + P \supset \mathrm{Sup}\,A + \mathrm{Sup}\,B \qquad (A, B \in \mathfrak{B})$,

(*d*) $\mathrm{Sup}(L(\mathrm{Sup}\,A + \mathrm{Sup}\,B)) = \mathrm{Sup}(A + B) \qquad (A, B \in \mathfrak{B})$.

一般化上限の持つもう一つの興味深い性質は、それを用いて空間 (E, P) の順序完備化を構成できることである。まず、空間 (E, P) における一般化上限全体のなす集合を $\tilde{E}$ とおく。すなわち、$\tilde{E} = \{\mathrm{Sup}\,A \mid A \in \mathfrak{B}\}$. 次に、$(E, P)$ における順序関係 ’ $\leq$ 及びベクトル演算 ’ $\oplus$ ’ $*$ ’ を次により定義する。

Definition. $\mathrm{Sup}\,A$, $\mathrm{Sup}\,B \in \tilde{E}$ 及び $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し、順序関係、加法、スカラー倍を次のように定める。

$$\mathrm{Sup}\,A \leq \mathrm{Sup}\,B \Leftrightarrow \mathrm{Sup}\,B \subset \mathrm{Sup}\,A + P$$

$$\mathrm{Sup}\,A \oplus \mathrm{Sup}\,B = \mathrm{Sup}(A + B)$$

$$\lambda * \mathrm{Sup}\,A = \begin{cases} \mathrm{Sup}(\lambda A) & (\lambda > 0) \\ \{0\} & (\lambda = 0) \\ \mathrm{Sup}(\lambda U(A)) & (\lambda < 0). \end{cases}$$

更に、$\tilde{E}$ の 2 つの部分集合 $\tilde{P}$, $\tilde{E}$ を

$$\tilde{P} = \{\mathrm{Sup}\,A \in \tilde{E} \mid \mathrm{Sup}\,A \subset P\}$$

$$\tilde{E}_1 = \{\mathrm{Sup}\,A \in \tilde{E} \mid \mathrm{Sup}\,A = \{a_0\} \text{ for some } a_0 \in E\}$$

で定める時、次が成り立つ。

Proposition 3. ([2]) E を実バナハ空間とし、E の閉凸錐 P による順序線形空間 (E, P) が、条件 (1.1) を満たすとする。このとき、$\tilde{E}$ は、上記の定義の下で、完備ベクトル束をなす。更に、

(*a*) $\tilde{P}$ は、$\tilde{E}$ における凸錐をなし、 (P1), (P2) を満たす。また、
$\mathrm{Sup}\,A \leq \mathrm{Sup}\,B \Longleftrightarrow \mathrm{Sup}\,B \oplus (-1) * \mathrm{Sup}\,A \in \tilde{P}$
が、成り立つ。

(*b*) $\tilde{E}_1$ は、$\tilde{E}$ の部分空間をなし、対応 $E \ni a \longleftrightarrow \mathrm{Sup}\,A = \{a\} \in \tilde{E}_1$ により、 (E, P) と順序線形空間として同型になる。

この命題の中で、E, P に対する条件は、いくらか弱めることができる。また、(E, P) が初めから順序完備であるときは、$(\tilde{E}, \tilde{P})$ と (E, P) は、順序線形空間として同型である。簡単な例として、$\mathbb{R}^3$ における凸 n 角錐 $(n \geq 4)$ を P とすると、$(\mathbb{R}^3, P)$ は非完備だが、$\tilde{E}$ は、n 次元空間となる。P が円錐の場合、$\tilde{E}$ は、S^1 上の連続関数の空間の完備化にもなっていて、同時に、2 次の実対称行列の空間の順序完備化を与えることも示される。

$\tilde{E}$ は、同時にベクトル束をなすが、束演算に関し次が示される。

Corollary 1. $\mathrm{Sup}\, A$, $\mathrm{Sup}\, B \in \tilde{E}$ に対し、次が成り立つ。

(a) $\quad \mathrm{Sup}\, A \vee \mathrm{Sup}\, B = \mathrm{Sup}(L(U(A) \cap U(B)))$,

(b) $\quad \mathrm{Sup}\, A \wedge \mathrm{Sup}\, B = \mathrm{Sup}(L(U(A)) \cap L(U(B)))$.

2．弱い順序完備性とその十分条件

1で述べた結果からも分かるように、一般化上限が多くの性質を備えるために、空間 (E, P) が満たすべき条件として、条件 (1.1) の重要性は明らかである。この観点から、$\mathrm{Sup}\, A$ の定義を次のように修正することが考えられる。すなわち、$A \in \mathfrak{B}$ に対し、$U(A)$ の極小元全体（仮に $X(A)$ とおく）が、$U(A) = X(A) + P \quad \cdots\cdots (*)$ を満たすとき、$X(A)$ を A の一般化上限と呼び、$\mathrm{Sup}\, A$ で表す。空間 (E, P) が条件 (1.1) を満たすときは意味に差異はないが、そうでないときは、$(*)$ を満たさない A に対しては、$\mathrm{Sup}\, A$ は、存在しないこととする。この定義に従うと、「任意の上に有界な部分集合が、一般化上限をもつ」という弱い順序完備性として、次の定義は自然である。

Definition. (E, P) が条件 (1.1) を満たすとき、(E, P) は、**weakly order complete**（以下 w.o.c. と略記）であるという。

本節では、空間 (E, P) が、w.o.c. であるための十分条件のうち、これまでに分かっている主なものをまとめる。順序完備性に類似した条件は、様々知られているが、そのうち、w.o.c. と最も直接的な関係にあるのが次の条件である。

Definition. (E, P) が、**monotone order comlpete**（以下 m.o.c. と略記）であるとは、E の任意の上に有界な全順序部分集合 A が、上限 $\mathrm{lub}\, A$ を持つこととする。

この条件は通常の順序完備性よりも弱く、E が有限次元の場合は、正錐 P が閉であることと同値である。また、E が正錐 P を持つバナハ空間で、E^* をその双対空間とし、P の dual cone: $P^* = \{x^* \in E^* \mid \langle x^*, x \rangle \geq 0\ (x \in P)\}$ が条件 (P1) を満たすとき、(E^*, P^*) は、m.o.c. である。m.o.c. と w.o.c. の関係を Proposition 4 に述べる。

Propositon 4. 順序線形空間 (E, P) が *m.o.c.* であれば、常に *w.o.c.* である。

証明は、Zorn の補題を用いるが、複雑ではない。E が有限次元の場合は、逆も成立する。

E の凸集合 C が代数的閉であるとは、E の任意の直線と C の交わりが、直線の閉部分集合となることとし、$x \in C$ が C の代数的内点であるとは、任意の $y \in E$ に対し $x + \lambda y \in C$ となる $\lambda > 0$ が存在することとする。また、$F \subset C$ が F の exposed face とは、C の代数的な支持超平面 H が存在して、$F = C \cap H$ となることとし、face F の、affine hull の次元を F の次元と呼ぶことにする。このとき、次のような w.o.c. の十分条件が与えられる。

Propositon 5. 順序線形空間 (E, P) において、P が代数的閉で代数的内点をもつとする。P の *exposed face* の次元が全て有限であれば、(E, P) は、*w.o.c.* である。

E に位相が与えられている場合は、Proposition 5 の条件に用いた各用語を位相によるものに置き換えてもそのまま成り立つ。この十分条件は、P の幾何学的な特徴を用いた点で Proposition 4 のものとは異なる印象を与えるが、実際これらの十分条件の間に強弱関係がないことが反例により分かっている。

順序線形空間 (E, P) において、部分集合 C の任意の点 x に対し、x より小さい C の極小元が存在する時、集合 C は **domination property** を持つという。この用語を用

いると、w.o.c. は、任意の $A \in \mathfrak{B}$ に対し $U(A)$ が domination property を持つことと言い換えられる。凸集合の domination property については、最適化理論で様々研究されており、その一部を用いて次の結果が得られた。

Proposition 6. ([3]) *E を reflexive なバナハ空間とし、正錐 P は位相的に閉で normal とする。このとき (E,P) は w.o.c. である。*

ここで、凸錐 P が **normal** であるとは、$(V+P)\cap(V-P)=V$ を満たす 0 の近傍 V のみによって、0 の基本近傍系を構成できることとする。

Proposition 6 とやや類似した十分条件として、次の結果がある。

Proposition 7. ([3]) *E をバナハ空間とし、正錐 P が閉で、その dual cone P^* が位相的内部を持つとする。このとき (E,P) は w.o.c. である。*

この証明には、凸解析でよく知られた、Bishop Phelps の定理を用いる。条件のうち「P^* が位相的内部をもつ」という部分を、それより弱い「P が normal である」に置き換えると、反例が生じる。このことは、Proposition 6 においても、reflexive という条件が本質的であることを意味する。

3．弱い順序完備性の具体例を用いた考察

前節で述べた様々な十分条件から分かるように、条件としての「w.o.c.」は十分に弱いものである。しかし、一方で連続関数の空間が通常の順序に関しこれを満たさない他、正錐 P が位相的に閉であることが必要条件であることも分かっている。条件 w.o.c. の考察を更に進めるため、順序線形空間 (E,P) を次に述べるものに絞って調べた。すなわち、V を $\|\cdot\|$ をノルムとするノルム空間とし、$E=\mathbb{R}\times V$, $P=\{(t,v)\in E \mid t\geq\|v\|\}$ とおき、(E,P) が w.o.c. となる条件を考える。一般に、正錐 P の 0 における支持超平面をとることにより、多くの順序線形空間がこのタイプのものと見なすことができる。

数列空間: $l_1=\{x=(x_0,x_1,x_2,\cdots) \mid \Sigma_{n=0}^{\infty}|x_n|<\infty\}$, $l_p=\{x=(x_0,x_1,x_2,\cdots) \mid \Sigma_{n=0}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$ $(1<p<\infty)$, $l_\infty=\{x=(x_0,x_1,x_2,\cdots) \mid \mathrm{lub}\{|x_n|\}<\infty\}$ に対し、これらの正錐として

$$P_1=\{x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in l_1 \mid x_0\geq\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\},$$

$$P_p=\{x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in l_p \mid x_0\geq(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}\}\ (1<p<\infty),$$

$$P_\infty=\{x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in l_\infty \mid x_0\geq\mathrm{lub}\{|x_n|\}_{n=1}^{\infty}\}$$

のいずれかで組み合わせたもの (l_p,P_q) $(1\leq p\leq q\leq\infty)$ を考える。ただし、$p>q$ となる組み合わせは条件（P1）を満たさないので考えないこととし、$p<q$ の時は、$l_p\cap P_q$ を改めて P_q と書くことにする。

はじめに、条件 m.o.c. に関する基本的な結果として次の定理が得られた。

Theorem 1. $(V,\|\cdot\|)$ をノルム空間、$E=\mathbb{R}\times V$, $P=\{(t,v)\in E \mid t\geq\|v\|\}$ とおく時、順序線形空間 (E,P) が *m.o.c.* であることと、$(V,\|\cdot\|)$ がバナハ空間であることは同値である。

この結果は、北海道大学の勝良健史氏が本稿の証明とは別の方法で示している。定理より、直ちに次の結果を得る。

Corollary 2. (l_p, P_q) $(1 \leq p \leq q \leq \infty)$ が *m.o.c.* であるための必要十分条件は、$p = q$ となることである。

（Theorem 1 の証明）　$(V, \|\cdot\|)$ がバナハ空間であるとし、$A = \{(t_\lambda, v_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を (E, P) の全順序部分集合で上に有界なものとする。$t_\lambda \leq t_\mu \iff \lambda \leq \mu$ と定めると Λ も全順序集合である。$\{t_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は、上に有界であるから、$\mathrm{lub}\, t_\lambda = \bar{t}$ が存在する。$\{t_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は、Cauchy net をなし、$t_\lambda \leq t_\mu$ の時

$$\|v_\mu - v_\lambda\| \leq t_\mu - t_\lambda \tag{3.1}$$

となっているから、$\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ も Cauchy net をなす。従って、V の完備性から $\bar{v} = \lim v_\lambda$ をとることができる。(3.1) において、μ に関する極限をとると、$\|\bar{v} - v_\lambda\| \leq \bar{t} - t_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ が得られ、$(\bar{t}, \bar{v}) \in U(A)$ であることが分かる。また、$(t, v) \in U(A)$ とすると、$\|v - v_\lambda\| \leq t - t_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ であるから、λ に関する極限をとって $\|v - \bar{v}\| \leq t - \bar{t}$ が得られ、$(\bar{t}, \bar{v}) = \mathrm{lub}\, A$ であることが分かる。

逆に、(E, P) が、m.o.c. であるとし、$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ を V における Cauchy 列とする。必要ならば部分列をとることにより、$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_{n+1} - v_n\| < \infty$ となるようにする。$t_1 = 0$, $t_2 - t_1 = \|v_2 - v_1\|$, $t_3 - t_2 = \|v_3 - v_2\|$, $\cdots\cdots$

$$t_{n+1} - t_n = \|v_{n+1} - v_n\| \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.2}$$

によって、数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定め、$t_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \|v_{n+1} - v_n\|$ とおくと、$\|v_1 - v_n\| \leq \sum_{n=1}^{n-1} \|v_{n+1} - v_n\| \leq t_\infty \leq 2t_\infty - t_n$ であるから、$(2t_\infty, v_1) \geq (t_n, v_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ である。また、(3.2) より $\{(t_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は、(E, P) における単調増加列となる。従って、(E, P) が m.o.c. であることより、$(\bar{t}, \bar{v}) = \mathrm{lub}\, A$ （ただし $A = \{(t_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$）が存在する。$\bar{t} \geq t_\infty$ であるが、今、$\bar{t} - t_\infty = \varepsilon > 0$ と仮定する。$\{v_n\}$ は、無限点列と考えてよいから、$n_0 \leq n, m$ の時, $\|v_n - v_m\| < \varepsilon$ かつ、$v_{n_0} \neq \bar{v}$ となる n_0 をとることができる。このとき、$\|v_{n_0} - v_n\| < \varepsilon = \bar{t} - t_\infty \leq \bar{t} - t_n$ であるから、$(\bar{t}, v_{n_0}) \geq (t_n, v_n)$ $(n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots)$ を得、従って単調性から、

$$(\bar{t}, v_{n_0}) \geq (t_n, v_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となる。一方、$(\bar{t}, v_{n_0}) \not\geq (\bar{t}, \bar{v})$ であるから、$(\bar{t}, \bar{v})$ が上限であることに反する。従って、$\bar{t} = t_\infty$ となるから、$\|\bar{v} - v_n\| \leq t_\infty - t_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ が得られ、V の完備性が示された。　（証明終）

次に、Proposition 5 の条件について考える。まず、(l_p, P_q) において、P_q が代数的に閉となるのは明らかで、また、$(1, 0, 0, \cdots)$ が P_q の代数的内部であることも明らかである。更に、次の結果が成り立つ。

Proposition 8. (l_p, P_q) において、$1 < q < \infty$ の時、正錐 P_q の *exposed face* の次元は、全て高々 1 で、$q = 1$, $q = \infty$ の時は、無限次元の *exposed face* が存在する。

$1 < q < \infty$ の時は、Hölder の不等式を用いた計算で直接示され、$q = \infty$ の時は、例えば、$F = \{x = (x_0, x_1, x_2, \cdots) \in P_\infty \mid x_0 = x_1\}$ が、無限次元の exposed face をなす。これより、(l_p, P_q) において、$1 < q < \infty$ の場合は常に w.o.c. であることになり、Theorem 1 において、(E, P) が w.o.c. になるために、V がバナハ空間である必要はないことが分かる。

以上の結果を総合すると、(l_p, P_q) の全ての組み合わせの中で、$1 \leq p < \infty$, $q = \infty$ の場合を除き、全て w.o.c. であることが確かめられる。ただし、除外された場合については、現在のところ不明である。

最後に、「(E,P) が、w.o.c. で、$A\subset E$ を上に有界な全順序部分集合とするとき、A の一般化上限 $\mathrm{Sup}\,A$ は1価となるか」について述べる。E が有限次元の場合は、この予想は正しい。実際、有限次元の場合は、w.o.c. と m.o.c. と正錐 P が閉であることが全て同値になり、上に有界な全順序部分集合 A に対しては、常に $\mathrm{lub}\,A$ が存在する。次に、無限次元空間の例として、(l_1,P_2) を考える。上記の考察により、これは、m.o.c. でないが、w.o.c. になっている。級数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を考える。自然数の部分列 $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ で

$$n_0=1$$
$$S=\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}+\sqrt{A_3}+\cdots<+\infty,$$

ただし、 $A_k=\frac{1}{(n_{k-1}+1)^2}+\frac{1}{(n_{k-1}+2)^2}+\cdots+\frac{1}{{n_k}^2}\qquad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

を満たすものをとることができる。実際、その方法の一つとして、$n_k=2^k\quad(k=0,1,2,3,\cdots)$ ととればよい。ここで、l_1 の点列：$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$a_0=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots),$$
$$a_1=(S_1,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{n_1},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots),$$
$$a_2=(S_2,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{n_1},\ \frac{1}{n_1+1},\ \cdots,\ \frac{1}{n_2},\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots),$$
$$a_3=(S_3,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{n_1},\ \frac{1}{n_1+1},\ \cdots,\ \frac{1}{n_2},\ \frac{1}{n_2+1},\ \cdots,\ \frac{1}{n_3},\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots\cdots),$$
$$\vdots$$

(ただし、$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{A_k}\ \ (n=1,2,\cdots)$)
で定め、
$u_0=(S+\alpha,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\ \cdots\cdots\cdots)$
(ただし、 $\alpha=(\frac{\pi^2}{6}-1)^{\frac{1}{2}}$)
とおく。明らかに、$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は、(l_1,P_2) における単調増加列となっていて、u_0 は、その上界の一つである。更には、$u_0\in\mathrm{Sup}(\{a_n\}_{n=0}^{\infty})$ であることが示される。ところが、

$$u_1=(S+\sqrt{\alpha^2-(\frac{1}{2})^2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots\cdots)$$

とおくと、類似の計算により、$u_1\in\mathrm{Sup}(\{a_n\}_{n=0}^{\infty})$ であることが分かる。もちろん、u_0 と u_1 の間に大小関係はない。以上により、初めに述べた予想は、無限次元の場合、成り立たないことが分かる。

References

[1] S.Koshi, N.Komuro, *Supsets on partially ordered topological linear spaces*, Taiwanese J. of Math. **4-2** (2000), 275–284.

[2] N.Komuro, *The set of upper bounds in ordered linear spaces*, Proc. of the international conference on nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publishers (2002).

[3] N.Komuro, *Domination property of the set of upper bounds in ordered linear spaces*, Proc. of the international conference on nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publishers (2004).

[4] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Springer-Verlag (1989).

N.Komuro
Hokkaido University of Education at Asahikawa
Hokumoncho 9 chome Asahikawa 070-8621 Japan
e-mail: komuro@ asa.hokkyodai.ac.jp