数理解析研究所講究録 1455 巻 2005 年 49-57

バナッハ空間の ψ-直和とその凸性

新潟大自然科学 三谷 健一 (Ken-ichi Mitani)
新潟大理 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)

1 序文

$\mathbb{C}^n$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が *absolute* であるとは

$$\|(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|)\|=\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\| \quad \forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n$$

が成立するときをいう. $\|\cdot\|$ が *normalized* とは

$$\|(1,0,\cdots,0)\|=\|(0,1,0,\cdots,0)\|=\cdots=\|(0,\cdots,0,1)\|=1.$$

をいう. 例えば ℓ_p-norms $\|\cdot\|_p$ は absolute normalized である:

$$\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_p=\begin{cases}(|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p} & \text{if } 1\le p<\infty,\\ \max(|x_1|,\cdots,|x_n|) & \text{if } p=\infty.\end{cases}$$

AN_n を $\mathbb{C}^n$ 上の absolute normalized norm 全体とする. また, Ψ_2 を

$$\psi(0)=\psi(1)=1,\quad \max\{1-t,t\}\le\psi(t)\le 1$$

を満たす [0,1] 上の連続凸関数全体とする. このとき, Bonsall-Duncan[2] は, $\mathbb{C}^2$ 上の absolute norm を [0,1] 上の凸関数で特徴付けた. 即ち, AN_2 と Ψ_2 は

$$\psi(t)=\|(1-t,t)\| \quad (0\le t\le 1) \tag{1}$$

の下で 1 対 1 対応がある. 実際, 任意の $\psi\in\Psi_2$ に対して

$$\|(x_1,x_2)\|_\psi=\begin{cases}(|x_1|+|x_2|)\psi\left(\frac{|x_2|}{|x_1|+|x_2|}\right) & ((x_1,x_2)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x_1,x_2)=(0,0))\end{cases}$$

と定義すると $\|\cdot\|_\psi\in AN_2$ かつ (1) をみたす. これに関連して, Saito-Kato-Takahashi [12] は $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm を次のように特徴付けた. 任意の $n\ge 2$ に対して,

$$\Delta_n=\{(s_1,s_2,\cdots,s_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}:s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}\le 1,\ s_i\ge 0\ (\forall i)\}.$$

とおく. 任意の $\|\cdot\|\in AN_n$ に対して,

$$\psi(s_1,\cdots,s_{n-1})=\|(1-\sum_{i=1}^{n-1}s_i,s_1,\cdots,s_{n-1})\| \quad ((s_1,\cdots,s_{n-1})\in\Delta_n). \tag{2}$$

とすると, ψ は Δ_n 上で連続な凸関数であり, 次の条件を満たす:

$$\psi(0,0,\cdots,0)=\psi(1,0,\cdots,0)=\cdots=\psi(0,\cdots,0,1)=1 \qquad (A_0)$$

$$\psi(s_1,\ldots,s_{n-1})\geq(s_1+\cdots+s_{n-1})\psi\left(\frac{s_1}{s_1+\cdots+s_{n-1}},\cdots,\frac{s_{n-1}}{s_1+\cdots+s_{n-1}}\right) \qquad (A_1)$$

$$\psi(s_1,\ldots,s_{n-1})\geq(1-s_1)\psi\left(0,\frac{s_2}{1-s_1},\cdots,\frac{s_{n-1}}{1-s_1}\right) \qquad (A_2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\psi(s_1,\ldots,s_{n-1})\geq(1-s_{n-1})\psi\left(\frac{s_1}{1-s_{n-1}},\cdots,\frac{s_{n-2}}{1-s_{n-1}},0\right). \qquad (A_n)$$

Ψ_n を Δ_n 上の凸連続関数で $(A_0),(A_1),\cdots,(A_n)$ を満たすもの全体とする. このとき AN_n と Ψ_n は 1 対 1 対応に対応する. 実際, 任意の $\psi\in\Psi_n$ に対して,

$$\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_\psi = \begin{cases} (|x_1|+\cdots+|x_n|)\psi\left(\frac{|x_2|}{|x_1|+\cdots+|x_n|},\cdots,\frac{|x_n|}{|x_1|+\cdots+|x_n|}\right) & \text{if } (x_1,\cdots,x_n)\neq(0,\cdots,0), \\ 0 & \text{if } (x_1,\cdots,x_n)=(0,\cdots,0). \end{cases}$$

を定めると, $\|\cdot\|_\psi\in AN_n$ かつ (2) を満たす.

この対応から, ℓ_p-norm 以外の absolute norm が多く存在することがわかる. ℓ_p-norm$\|\cdot\|_p$ に対応する関数を ψ_p とおく.

さらにこれに関連して, ψ-直和が導入された. $\psi\in\Psi_n$ とバナッハ空間 X_1, X_2, $\cdots$, X_n に対して, $X_1\oplus X_2\oplus\cdots\oplus X_n$ 上のノルムを

$$\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_\psi=\|(\|x_1\|,\|x_2\|,\cdots,\|x_n\|)\|_\psi \qquad (x_i\in X_i).$$

とする. このバナッハ空間を $X_1,X_2,\cdots,X_n$ の直和とよび $(X_1\oplus X_2\oplus\cdots\oplus X_n)_\psi$ と表す. これは有限個の ℓ_p-直和の一般化であることに注意する. 実際 $1\leq p\leq\infty$ のとき $(X_1\oplus X_2\oplus\cdots\oplus X_n)_{\psi_p}=(X_1\oplus X_2\oplus\cdots\oplus X_n)_p$.

バナッハ空間 X に対して, 閉単位球、単位球面をそれぞれ $B_X=\{x\in X:\|x\|\leq 1\}$, $S_X=\{x\in X:\|x\|=1\}$ とおく.

定義 1.1. (i) バナッハ空間 X が狭義凸であるとは, 任意の $x\neq y$ なる $x,y\in S_X$ に対して $\|(x+y)/2\|<1$ が成り立つときをいう.
(ii) バナッハ空間 X が一様凸であるとは, 任意の ε $(0<\varepsilon\leq 2)$ に対して $0<\delta<1$ が定まり, $\|x-y\|\geq\varepsilon$ なる任意の元 $x,y\in B_X$ に対して, $\|(x+y)/2\|\leq 1-\delta$ が成り立つことである.

定義 1.2 ([3]). バナッハ空間 X が *uniformly non-square* であるとは, ある $\delta>0$ が存在して $\|(x-y)/2\|>1-\delta$, $x,y\in B_X$ ならば $\|(x+y)/2\|\leq 1-\delta$ であるときをいう.

定義 1.3 ([1, 3]). (i) バナッハ空間 X が B_n-*convex* であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x_1, \cdots, x_n \in B_X$ に対して,

$$\min_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm 1} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\| \leq n(1-\delta)$$

であるときをいう. また, X が B-*convex* であるとは, ある $n \geq 2$ に対して, X が B_n-*convex* であるときをいう.
(ii) バナッハ空間 X が J_n-*convex* であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x_1, \cdots, x_n \in B_X$ に対して

$$\min_{1 \leq k \leq n} \|x_1 + \cdots + x_k - (x_{k+1} + \cdots + x_n)\| \leq n(1-\delta)$$

のときをいう.

明らかに、uniformly non-square と B_2-convex($=J_2$-convex) は一致する. また、次のことが知られている:
(i) uniformly non-square ならば superreflexive である, この逆は成立しない.
(ii) X が J-convex であることと X が superreflexive であることは同値.
(iii) X が B-convex であることと X が of type p for some $p > 1$ は同値.

また最近, $\mathbb{C}^n$ 上の absolute ノルムや ψ-直和空間における狭義凸性, 一様凸性, smooth 性, uniformly non-square 性などについて研究されている. ([4, 5, 6, 9, 10, 12, 17]).

本論文では, これらの幾何学的性質を ψ-直和を用いて特徴付けを与えることを目的とする. 第 2 章では狭義凸性, 一様凸性の ψ-直和による特徴づけを考察する. 第 3 章では uniformly non-squareness を考察する.Takahashi-Kato [15] は uniformly non-square Banach space を Littlewood 行列のノルムの評価を使って特徴付けたが, この結果を ψ-直和空間に対しても同様の議論を行うことができる. さらに B-convexity や J-convexity についても同様に ψ-直和を使って特徴付ける.

2 狭義凸性, 一様凸性

初めに, 次の狭義凸性に関する特徴づけを考える.

命題 2.1 ([1]). X をバナッハ空間とし, $1 < p < \infty$ とする. このとき X が狭義凸であることと任意の $x, y \in X (x \neq y)$ に対して

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p < \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{3}$$

であることは同値である.

定理 2.2 (Mitani-Saito[7]). $\psi \in \Psi_2$ とし, ψ が唯一の最小点 t_0 を持つとする. このとき次は同値である.
(i) バナッハ空間 X が狭義凸である.
(ii) 任意の $x, y \in X$ $(x \neq y)$ に対して

$$\|(1-t_0)x + t_0 y\| < \frac{1}{\psi(t_0)} \|((1-t_0)x, t_0 y)\|_\psi \tag{4}$$

である.

Remark 2.3. 定理 2.2 において, $\psi = \psi_p$ ならば $\psi_p(t) > \psi_p(1/2)$. 従って (4) の不等式は (3) の不等式になることが容易にわかる. ゆえにこの定理は上の命題を含む.

例 2.4. $1/2 \leq \alpha \leq 1$ とする.

$$\psi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha} t + 1 & \text{if } \ 0 \leq t \leq \alpha, \\ t & \text{if } \ \alpha \leq t \leq 1. \end{cases}$$

このとき $\psi_\alpha \in \Psi_2$ であり, $X \oplus_{\psi_\alpha} Y$ のノルムは

$$\|(x,y)\|_{\psi_\alpha} = \max\{\|x\| + (2 - \frac{1}{\alpha})\|y\|, \|y\|\}.$$

と与えられる.

この関数を上の定理に適用すると次が得られる.

系 2.5. $1/2 \leq \alpha < 1$ とおく. このときバナッハ空間 X は狭義凸であることと, 任意の $x, y \in X (x \neq y)$ に対して

$$\|(1-\alpha)x + \alpha y\| < \frac{1}{\alpha} \max\left\{(1-\alpha)\|x\| + (2\alpha - 1)\|y\|, \alpha\|y\|\right\}.$$

は同値である.

Remark 2.6. 任意のバナッハ空間 X と $\psi \in \Psi_2$ に対して次の不等式が成り立つことに注意する.

$$\|(1-t_0)x + t_0 y\| \leq \frac{1}{\psi(t_0)} \|((1-t_0)x, t_0 y)\|_\psi \quad (\forall x, y \in X)$$

但し, t_0 は任意の ψ の最小点.

さらに一様凸性についても ψ-直和で特徴付けられる.

命題 2.7 ([1]). X をバナッハ空間とする. また $1 < p < \infty$ とする. このとき X が一様凸であることと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_p(\varepsilon) > 0$ が存在し $\|x - y\| \geq \varepsilon$, $x, y \in B_X$ ならば

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p \leq (1 - \delta_p(\varepsilon)) \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}$$

が成り立つことは同値である.

定理 2.8 (Mitani-Saito[7]). $\psi \in \Psi_2$ が唯一の最小点 t_0 を持つとする．このとき次は同値．
(i) バナッハ空間 X が一様凸である．
(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し $\|x-y\| \geq \varepsilon,\ x, y \in B_X$ ならば

$$\|(1-t_0)x + t_0 y\| \leq (1-\delta)\frac{1}{\psi(t_0)}\|((1-t_0)x, t_0 y)\|_\psi.$$

である．

3 uniformly non-squareness

Takahashi-Kato[15] は $\ell_p(X)$ の Littlewood 行列のノルムの評価を使い，次のように uniformly nonsquareness を特徴付けた．ここで Littlewood 行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

また，バナッハ空間 X と $1 \leq p \leq \infty$ に対して，$\ell_p^2(X)$ を $\ell_p^2(X) = (X \oplus X)_p$ と定義する．

定理 3.1 (Takahashi-Kato[15]). バナッハ空間 X において次は同値．
(i) X が *uniformly nonsquare.*
(ii) ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x, y \in X$ に対して，

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p \leq (2-\delta)\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}.$$

(iii) 任意の (resp. ある) p $(1 < p < \infty)$ に対して，

$$\|A : \ell_p^2(X) \to \ell_p^2(X)\| < 2.$$

(iv) 任意の (resp. ある) r と s $(1 < r \leq \infty, 1 \leq s < \infty, 1/r + 1/r' = 1)$ に対して

$$\|A : \ell_r^2(X) \to \ell_s^2(X)\| < 2^{1/r' + 1/s},$$

が成り立つ．

我々は ψ-直和を使って上の結果を拡張した．任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して $\ell_\psi^2(X) = (X \oplus X)_\psi$ と定義する．

定理 3.2 (Mitani-Saito[7]). $\psi, \phi \in \Psi_2$ とする．また $\phi \neq \psi_\infty$ であり ψ は唯一の最小点 t_0 をもつとする．このときバナッハ空間 X に対して次は同値．
(i) X は *uniformly non-square.*

(ii) ある $\delta(0<\delta<1)$ が存在して, 任意の $x,y\in X$ に対して,

$$\|((1-t_0)x+t_0y,(1-t_0)x-t_0y)\|_\phi \\ \leq \frac{\|(1,1)\|_\phi}{\psi(t_0)}(1-\delta)\|((1-t_0)x,t_0y)\|_\psi.$$

(iii)

$$\|A:\ell^2_\psi(X)\to\ell^2_\phi(X)\|<\frac{\|(1,1)\|_\phi}{\psi(t_0)}.$$

Remark 3.3. 上の定理において, $\psi=\psi_r,\phi=\psi_s(1<r\leq\infty,1\leq s<\infty)$ とすると ψ は唯一の最小点 $t_0=1/2$ を持つ. よって (iii) は

$$\|A:\ell^2_{\psi_r}(X)\to\ell^2_{\psi_s}(X)\|<\frac{\|(1,1)\|_{\psi_s}}{\psi_r(t_0)}=2^{1/r'+1/s}.$$

従ってこれは定理 3.1 を含む.

Remark 3.4. 任意の $\psi,\phi\in\Psi_2$ とバナッハ空間 X において,

$$\|A:\ell^2_\psi(X)\to\ell^2_\phi(X)\|\leq 2\frac{\phi(1/2)}{\psi(t_0)}$$

但し, t_0 は ψ の最小点.

4 B-convexity and J-convexity

X をバナッハ空間とする. $1\leq p\leq\infty$ に対して, $\ell^n_p(X)$ を $\ell^n_p(X)=(\overbrace{X\oplus\cdots\oplus X}^{n})_p$ と定義する. Takahashi-Kato [16] は B-Convexity や J-Convexity を $\ell^n_p(X)$ 上のある行列のノルムの評価で特徴付けた.

定理 4.1 (Takahashi-Kato [16]). $1<p<\infty$ とする. このときバナッハ空間 X に対して次が同値:
(i)X は B_n-*convex.*
(ii)

$$\|R_n:\ell^n_p(X)\to\ell^{2^n}_p(X)\|<2^{n/p}n^{1/p'}$$

が成り立つ.
(iii) 任意の（*resp.* ある）r,s *with* $1<r\leq\infty,1\leq s<\infty$ に対して

$$\|R_n:\ell^n_r(X)\to\ell^{2^n}_s(X)\|<2^{n/s}n^{1/r'}$$

が成り立つ．ここで R_n は Rademacher 行列

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \vdots & R_n \\ 1 & \\ \hline -1 & \\ \vdots & R_n \\ -1 & \end{array}\right).$$

定理 4.2 (Takahashi-Kato [16]). $1 < p < \infty$ とする．このときバナッハ空間 X に対して次が同値:

(i)X が J_n-*convex* である．

(ii)

$$\|A_n : \ell_p^n(X) \to \ell_p^n(X)\| < n$$

が成り立つ．

(iii) 任意の（*resp.* ある）r, s *with* $1 < r \leq \infty, 1 \leq s < \infty$ に対して

$$\|A_n : \ell_r^n(X) \to \ell_s^n(X)\| < n^{1/s+1/r'}$$

が成り立つ．ここで，A_n は admissible 行列 A_n

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{n+1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \vdots & & A_n & \\ 1 & & & \\ \hline 1 & -1 & \cdots & -1 \end{array}\right).$$

上の定理は $\ell_\psi^n(X)$ 上に対しても同様な議論を行うことができる．$\psi \in \Psi_n$ に対して $\ell_\psi^n(X)$ を

$$\ell_\psi^n(X) = (\overbrace{X \oplus \cdots \oplus X}^{n})_\psi$$

と定義する．

定理 4.3 (Mitani-Saito[8]). X をバナッハ空間とする．

(i) $\psi \in \Psi_n$, $\phi \in \Psi_{2^n}$ とする．ψ が唯一の最小点 $t_0 = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$,（但し，$t_j > 0$ $(\forall j)$）を持ち，任意の i に対して

$$\|(1, \cdots, 1, \overset{(i)}{0}, 1, \cdots, 1)\|_\phi < \|(1, \cdots, 1)\|_\phi$$

と仮定する. このとき X が B_n-*convex* であることと

$$\|R_n : \ell_\psi^n(X) \to \ell_\phi^{2^n}(X)\| < \frac{\|(1,\cdots,1)\|_\phi}{\psi(t_0)}$$

が成立することは同値.

(ii) $\psi, \phi \in \Psi_n$ とする. ψ が唯一の最小点 $t_0 = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$ (但し, $t_j > 0$ $(\forall j)$) を持ち, 任意の i に対して

$$\|(1,\cdots,1,\overset{(i)}{0},1,\cdots,1)\|_\phi < \|(1,\cdots,1)\|_\phi$$

と仮定する. このときバナッハ空間 X が J_n-*convex* であることと

$$\|A_n : \ell_\psi^n(X) \to \ell_\phi^n(X)\| < \frac{\|(1,\cdots,1)\|_\phi}{\psi(t_0)}$$

が成立することは同値.

参考文献

[1] B. Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and Their Geometry, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.

[2] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, "London Math. Soc. Lecture Note Series," Vol. 10, 1973.

[3] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces,* Ann. of Math., **80** (1964), 542-550.

[4] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, *On ψ-direct sums of Banach spaces and convexity*, J. Austral. Math. Soc., **75** (2003), 413-422.

[5] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, *Uniform non-squareness of ψ-direct sums of Banach spaces $X \oplus_\psi Y$*, Math. Inequal. Appl., **7** (2004), 429-437.

[6] K. Mitani, S. Oshiro and K. -S. Saito, *Smoothness of ψ-direct sums of Banach spaces,* Math. Inequal. Appl., **8** (2005),147-157.

[7] K. Mitani and K. -S. Saito, A note on geometrical properties of Banach spaces using ψ-direct sums, preprint.

[8] K. Mitani and K. -S. Saito, Convex properties of Banach spaces and ψ-direct sums. preprint.

[9] K. Mitani, K. -S. Saito and T. Suzuki, *Smoothness of absolute norms on* $\mathbb{C}^n$, J. Convex Anal., **10** (2003), no. 1, 89–107.

[10] K.-S. Saito and M. Kato, *Uniform convexity of* ψ*-direct sums of Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl. **277** (2003), no. 1, 1–11.

[11] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan Constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., **244** (2000), 515-532.

[12] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Absolute norms on* $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., **252** (2000), no. 2, 879–905.

[13] M. A. Smith and B. Turett, *Rotundity in Lebesgue-Bochner function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **257** (1980), no. 1, 105–118.

[14] Y. Takahashi, Norm inequalities and geometry of Banach spaces. RIMS Kokyuroku No. 1399 (2004).

[15] Y. Takahashi and M. Kato, *von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces,* Nihonkai Math. J., **9** (1998), no. 2, 155-169.

[16] Y. Takahashi and M. Kato, Geometry of Banach spaces and norms of ± 1 matrices. RIMS Kokyuroku No. 1039 (1998).

[17] Y. Takahashi, M. Kato and K. -S. Saito, *Strict convexity of absolute normes on* $\mathbb{C}^2$ *and direct sums of Banach spaces*, J. Inequal. Appl., **7** (2002), 179-186.